中国科大

2016 威海暑期学校结业报告

超对称理论简介

姓名：朱剑文
导师：马文淦
专业：粒子物理与原子核物理

Email:zjw0019@mail.ustc.edu.cn

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

2016威海暑期学校
结业报告
—— 超对称理论简介

一、超空间与超场

任一超空间的函数，如超场，总可以展开成如下形式

$$F(x,\theta,\bar\theta)=f(x)+\theta\psi(x)+\bar\theta\bar\chi(x)+\theta\theta m(x)+\bar\theta\bar\theta n(x)$$
$$+\theta\sigma^\mu\bar\theta v_\mu(x)+\theta\theta\bar\theta\bar\lambda(x)+\bar\theta\bar\theta\theta\rho(x)+\theta\theta\bar\theta\bar\theta d(x)$$

对超空间的积分可以用单一的 Grassman 数定义，由 $\int d\theta^1(a+\theta^1 b)=b$，所以 $\int d\theta^1 d\theta^2\theta^2\theta^1=1$，由 $\theta\theta=2\theta^2\theta^1$，$\bar\theta\bar\theta=2\theta^1\theta^2$ 可以定义 $d^2\theta=\frac{1}{2}d\theta^1 d\theta^2$，$d^2\bar\theta=\frac{1}{2}d\bar\theta^2 d\bar\theta^1=(d^2\theta)^+$，故有：

$$\int d^2\theta\,\theta\theta=\int d^2\bar\theta\,\bar\theta\bar\theta=1$$

以及

$$\int d^2\theta=\frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^\beta},\quad \int d^2\bar\theta=-\frac{1}{4}\varepsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\bar\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\bar\theta^\beta}$$

$$\int d^2\theta\, d^2\bar\theta\,\theta\theta\bar\theta\bar\theta=1$$

我们希望 $F(x,\theta,\bar\theta)$ 的变换满足如下关系

$$(1+i\varepsilon Q)F(x,\theta,\bar\theta)=F(x+\delta x,\theta+\varepsilon,\bar\theta)$$

其中 $iQ_\alpha=\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}+\Box$，$\Box$中份为形如 $c(\sigma^\mu\bar\theta)_\alpha P_\mu=-ic(\sigma^\mu\bar\theta)_\alpha\partial_\mu$，c为待定系数，所以

$$Q_\alpha=-i\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}-ic(\sigma^\mu\bar\theta)_\alpha\partial_\mu\right)$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号　邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

其厄米共轭为

$$\bar{Q}_{\dot\alpha} = i\left(\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} - iC^*(\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\partial_\mu\right)$$

满足如下的超对称代数.

$$\{Q_\alpha, Q_{\dot\beta}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}P_\mu = -2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu$$

若取 $C=1$，则

$$Q_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - \sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\partial_\mu$$

$$\bar{Q}_{\beta\dot\alpha} = i\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + \theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu$$

将作用量作用于超场 F 上

$$(1+i\varepsilon Q+i\bar\varepsilon\bar Q)F(x^\mu,\theta^\alpha,\bar\theta^{\dot\beta}) = F(x^\mu - i\varepsilon\sigma^\mu\bar\theta + i\theta\sigma^\mu\bar\varepsilon, \theta^\alpha+\varepsilon^\alpha, \bar\theta^{\dot\beta}+\bar\varepsilon^{\dot\beta})$$

超场的超对称变换可以定义为：

$$\delta_{\varepsilon,\bar\varepsilon}F = (i\varepsilon Q + i\bar\varepsilon\bar Q)F$$

对于 $N=1$ SUSY, 我们可以定义协变微商.

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\partial_\mu$$

$$\bar{D}_{\dot\alpha} = \frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}} + i\theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu$$

其中 $\bar{D}_{\dot\alpha} = (D_\alpha)^\dagger$，且有如下关系

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot\beta}\} = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu, \quad \{D_\alpha, D_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot\alpha}, \bar{D}_{\dot\beta}\} = 0$$

$$\{D_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{D}_{\dot\alpha}, Q_\beta\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = \{\bar{D}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 0$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

手征超场

手征超场可以定义为 $\bar{D}_{\dot\alpha}\phi=0$

与之对应的. $D_\alpha\bar\phi=0$

容易有: $D_\alpha\bar\theta=\bar D_{\dot\alpha}\theta=D_\alpha\bar y^\mu=\bar D_{\dot\alpha}y^\mu=0$

$$y^\mu=x^\mu+i\theta\sigma^\mu\bar\theta,\quad \bar y^\mu=x^\mu-i\theta\sigma^\mu\bar\theta$$

手征超场可以展开成如下的形式

$$\phi(y,\theta)=z(y)+\sqrt2\theta\psi(y)-\theta\theta f(y)$$

或者:

$$\phi(y,\theta)=z(y)+\sqrt2\theta\psi(x)+i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu z(x)-\theta\theta f(x)$$
$$-\frac{i}{\sqrt2}\theta\theta\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar\theta-\frac14\theta\theta\bar\theta\bar\theta\partial^2 z(x)$$

相似地.

$$\bar\phi(y,\bar\theta)=\bar z(\bar y)+\sqrt2\bar\theta\bar\psi(\bar y)-\bar\theta\bar\theta\bar f(\bar y)$$
$$=\bar z(x)+\sqrt2\bar\theta\bar\psi(x)-i\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\mu\bar z(x)-\bar\theta\bar\theta\bar f(x)$$
$$+\frac{i}{\sqrt2}\bar\theta\bar\theta\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi(x)-\frac14\theta\theta\bar\theta\bar\theta\partial^2\bar z(x)$$

对手征超场而言, 用 $y^\mu,\theta,\bar\theta$ 替换 $x^\mu,\theta,\bar\theta$

有: $Q_\alpha=-i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}$, $\bar Q_{\dot\alpha}=i\frac{\partial}{\partial\bar\theta^{\dot\alpha}}+2\theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\frac{\partial}{\partial y^\mu}$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http: www.ustc.edu.cn

所以 $\delta\phi(y,\theta)=(i\varepsilon Q+i\bar{\varepsilon}\bar{Q})\phi(y,\theta)=\left(\varepsilon^{\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}}+2i\theta\sigma^{\mu}\bar{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y^{\mu}}\right)\phi(y,\theta)$

$$=\sqrt{2}\varepsilon\psi-2\varepsilon\theta f+2i\theta\sigma^{\mu}\bar{\varepsilon}(\partial_{\mu}z+\sqrt{2}\theta\partial_{\mu}\psi)$$

$$=\sqrt{2}\varepsilon\psi+\sqrt{2}\theta\left(-\sqrt{2}\varepsilon f+\sqrt{2}i\sigma^{\mu}\bar{\varepsilon}\partial_{\mu}z\right)-\theta\theta\left(-i\sqrt{2}\bar{\varepsilon}\bar{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\psi\right)$$

于是有各个分量的超对称变换形式

$$\delta z=\sqrt{2}\varepsilon\psi$$

$$\delta\psi=\sqrt{2}i\partial_{\mu}z\sigma^{\mu}\bar{\varepsilon}-\sqrt{2}f\varepsilon$$

$$\delta f=\sqrt{2}i\partial_{\mu}\psi\sigma^{\mu}\bar{\varepsilon}$$

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

二. N=1 SUSY

N=1 的 SUSY 生成元满足如下反对易关系

$$\{Q_\alpha, Q^\dagger_{\dot\beta}\} = -2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} P_\mu$$

超对称模型的特征是每一个粒子都处于一个超对称多重态中的一部分，这个多重态在 Standard Model 规范群下有相同的表示，而在 Lorentz 群下有不同的表示（比如不同的自旋）。其中最重要的一部分就是手征多重态，用 Φ^i 表示，包括有质量的费米子，标量粒子及它们的超对称伙伴。以及矢量多重态，$V = gV_aT^a$，包括规范玻色子和它们的超对称伙伴，gauginos。所以，SUSY 不仅包含了更多的粒子种类，其中的一些可以作为 Dark Matter 的候选者。也提供了一种新的理论框架可以拓展 SM，并解决 SM 中的一些困难，如等级差问题

如果考虑一类定域的超对称理论，其中不仅包括手征及矢量多重态，还有引力多重态，由 spin-2 的引力子及 spin-$\frac{3}{2}$ 的引力子的伙伴构成，即 gravitino。这个模型的拉氏量可以写成正则 superpotential $W(\Phi^i)$ 和 Kähler 势的函数 $(K(\Phi^i, \Phi^{*i}))$，这是一个手征多重态的厄米函数，满足规范对称性。动能项及手征多重态的规范耦合可以由 Kähler 势导出

$$\mathcal{L}_{kin} = \int d^2\theta\, d^2\theta^\dagger K_{i\bar{j}} \Phi^{*i} e^{2V} \Phi^j$$

地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551－63602184 传真：0551－63631760 Http://www.ustc.edu.cn

其中的指标 i^*, j 分别对应着 Φ^{*i}, Φ^j。K_{i^*j} 是 Kähler 矩阵元。

标量势由下式表示

$$V_{pot} = e^{K/M_p^2}\left[F_j K^{ji^*} F_{i^*} - 3\frac{|W|^2}{M_p^2}\right] + D\text{-terms}$$

其中 $F_i = W_i + K_i \frac{W}{M_p^2}$ 是对应于手征场 Φ^i 的 F-term.

当 $M_p \to \infty$ 时，V_{pot} 简化为我们熟知的形式

$$V_{pot} = \sum_i |W_i|^2 + D\text{-terms}$$

MSSM 中的 superpotential 包含一般的二次，三次相互作用项，有如下的形式

$$W_{MSSM} = \bar{u} y_u Q H_u - \bar{d} y_d Q H_d - \bar{e} y_e L H_d + \mu H_u H_d$$

其中的手征超场 Q, L 代表 SM 中的 SU(2) 二重态，而 $\bar{u}, \bar{d}, \bar{e}$ 是 SU(2) 单态。H_u, H_d 是 Higgs SU(2) 二重态

其中的 μ-term 必然小于一个电弱标度上从而允许发生电弱对称性破缺。通过 SM 中单态 S 对 MSSM 做一个简单的拓展，即 NMSSM。上面说的电弱标度可以从另一个三次项及单态的真空期望值得到，那么 superpotential 可以写成

$$W_{NMSSM} = W_{MSSM} + \lambda S H_u H_d + \frac{1}{3}\kappa S^3$$

其中的 λ, κ 均为常数. SM 中的规范对称性实际上需要额外的

可重整项，该项可以写成如下形式

$$W_{RPB} = \mu^i L_i H_u + \lambda^{ijk} L_i L_j \bar{e}_k + \lambda'^{ijk} L_i Q_j \bar{d}_k + \lambda''^{ijk} \bar{u}_i \bar{d}_j \bar{d}_k$$

如果R-宇称守恒，那么最轻的超对称性子（LSP）就是稳定的，因为R-宇称守恒禁止其衰变到SM粒子，所以、Dark Matter的候选者可以是LSP。在超对称破缺中，拉氏量也包含软破缺项、比如gaugino的质量项，标量场的双线性、三线性的标量项：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{soft} = & -\frac{1}{2}\sum_i (M_i\lambda_i\lambda_i + h.c.) - \tilde{L}^\dagger m_L^2 \tilde{L} - \tilde{e}\, m_{\tilde{e}}^2\, \tilde{e}^\dagger \\ & - \tilde{Q}^\dagger m_Q^2 \tilde{Q} - \tilde{u}\, m_{\tilde{u}}^2\, \tilde{u}^\dagger - \tilde{d}\, m_{\tilde{d}}^2\, \tilde{d}^\dagger \\ & - m_{H_u}^2 H_u^* H_u - m_{H_d}^2 H_d^* H_d + A[W]\end{aligned}$$

其中$\tilde{Q}$、$\tilde{L}$、$\tilde{u}$，$\tilde{d}$，$\tilde{e}$是多重态中的标量超对称伙伴

A(W)包括了所有的标量双线性及三线性项。

$$A[W_{MSSM}] = -(\tilde{u}\, a_u \tilde{Q} H_u + \tilde{d}\, a_d \tilde{Q} H_d + \tilde{e}\, a_e \tilde{L} H_d + b H_u H_d + h.c.)$$

三. SUSY dark matter Candidate

SUSY中的dark matter候选者有很多，比如 neutralino，gravitino，Axino 等等…我们现在只介绍一种，即 neutralino

在R-宇称守恒的MSSM中，存在四种neutralino，用 $\tilde{\chi}_i^0$ 表示，$i=1,\dots,4$，这些质量本征态是由中性电的gaugino ($\tilde{B}$, $\tilde{W}^0$) 和中性 Higgsinos ($\tilde{H}_d^0$, $\tilde{H}_u^0$) 线性组合形成。这些态之间的混合即是电弱破缺的结果。在 gauge-eigenstate 基底下，可以表示成 $\psi=(\tilde{B},\tilde{W}^0,\tilde{H}_d^0,\tilde{H}_u^0)$。在MSSM中neutralino的质量项可以写成 $-\frac{1}{2}\psi^T M_{\tilde{\chi}^0}\psi + h.c.$，其中neutralino质量矩阵 $M_{\tilde{\chi}^0}$ 是如下形式

$$M_{\tilde{\chi}^0} = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -g'v_d/\sqrt{2} & g'v_u/\sqrt{2} \\ 0 & M_2 & g v_d/\sqrt{2} & -g v_u/\sqrt{2} \\ -g'v_d/\sqrt{2} & g v_d/\sqrt{2} & 0 & -\mu \\ g'v_u/\sqrt{2} & -g v_u/\sqrt{2} & -\mu & 0 \end{pmatrix}$$

以上的neutralino质量矩阵可以通过幺正矩阵N对角化。$N^* M_{\tilde{\chi}^0} N^{-1} = diag(m_{\tilde{\chi}_1^0}, \dots m_{\tilde{\chi}_4^0})$ 其中 $m_{\tilde{\chi}_1^0}, \dots, m_{\tilde{\chi}_4^0}$ 即为4个neutralino的质量。

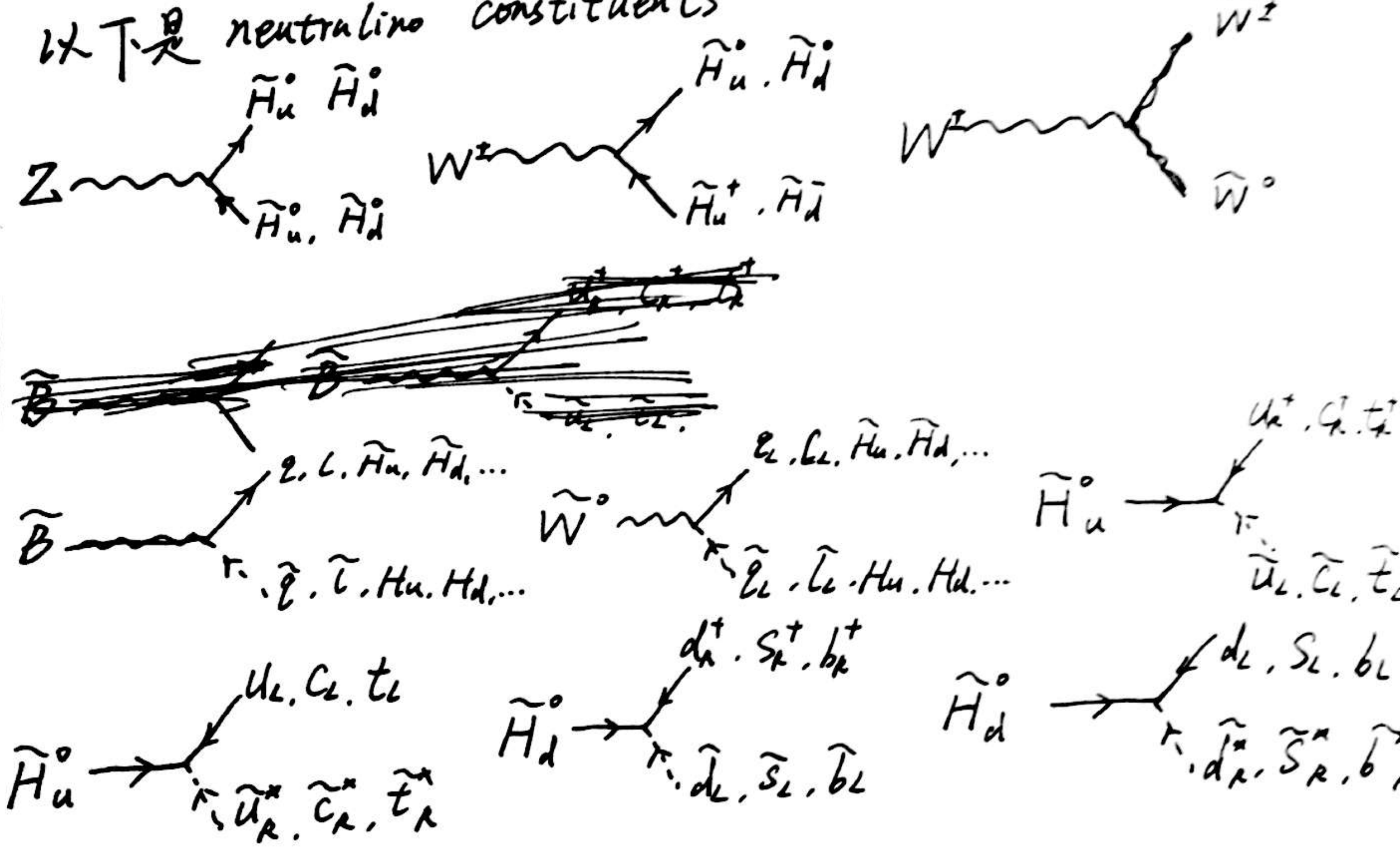
以上在MSSM中对neutralino的定义可以推广到NMSSM。在NMSSM下，费米分量 S. singlino. $\tilde{S}$，与规范本征态 $\tilde{H}_d^0$，$\tilde{H}_u^0$ 混合，最终将会有五种 neutralino-like 粒子，其中的最轻的一个

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
地址：中国 安徽 合肥市金寨路96号 邮编：230026
电话：0551-63602184 传真：0551-63631760 Http://www.ustc.edu.cn

即为 DM的候选者. 与MSSM相比. 会多一个新的相互作用顶点

包括3个偶CP Higgs boson 和2个奇CP Higgs boson

以下是 neutralino constituents



参考文献：

1. Introduction to supersymmetry - Bilal, Adel hep-th/0101055 NEIP-01-001

2. SUSY dark matters - Catena, Riccardo et al. Eur Phys. J. C74(2014) 2703
arxiv: 1310. 4776 [hep-th]

3. Introduction to supersymmetry - Lykken, Joseph D. hep-th/9612114 FERMILAB-PUB-96-445-T