格点量子色动力学基础

冯旭

暑期学校第一周的课程主要讲的是一些基础的东西，由马建平老师给大家讲微扰 QCD 基础，我负责格点 QCD 基础这一部分。我在准备这次课程讲义的时候，主要有一个想法，就是让大家了解 QCD 的非微扰定义。因为大部分同学学习规范场论的时候都是从微扰论出发的，对于格点 QCD 可能比较陌生一点。大家可能将来并不一定真的要拿格点 QCD 去做各种数值模拟和计算，但即便如此，对于格点 QCD 的了解也能帮助大家更好地理解 QCD。

首先，推荐一些格点 QCD 方面的常用教材。书籍方面主要是

1) *Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation, C. Gattringer & C. Lang*

2) *Lattice Methods for Quantum Chroodynamics, Thomas DeGrand & Carleton DeTar*

3) 格点量子色动力学力学导论，刘川

Lecture note 方面，美国核理论所 INT2012 年举办过一次暑期学校

4) *INT Summer School on Lattice QCD for Nuclear Physics* (Lecture slides 在 INT 网页上都能找到 http://www.int.washington.edu/PROGRAMS/12-2c/Lectures.html)

法国 Les Houches 曾经举办过两期格点方面的暑期学校，比较近的一期是

5) *Modern Pespectives in Lattice QCD: quantum filed thoery and high performance computing* (相关 lecture note 已经结集出版)

6) 98 年还有一次暑期学校，arXiv 上有一些零星的讲义，比方说 R. Gupta【hep-lat/9807028】和 M. Lüscher 【hep-lat/9802029】

这些书籍和讲义，对于初学者了解格点 QCD，应该是非常有用的，我在准备这次暑期学校讲义的过程中，也有参考以上文献。

1 引言

谈到 QCD，就不能不说它的三个特殊性质：

- 渐近自由:
$$\alpha_s(\mu) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\beta_0 \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2_{\rm QCD}}}, \quad \beta_0 = (\frac{11N_c - 2N_f}{3})/16\pi^2 \tag{1}$$
胶子自相互作用使得 QCD 的性质和 QED 很不一样，在高能区，强相互作用耦合常数变得很小，夸克和胶子渐近自由，而在低能区，相互作用却表现处很强的非微扰特性，使得微扰论失效。

- 色禁闭：
$$V(r) = A + \frac{B}{r} + \sigma r \tag{2}$$
夸克受到 QCD 相互作用的强力束缚，带单个色荷的夸克不可能从核子中单个地分离出来，这给我们研究强子结构造成了困难

- 手征对称性自发破缺：

$$\langle\bar{q}q\rangle = \langle\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L\rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \quad SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A \to SU(N_f)_V \tag{3}$$

  由于真空夸克凝聚，使得手征对称性自发破缺，这也造就了粒子物理世界形形色色的强子谱。首先，Goldstone 定理告诉我们会有 $N_f^2 - 1$ 个无质量 goldstone boson, 像 pion、kaon；除此之外，比如矢量介子和轴矢介子的能谱表现出很大的差异

$$m_\rho = 0.770 \text{ GeV}, \quad m_{a_1} = 1.26 \text{ GeV} \tag{4}$$

  只有理解了 QCD 在低能区的性质，QCD 的真空结构，才能更好地帮助我们去理解强子的质量来源和相互作用行为。

格点 QCD 的应运而生，就是为了应对 QCD 的几种特殊性质。它能够非微扰地处理低能强相互作用，帮助我们研究 pion 介子、质子甚至一些轻核的强子结构的信息。(以前格点上研究的强子结构主要是与电弱流相关的形状因子、质子电荷半径之谜、质子的质量和自旋分解、以及部分子分布函数的矩等等, 主要针对的是不含时的强子矩阵元；随着季向东老师提出的大动量有效理论, 把含时的强子矩阵元在大动量框架下和不含时的强子矩阵元关联起来，现在格点也可以用来直接计算部分子分布函数。在这次暑期学校里面，季向东老师会向大家介绍他的大动量有效理论。) 另外格点 QCD 也被用来研究色禁闭的机制以及手征对称性自发破缺、手征凝聚等。只要在一个物理过程里面，初态和末态是作为强子态出现的，那么夸克就被禁闭在强子内部，我们计算相关强子矩阵元就需要一种非微扰的处理方式。

随着计算资源的快速增加、以及算法和格点 QCD 研究手段的改进，特别是进入到 2000 年以后，格点 QCD 从淬火近似 (也就是说 simulation 里面不含海夸克) 到 full QCD 的 simulation，再到 physical quark mass simulation，像轻强子谱的计算以及一些简单强子的强子结构，格点 QCD 计算和实验符合得很好。如果说高能区的深度非弹实验与微扰 QCD 印证的揭示了 QCD 是强相互作用背后最基本的理论，那么低能区的强子谱和强子结构与非微扰格点 QCD 的印证实际上起到了同样的作用。需要指出的是，当前高能物理中的高精度前沿主要通过测量一些高精度的物理，比较它们与标准模型预言的差别来寻找新物理。而标准模型能否给出精确预言，很多时候依赖于我们对低能区 QCD 相互作用贡献的计算，因为这个原因，格点 QCD 在 pecision flavor physics 等领域正起着举足轻重的作用。

格点 QCD 处理的对象是一个由强子构成的世界，能量尺度在 $\mu \lesssim 1$ GeV，这里夸克和胶子禁闭在强子内部，而且强相互作用耦合常数在 $O(1)$ 的量级，微扰论失效。在这个情况下，我们需要一种非微扰的手段来研究夸克的禁闭机制，计算强子谱以及与强子态有关的各种强子矩阵元。为了实现这个目的，一种格点的非微扰的正规化方案被提了出来。应该说，Kenneth G. Wilson 1974 年提出格点规范场论这个概念的时候，并不是直接和计算机联系在一起的。1974 年的超级计算机，运行速度大概是我们现在一台普通笔记本电脑运行速度的千分之一的量级。Wilson 提出格点规范场论，主要是要提供一个解释夸克禁闭的机制。他在强相互作用耦合常数趋于无穷的情况下，得到了静态夸克势随着正反夸克距离变大而变大的结果，从而检验了夸克禁闭。但他把他的这个工作称为模型，原因就在于，他的结论是在耦合常数趋于无穷这个极限下导出来的；另一方面，我们可以看到，因为耦合常数在 $O(1)$，所以我们需要非微扰的计算，需要计算机的帮助来进行数值计算；但真当耦合常数趋于无穷时，解析的计算反倒可以做出来。我们后面讲纯规范场 Wilson 圈的时候，还会讲到 Wislon 的这个工作。他文章题目叫 Confinement of quarks, PRD 10 (1974) 2445，目前引用次数 > 4600 次，感兴趣的同学可以找来看一下。

【作业：阅读 K. G. Wilson 这篇开创性的文章，就自己的阅读体会写一个文献阅读报告。】

如果用一句概括格点 QCD，那么格点 QCD 就是构建在分立的欧氏时空格子下的 QCD 理论。我们来看一下这句话里面包含了哪些关键词。

1.1 第一个关键词是分立的时空格子

计算机只能处理有限的自由度，因此，格点 QCD 模拟的系统有一个有限大的体积 L，有一个不为 0 的格距 a，那么在一个维度上能容纳的格点数为 $N = L/a \sim 32, 48, 64$，考虑到 4 维时空，总的格点数就是 N^4。

这里，有限体积 L 提供的是一个红外截断，而非零格距 a 提供了一个紫外截断。事实上，格点 QCD 提供一个一种非微扰的正规化方案，在给定的非零格距下，由于存在着紫外截断 π/a，因此不会有无穷大发散的存在。另一方面，所有重整化以后的物理量不依赖于截断，在 $a \to 0$ 时不会发散，或者说它们在 $a \to 0$ 都有一个好的连续极限值。原则上，我们也可以利用格点正规化来进行微扰的计算，我们通常称为 lattice perturbation theory。只是这种微扰计算比起常用的维数正规化方案来讲，可能更加复杂。但对于非微扰计算来讲，格点正规化方案却是不可或缺的。

由于在量子系统中存在粒子的产生和湮灭，能产生和湮灭的最轻的强子为 pion 介子。因此我们需要格点的体积足够大，至少 pion 介子的康普顿波长 $\sim 1/m_\pi$，这样才能保证 pion 介子不会受到有限体积的显著影响；换句话说，这个时候，有限体积误差才会足够小。对于稳定强子来讲，这个误差是随着体积增大而指数衰减的。经验上来讲，当 $m_\pi L \geq 4$ 时，我们认为有效体积效应就不是那么重要了。这个时候，对应的 $L \sim 6$ fm。在格距 a 还没有趋于 0 的时候，如果我们要模拟一个重夸克的系统，比方说 charm quark，质量在 1.3 GeV，那么我们就需要格距 a 足够小，使得 am_c 是个小量，目前格点上模拟的 ultra-fine lattice spacing 在 0.04 fm，对应的能量标度是 5 GeV 左右。如果既想要最大的体积，又想要最小的格距，那么格子的大小为 150^4，对于 full QCD 的 simulation 来讲，这依然是个很艰巨的任务。目前各个格点组是根据他们的物理目标进行 simulation。如果研究的物理对象对于轻夸克质量的依赖比较敏感，那么通常物理体积会足够大；这个时候格距可以取得大一点，比方说 0.11, 0.09, 0.07 fm，然后做连续极限外推得到 $a \to 0$ 的结果。如果对于格距误差 (lattice artifacts) 要求比较高，那么 pion 的质量可以比物理质量重一些，比方说 $m_\pi = 400$, 300, 200 MeV，然后外推到物理的 pion 质量上去。

目前我所知的最大的格点 simulation 来自 M. Lüscher 在 2017 年的格点年会上的汇报，他模拟了一个 $N = 192$ 的淬火格点系统【1707.09758】。它的格距是 0.1fm，物理体积是 19.2fm。这样一个最大的 $SU(3)$ 格点规范场系统的模拟是在一个 64 节点，1536 核，8.2TB 内存的机器上花了 10 天的时间模拟出来的。因为 QCD 系统并不是一个长程的系统，如果格点模拟的体积很大，那么场变量在离得很远的时候的关联很弱，或者可以认为它们的涨落是独立的。这种性质也被称为“stochastic locality”。由于计算机模拟一个 192^4 的格子和模拟 256 个 48^4 的格子所耗费的计算资源是差不多的，那么利用 stochastic locality 以及平移不变性，我们可以在一个 192^4 的大格子上做几百次测量，来得到比几百个 48^4 的规范场组态做平均上相近甚至更好的物理结果。

1.2 第二个关键词是欧氏时空

在 Wick 转动下，我们从闵氏时空转换到欧氏时空。位置和动量空间的 0 分量变为

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv t \to -ix_4 \equiv -i\tau \\ p_0 &\equiv E \to ip_4 \end{aligned} \tag{5}$$

除了时间分量，欧氏时空中的其它三个分量保持不变，与闵氏时空一样。在欧氏时空下，度规取成 $(+,+,+,+)$，因此有

$$x_E^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = \vec{x}^2 - t^2 = -x_M^2$$
$$p_E^2 = \sum_{i=1}^{4} p_i^2 = \vec{p}^2 - E^2 = -p_M^2 \tag{6}$$

我们下面来看一个闵氏时空的 2 点格林函数 $\Gamma_M(t,\vec{k}) = \int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \langle 0|T[\hat{O}_M(\vec{x},t)\hat{O}_M^\dagger(\vec{0},0)]|0\rangle$，其中算符 $\hat{O}(\vec{x},t)$ 在海森堡表象下可以写为

$$\hat{O}_M(\vec{x},t) = e^{i\hat{H}t - i\hat{p}x}\hat{O}_M(\vec{0},0)e^{-i\hat{H}t+i\hat{p}x} \tag{7}$$

不妨取 $t>0$，我们可以去掉编时乘积，那么格林函数

$$\Gamma_M(t,\vec{k}) = \int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \langle 0|e^{i\hat{H}t-i\hat{p}x}\hat{O}_M(\vec{0},0)e^{-i\hat{H}t+i\hat{p}x}\hat{O}_M^\dagger(\vec{0},0)|0\rangle \tag{8}$$

利用 Hilbert 空间的完备性，插入能量本征态 $1 = \sum_n \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}|n,\vec{p}\rangle\langle n,\vec{p}|$，我们得到

$$\begin{aligned}\Gamma_M(t,\vec{k}) &= \sum_n \langle 0|\hat{O}_M(\vec{0},0)|n,\vec{k}\rangle e^{-i\hat{H}t}\langle n,\vec{k}|\hat{O}_M^\dagger(\vec{0},0)|0\rangle \\ &= \sum_n \langle 0|\hat{O}_M(\vec{0},0)|n,\vec{k}\rangle e^{-iE_n t}\langle n,\vec{k}|\hat{O}_M^\dagger(\vec{0},0)|0\rangle\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $|n,\vec{k}\rangle$ 代表带动量 $\vec{k}$ 的、量子数对应于 $\hat{O}_M$ 算符的强子态的第 n 个激发态。

对于欧氏时空的 2 点格林函数 $\Gamma_E(\tau,\vec{k}) = \int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \langle 0|T[\hat{O}_E(\vec{x},\tau)\hat{O}_E^\dagger(\vec{0},0)]|0\rangle$，其算符写为

$$\hat{O}_E(\vec{x},\tau) = e^{\hat{H}\tau - i\hat{p}x}O_E(\vec{0},0)e^{-\hat{H}\tau+i\hat{p}x} \tag{10}$$

在 $t=\tau=0$ 的时间上，我们有 $\hat{O}_M(\vec{x},0) = \hat{O}_E(\vec{x},0)$。但当 $t=\tau\neq 0$ 时，很明显 $\hat{O}_M(\vec{x},0) \neq \hat{O}_E(\vec{x},0)$。在 Wick 转动底下，$t\to -i\tau$，但哈密顿量算符 $\hat{H}$ 保持不变，对于欧氏时空 2 点函数，我们有

$$\Gamma_E(\tau,\vec{k}) = \sum_n \langle 0|\hat{O}_E(\vec{0},0)|n,\vec{k}\rangle e^{-\hat{H}\tau}\langle n,\vec{k}|\hat{O}_E^\dagger(\vec{0},0)|0\rangle \tag{11}$$

很明显，欧氏时空的格林函数的时间依赖关系和闵氏时空的格林函数的时间依赖关系是不一样的。因此对于定义在闵氏时空的含时算符，或者说含时矩阵元，它们所描述的物理量，与欧氏时空所定义的物理量，往往是不一样的。解析延拓这件事情，不一定很 trivial。但是这里，希望大家注意到的是，无论在闵氏时空、还是在欧氏时空，哈密顿量是完全一样的，因此对应的能谱都一样，能量本征态也一样。由于欧氏算符和闵氏算符在时间等于 0 的时候是一样，对于不含时的强子矩阵元，比如说 $\langle 0|\hat{O}(\vec{0},0)|n,\vec{k}\rangle$，欧氏和闵氏时空得到的也是一样的。

比较了相同点，我们下面来说说闵氏时空和欧氏时空物理可能有哪些不一样的地方

- 传统的含时物理量，比如质子的部分子分布函数 (parton distribution function)

$$q(x,\mu^2) = \int \frac{d\xi^-}{4\pi}\, e^{-ix\xi^- P^+}\langle N(P)|\bar{\psi}(\xi^-)\gamma^+ \exp\left(-ig\int_0^{\xi^-} d\eta^- A^+(\eta^-)\right)\psi(0)|N(P)\rangle \tag{12}$$

  其中质子的动量 P^μ 可以取为 z 方向，$P^\mu = (P^0,0,0,P^z)$，$\xi^\pm = (t\pm z)/\sqrt{2}$ 是光锥坐标，t 是闵氏时间。由于算符明显含时，我们没法在欧氏时空直接计算。解决方案：大动量有效理论（季向东）【1305.1539、1404.6680】等一系列文章。

- 含共振态和多粒子态的物理量。我们前面通过构造关联函数，可以提取出哈密顿量的本征态，对应的是粒子的能谱。但无论共振态还是多粒子态，它们对应的是 branch cut，在能量大于两粒子阈值的时候，能量是连续的，而在格点上，由于整个物理体积是有限的，在有限的体积中能谱必然是分立的。解决方案：有限体积方法 (M. Lüscher)【Commun.Math.Phys. 105 (1986) 153, NPB 354 (1991) 531】把有限体积中计算得到的能量，转变为无穷体积中的粒子-粒子散射振幅。

- Time-like 和 space-like 区域的差别。我们来看一个真空极化函数，在闵氏时空，它可以定义为

$$\Pi_{\mu\nu}^{(M)}=\int d^4x_M\,e^{iqx_M}\langle 0|J_\mu(x_M)J_\nu(0)|0\rangle,\quad \Pi_{\mu\nu}^{(M)}=(q_\mu q_\nu-g_{\mu\nu}q^2)\cdot\Pi^{(M)}(q^2) \tag{13}$$

这个真空极化函数对应于 $e^+e^-\to\gamma^*\to\text{hadrons}$ 的过程。$s=q^2>0$，对应 time-like 区域，这里 s 可以认为是末态强子的不变质量平方。根据光学定理 (从幺正性导出)，这个真空极化函数的虚部，与强子谱密度 (spectral density) 成正比，可以由 BESIII 实验的 R 值测量来给出

$$\mathrm{Im}\,\Pi^{(M)}(s)=2\pi\rho(s)=\frac{R(s)}{6\pi},\quad R(s)\equiv\frac{\sigma(e^+e^-\to\text{hadrons})}{4\pi\alpha(s)^2/(3s)} \tag{14}$$

而对于欧氏时空，做完傅立叶变换以后，我们得到

$$\Pi_{\mu\nu}^{(E)}=\int d^4x_E\,e^{iQx_E}\langle 0|J_\mu(x_E)J_\nu(0)|0\rangle,\quad \Pi_{\mu\nu}^{(E)}(Q^2)=(Q_\mu Q_\nu-\delta_{\mu\nu}Q^2)\cdot\Pi^{(E)}(Q^2) \tag{15}$$

这里 $q^2=-Q^2<0$，对应 space-like 区域。根据真空极化函数的解析性 (可以从因果率导出)，两个区域的物理可以通过 once-substracted dispersion relation 关联起来

$$\Pi^{(E)}(Q^2)-\Pi^{(E)}(0)=Q^2\int_0^\infty\frac{ds}{2\pi}\,\frac{\mathrm{Im}\,\Pi^{(M)}(s)}{s(s+Q^2)} \tag{16}$$

在 time-like 区域，通过实验 R 值测量，我们可以看到各个共振态的峰，而 space-like 区域，真空极化函数随能量的变化是平滑的，两者的物理现象很不一样。要在格点上处理 time-like 区域的物理，也不是说没有办法，对于末态是两体散射或者两个散射道的情况，可以用 Lellouch-Lüscher 方法【hep-lat/0003023】去处理，但对于深度非弹性的过程，末态粒子包含各种强子，目前还没有好的解决方案。

从路径积分的角度来看一个 2 点格林函数，在闵氏时空下，它可以写成

$$\langle\hat{O}_1\hat{O}_2\rangle_M=\frac{1}{Z_M}\int\mathcal{D}[A_\mu]\mathcal{D}[\psi]\mathcal{D}[\bar\psi]\,O_1O_2e^{-iS_M} \tag{17}$$

这里，配分函数 Z 由路径积分给出

$$Z_M=\int\mathcal{D}[A_\mu]\mathcal{D}[\psi]\mathcal{D}[\bar\psi]\,e^{-iS_M} \tag{18}$$

它在场论里面代表真空到真空的振幅。等式 (17) 的左边用的是量子场论场算符的语言，而等式右边与场算符没有任何关系，这里的 $O_{1,2}$ 代表的是以规范场和费米子场为变量的泛函。注意到，在闵氏时空，路径积分带有一个权重因子 e^{-iS_M}。

如果用计算机对路径积分进行 Monte Carlo 数值模拟，那么我们需要一个高斯型的权重因子，而不是一个震荡型的分布函数。这就是为什么我们在欧氏时空去处理量子场论问题。在 Wick 转动下

$t \to -i\tau$，权重因子变为 $e^{-iS_M} \to e^{-S_E}$。这个时候的权重因子实际上相当于统计力学系统的玻尔兹曼因子。2 点格林函数可以写成

$$\langle \hat{O}_1 \hat{O}_2 \rangle_E = \frac{1}{Z_E} \int \mathcal{D}[A_\mu]\mathcal{D}[\psi]D\bar{\psi}\, O_1 O_2 e^{-S_E} \tag{19}$$

这里

$$Z_E = \int \mathcal{D}[A_\mu]\mathcal{D}[\psi]D\bar{\psi}\, e^{-S_E} \tag{20}$$

事实上配分函数 Z_M 和 Z_E 并没有太大区别。对于欧氏时空，它告诉我们作用量最小的路径对于路径积分的贡献最大，其它路径的贡献被指数压低了；而对于闵氏时空，大作用量对应的路径有一个剧烈震荡的因子，在积分时贡献也会抵消掉，出来的效果是一致的。这里我要强调一点，把闵氏空间和欧氏空间的关联函数和路径积分分别进行比较，不仅仅是为了说明欧氏时空场论给出的物理和闵氏时空是一致的，更为根本的，我们可以把欧氏时空的场论看成是量子场论的一种非微扰定义。

把与场算符相关的格林函数用路径积分的形式表达出来，可以说是整个格点 QCD simulation 的基础。在这个基础上，我们可以把欧氏时空路径积分系统类比为一个统计力学系统。对格点 QCD 做数值模拟和对一个统计力学系统做数值模拟从原理上来讲是一样的。

表 1: 欧氏时空场论 vs 经典统计力学

欧氏时空场论	经典统计力学
作用量：$S_E[\psi, \bar{\psi}, A]$	哈密顿量：H
路径积分权重因子：e^{-S_E}	玻尔兹曼因子：$e^{-\beta H}$
真空到真空的振幅：$\int \mathcal{D}[A_\mu]\mathcal{D}[\psi]D\bar{\psi}\, e^{-S_E}$	配分函数：$\sum_{conf.} e^{-\beta H}$
真空能量	自由能
真空期望值：$\langle 0\|\hat{O}\|0\rangle$	正则系综平均：$\langle O \rangle$
格林函数：$\langle 0\|T[O_1 \cdots O_n]\|0\rangle$	关联函数：$\langle O_1 \cdots O_n \rangle$

1.3 第三个关键词：QCD 理论——格点 QCD 构建的必须是个 QCD 理论

同学们可以想一下，假如你是 Wilson，要在格点上构建 QCD 理论，你需要做哪些事情：第一、你要构建格点离散化的费米子场和规范场，这是格点正规化所必须的；第二、用这些场来构建作用量，在构建作用量的时候要尽可能保证原有的对称性不被破坏，在格距趋于 0 的时候要保证能回到连续时空的 QCD 理论；第三、我们需要做路径积分，那么还需要明确定义费米子场和规范场积分测度。或者，换句话说，我们要给路径积分一个严格的非微扰的定义。

我们先来做第一件事情，把费米子场放在欧氏 4 维时空格子的每个格点上

$$\psi(n), \quad \bar{\psi}(n), \quad n_\mu = 0, 1, \cdots, L-1, \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \tag{21}$$

连续时空的自由费米子场作用量的表达式给出如下

$$S_F^0[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x\, \bar{\psi}(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x) \tag{22}$$

在分立的时空里面，我们把求导替换为差分算符，可以有向前、向后差分

$$\partial_\mu \psi(n) = \frac{1}{a}(\psi(n+\hat{\mu}) - \psi(n)), \quad \partial_\mu^* \psi(n) = \frac{1}{a}(\psi(n) - \psi(n-\hat{\mu})) \tag{23}$$

或者两者求平均

$$\bar{\partial}_\mu \psi(n) = \frac{\psi(n+\hat{\mu}) - \psi(n-\hat{\mu})}{2a} \tag{24}$$

这样，格点上给出的自由费米子场作用量为

$$S_F^0[\psi, \bar{\psi}] = a^4 \sum_n \bar{\psi}(n) \left(\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu \frac{\psi(n+\hat{\mu}) - \psi(n-\hat{\mu})}{2a} + m\psi(n) \right) \tag{25}$$

计算机处理的都是无量纲的数,我们也可以把格距 a 吸收到费米子场和质量中,构成无量纲的量 $a^{\frac{3}{2}}\psi(n)$、am。对于费米子场的路径积分来讲，格点上的费米子场依然可以用 Grassmann 数来表示，对费米子场的积分依然满足 Grassmann 数积分

$$\begin{aligned}
&\int d\psi d\bar{\psi} = \int d\psi d\bar{\psi}\, \psi = \int d\psi d\bar{\psi}\, \bar{\psi} = 0 \\
&\int d\psi\, \psi = \int d\bar{\psi}\, \bar{\psi} = 1 \\
&\int d\psi d\bar{\psi}\, \bar{\psi}\psi = 1
\end{aligned} \tag{26}$$

还有一点需要指出的是，由于我们在欧氏时空选择了度规 $(+,+,+,+)$。那么我们的 γ 矩阵选择的也是欧氏时空的 γ 矩阵，其中一种手征表示是

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & i\vec{\sigma} \\ -i\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \tag{27}$$

它们具有厄米性 $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$，并且满足反对易关系

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} I \tag{28}$$

这里，我们得到的是 $2\delta_{\mu\nu}$，而不是 $2g_{\mu\nu}$。在欧氏时空中，γ_5 矩阵定义为

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{29}$$

有了费米子场，下面要加入规范场。很明显，这里规范对称性是我们首先要保证的对称性。对费米子场做规范变换，我们有

$$\psi(n) \to V(n)\psi(n), \quad \bar{\psi}(m) \to \bar{\psi}(m) V^\dagger(m) \tag{30}$$

我们要使得正反夸克构成的算符规范不变，最好的做法是像 Wilson 一样引进一个规范场链接 (link),连接正反夸克场

$$\bar{\psi}(m) U(m,n) \psi(n) \equiv \bar{\psi}(m) \left(\mathcal{P} e^{\int_n^m igA_\mu(x) dx_\mu} \right) \psi(n) \tag{31}$$

这里 $\mathcal{P}$ 表示积分和路径有关。链接 $U(m,n)$ 满足规范变换

$$U(m,n) \to V(m) U(m,n) V^\dagger(n) \tag{32}$$

有了这个链接以后，整个夸克 bilinear 算符是规范不变的。在我们之前构造的费米子作用量里，只有相邻的正反夸克场发生耦合，这个时候我们可以引进长度为 1 的链接，刚好连接这样的两个夸克场

$$U_\mu(n) \equiv U(n, n+\hat{\mu}) = e^{iagA_\mu(n+\frac{\hat{\mu}}{2})} \tag{33}$$

从这个定义可以看出，$U_\mu(n)$ 并非定义在 n 上，而是定义在从 n 出发向四个方向的链接上。这个定义其实来得很自然。因为规范场描述的就是夸克之间的相互作用，如果把夸克放在格点上，那么把规范场放在连接格点的 link 上是恰如其分的。

有了 $U_\mu(n)$ 以后，我们也可以定义一个反向的 link

$$U_{-\mu}(n) \equiv U(n, n-\hat{\mu}) = U(n-\hat{\mu}, n)^\dagger = U_\mu(n-\hat{\mu})^\dagger = e^{-iagA_\mu(n-\frac{\hat{\mu}}{2})} \tag{34}$$

它满足规范变换

$$U_{-\mu}(n) \to V(n)U_{-\mu}(n)V(n-\hat{\mu})^\dagger \tag{35}$$

把规范场加入到费米子场作用量里面去，我们得到

$$S_F[\psi, \bar{\psi}] = a^4 \sum_n \bar{\psi}(n) \left(\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{U_\mu(n)\psi(n+\hat{\mu}) - U_{-\mu}(n)\psi(n-\hat{\mu})}{2a} + m\psi(n) \right) \tag{36}$$

这种构造很简单，只需要给不在同一位置上的夸克场引入连接它们的链接即可。这里我们顺便可以给出向前、向后协变差分的定义

$$D_\mu\psi(n) = \frac{1}{a}(U_\mu(n)\psi(n+\hat{\mu}) - \psi(n)), \quad D^*_\mu\psi(n) = \frac{1}{a}(\psi(n) - U_{-\mu}(n)\psi(n-\hat{\mu})) \tag{37}$$

【作业：对费米子场作用量进行格距 a 的微扰展开，给出 $O(a)$ 和 $O(a^2)$ 项的表达式，并确认，$O(1)$ 这一项和连续时空的形式是一致的。】
需要指出的是，这里所用的费米子场叫做 naive fermion，它会有 doubling 的问题，也就是说费米子传播子除了一个物理的极点之外，还存在非物理的极点，因此，并不是我们真正在格点中使用的费米子场作用量。我们后面还会讲到这件事，现在先略过去。

在格点上，构造规范不变的算符有两种方式，一种是正反夸克场之间用 gauge link 来连接，形如

$$\bar{\psi}(m)U_\mu(m)U_\nu(m+\hat{\mu})\cdots U_\rho(n-\hat{\rho})\psi(n) \tag{38}$$

还有一种是由纯规范场构成，由 gauge linke 形成一个闭合的圈，最简单的例子是小方块

$$P_{\mu\nu}(n) = \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U^\dagger_\mu(n+\hat{\nu})U^\dagger_\nu(x)) \tag{39}$$

由于 $U_\mu(n)$ 是个 SU(3) 的矩阵，小方块求迹之后是个复数。可以证明，如果小方块的 4 个链接反着走，与正着走刚好形成复共轭。取实部实际上是把这两种路径做了平均。
【作业：请确认对于规范场的闭合圈，正着走和反着走刚好形成复共轭。另外，请确认对于规范不变的算符，只有上述两种构造方式。】

在连续极限下，我们可以把一个闭合圈上的规范场乘积写为

$$G(x,y) = \mathcal{P}\exp\left(ig\int_{\mathcal{C}_{x,y}} A\cdot dr\right) = \exp\left(ig\int_{\mathcal{S}_{x,y}} \nabla\times A\cdot ds\right) \tag{40}$$

第二个式子，由 Stokes 公式得到。如果我们现在处理的是一个 μ,ν 方向的小方块，那么我们有

$$P_{\mu\nu}(n) = \exp\left(ia^2gF_{\mu\nu} + O(a^4)\right) \tag{41}$$

【作业：请从小方块 $P_{\mu\nu}(n)$ 的定义出发，验证这个式子，先考虑 $U(1)$ 规范场，再考虑更为复杂的 $SU(3)$ 非阿贝尔规范场。提示：在 $n+\frac{\hat{\mu}+\hat{\nu}}{2}$ 处做展开】
下一步，$P_{\mu\nu}(n)$ 对 a 做 Taylor 展开，得到

$$P_{\mu\nu}(n) = 1 + ia^2 gF_{\mu\nu} - \frac{1}{2}a^4 g^2 F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + O(g^6) \tag{42}$$

为了消去第一项和第二项，我们将规范场作用量定义为

$$S_G[U] = \frac{2}{g^2}\sum_n \sum_{\mu<\nu} \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}[1 - P_{\mu\nu}(n)] = \frac{a^4}{2g^2}\sum_n \sum_{\mu,\nu} \mathrm{Tr}[F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}] + O(a^2) \tag{43}$$

在 $a\to 0$ 的极限下，$a^4\sum_n \to \int d^4x$，我们得到 $S_G[U] = S_G[A]$。

有了作用量以后，我们来看一下格点系统中的对称性。首先，在欧氏时空下 Lorentz 对称性变成了 $SO(4)$ 对称性。由于格点离散化，这个对称性会进一步破缺为 hypercubic 群。原本任意的旋转变换现在只能允许转 90°。平移不变性这件事情，只能以格距为单位进行平移，才能保证。这也意味着，在周期性边界条件下，格点上的动量只能允许取

$$k = \frac{2\pi n}{La}, \quad n = 0, 1, 2, \cdot L - 1 \tag{44}$$

或者等价写成

$$k = \pm\frac{2\pi n}{La}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots, L/2 \tag{45}$$

这些对称性的破缺，在格点正规化这个框架下，几乎是不可避免的。但是除此之外，格点 QCD 尽可能地保留了其它的对称性，比方说宇称 ($\mathcal{P}$)、电荷共轭 ($\mathcal{C}$) 和时间反演 ($\mathcal{T}$)。费米子场和规范场在 $\mathcal{P}$、$\mathcal{C}$、$\mathcal{T}$ 变换下满足

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{T}$
$U_4(\vec{x},\tau)$	$U_4(-\vec{x},\tau)$	$U_4^*(\vec{x},\tau)$	$U_{-4}(\vec{x},-\tau)$
$U_i(\vec{x},\tau)$	$U_{-i}(-\vec{x},\tau)$	$U_i^*(\vec{x},\tau)$	$U_i(\vec{x},-\tau)$
$\psi(\vec{x},\tau)$	$\gamma_4\psi(-\vec{x},\tau)$	$C\bar{\psi}^T(\vec{x},\tau)$	$\gamma_4\gamma_5\psi(\vec{x},-\tau)$
$\bar{\psi}(\vec{x},\tau)$	$\bar{\psi}(-\vec{x},\tau)\gamma_4$	$-\psi^T(\vec{x},\tau)C^{-1}$	$\bar{\psi}(\vec{x},-\tau)\gamma_5\gamma_4$

这里电荷共轭矩阵 C 可以写成 $C=\gamma_4\gamma_2$ 的形式，它满足关系式

$$C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T = -\gamma_\mu^* \tag{46}$$

还有一个保存下来的对称性的是规范不变性，这在前面作用量的构造里面可以看到。对于 naive 费米子来讲，手征对称性也是满足的，但是 naive 费米子会有 doubling 的问题，Wilson 的解决方案是引进了 Wilson 项，但这一引进项破坏了手征对称性。我们在后面讲到费米子章节的时候会具体讲到这个问题。

既然格点 QCD 给出的是 QCD 的非微扰定义，那么所有 QCD 依赖的参数我们这里也需要：一个是 α_s，在我们的格点作用量里面由裸的参数 g^2 来给出；还有一个是夸克质量，包括 up, down, strange

三个较轻的夸克，以及比较重的 charm 和 bottom quark，top 夸克寿命太短，也不形成强子态，所以不在格点 QCD 的研究范畴。charm 夸克目前是直接可以像三个较轻的夸克一样进行 simulation 的，bottom quark 的引入一般要借助于重夸克有效理论、或者 Non-relativistic QCD 等手段。格点作用量里面作为参数引入的夸克质量也是裸的夸克质量。之所以说这些参数是裸的，是因为它们是在格点正规化下引入的，会依赖于截断，也就是非零格距 a。我们要调节裸参数 $g(a), m_i(a)$，使得格点计算出来的物理量和实验符合

$$O(g(a), m_i(a), a) = O_{\text{phys}} \tag{47}$$

比方说，我们调节裸夸克的质量，使得格点 QCD 计算出来的 π 介子质量等于实验的测量值，那么这个时候的 u/d 夸克参数可以认为是物理的参数，我们让 kaon 或者 Ω 重子的质量也等于实验测量值，那么这个时候的 s 夸克也调到了物理值。一旦用几个物理量把 QCD 的参数定下来以后，其它的物理量全是格点 QCD 的 prediction。

这里其实还有一个问题，就是计算机上得到的数全是无量纲的数，以 pion 介子质量为例，我们计算得到的实际是无量纲量 am_π 的值。要与 PDG 上物理的值进行比较，我们首先要知道，格距 a 到底是多大？而且，由于格距 a 这个量的存在，粗看起来，感觉我们好像在格点 QCD 里面多引进了一个参数，这是怎么回事？我们下面来回答这两个问题。我们先考虑一个没有相互作用的系统，假如格距 $a = 0.1$ fm，物理尺寸 $L = 1$ fm，那个放在计算机上，它对应于一个 $(L/a)^4 = 10^4$ 的立方格子；如果我们再定义一个格距 $a = 0.2$ fm，物理尺寸 $L = 2$ fm 的系统，放在计算机上，它还是对应于一个 $(L/a)^4 = 10^4$ 的立方格子；在无相互作用的时候，两者完全没有区别。但当引进了相互作用以后，实际上低能 QCD 是存在一个非微扰的 haronic scale，这个 scale 也可以认为是我们之前提到的 Λ_{QCD}。裸的耦合常数 g^2 和截断 a 之间满足重整化群耦合常数跑动

$$g^2(a) = \frac{1}{\beta_0 \ln \frac{1}{a^2\Lambda^2}} \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \frac{1}{a}\exp(-\frac{1}{2\beta_0 g^2}) \tag{48}$$

由于 Λ 这个 scale 的存在，使得我们输入的裸耦合常数和格距 a 是不独立的。输入了裸耦合常数，相当于我们已经设定了格距 a。当然，格点上最后定格距 a 并不是通过上面这个式子，原因在于，Λ 是个非微扰的 scale，而等式的左边却是从微扰论里来得。我们后面会具体讲到如何给格距定标。

因为格点 QCD 的参数可调，事实它不仅可以给出我们感兴趣的物理量的标准模型预言值，也可以通过研究物理量对夸克质量的依赖关系，帮助我们研究手征微扰论，确定低能有效常数；另外也可以用到重夸克有效理论中去。

2 格点上的纯规范场

在纯规范场下，物理量 O 的期望值可以由路径积分

$$\langle O \rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}[U]\, O[U] e^{-S_G[U]} \tag{49}$$

给出。这里配分函数 Z 定义为

$$Z = \int \mathcal{D}[U]\, e^{-S_G[U]}, \tag{50}$$

积分测度定义为

$$\mathcal{D}[U] = \prod_{x\in L^3T}\prod_{\mu=1}^{4}\int dU_\mu(x) \tag{51}$$

规范场的作用量定义为

$$S_G[U] = \frac{\beta}{N_c} \sum_{x \in L^3 T} \sum_{\mu<\nu} \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}[1 - P_{\mu\nu}(x)] \tag{52}$$

这里 $\beta = \frac{2N_c}{g^2}$ 叫做 inverse coupling，之所以这么定义是有历史的原因，我们后面会看到。

因为所有的变量 $U_\mu(x)$ 的取值都是 $SU(3)$ 群的群元，所以我们实际上是在一个连续的紧致群 (compact group) 上进行积分，这时候的积分测度在数学上被称为 Haar 测度。在规范变化下，$U_\mu(x)$ 变为

$$U_\mu(x) \quad \to \quad U'_\mu(x) = V(x) U_\mu(x) V(x+\hat{\mu})^\dagger \tag{53}$$

要满足规范不变性，我们要求积分测度

$$dU_\mu(x) = dU'_\mu(x) = d(V(x) U_\mu(x) V(x+\hat{\mu})^\dagger) \tag{54}$$

因为群元 $V(x)$ 的选取具有任意性，因此，我们实际上要求无论左乘还是右乘一个群元 $W \in SU(3)$，都有

$$dU = d(UW) = d(WU) \tag{55}$$

因为 U_μ 是从 $SU(3)$ 群群元里面取值，如果用矩阵表示，矩阵元素的取值范围在 0 到 1 之间，我们管这种规范场叫 compact gauge field。对于我们在微扰论里面经常用的规范场 A_μ，它是通过 $SU(3)$ 群的生成元来构造，这种规范场称为 non-compact gauge field。在连续极限下，规范场的自由度从 compact 变成 non-compact。但是在格点正规化的情况，由于非零格距的引入，规范场自然而然是 compact 的，所有的积分测度都不会发散，因此也不需要做 gauge fixing。由于在做路径积分的时候，有限的积分测度会在分子、分母里抵消掉一个因子，因此，我们不妨引入归一化条件

$$\int dU\, 1 = 1 \tag{56}$$

利用这两个条件，我们可以得到一系列 $SU(3)$ 积分

$$\begin{aligned}
&\int_{SU(3)} dU\, U_{ab} = 0 \\
&\int_{SU(3)} dU\, U_{ab} U_{cd} = 0 \\
&\int_{SU(3)} dU\, U_{ab} (U^\dagger)_{cd} = \frac{1}{3} \delta_{ad} \delta_{bc} \\
&\int_{SU(3)} dU\, U_{ab} U_{cd} U_{ef} = \frac{1}{6} \epsilon_{ace} \epsilon_{bdf}
\end{aligned} \tag{57}$$

这里，我们给出第一个积分的证明。

$$\int_{SU(3)} dU\, U_{ab} = \int_{SU(3)} d(VU)(VU)_{ab} = \int_{SU(3)} dU\, (VU)_{ab} = V_{ac} \int_{SU(3)} dU\, U_{cb} \tag{58}$$

如果积分不为 0，要使等式成立，我们只能要求 $V_{ac} = \delta_{ac}$，这和 V 是任意 $SU(3)$ 群元矛盾。因此反证得到第一个积分结果。

【作业：验证后面几个积分。】

这几个积分公式里面，最重要的是第三个，从它我们可以得到

$$\int dU\; \mathrm{Tr}[VU]\, \mathrm{Tr}[U^\dagger W] = \frac{1}{3} \mathrm{Tr}[VW]. \tag{59}$$

2.1 夸克禁闭与格距的确定

对于由纯规范场构成的规范不变量来讲，它是由规范场链接构成的闭合圈来给出的

$$L(U) = \mathrm{Tr}\left[\prod_{(x,\mu)\in\mathcal{L}} U_\mu(x)\right] \tag{60}$$

这里 $\mathcal{L}$ 是个闭合圈。Wilson 圈是其中最有名的一种闭合圈，它的特点是由四部分构成，在时间片 t_0 和 t_1 处，有两条空间方向的 Wilson 线 $S(\vec{x},\vec{y};t_0)$ 和 $S(\vec{x},\vec{y};t_1)$；另外，给定空间点 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$，在时间方向上有两条线 $T(\vec{x};t_0,t_1)$ 和 $T(\vec{y};t_0,t_1)$。这里空间线 $S(\vec{x},\vec{y};t)$ 定义为

$$S(\vec{x},\vec{y};t) = \prod_{(\vec{z},j)\in\mathcal{C}_{\vec{x},\vec{y}}} U_j(\vec{z},t) \tag{61}$$

时间线 $T(\vec{x};t_0,t_1)$ 定义为

$$T(\vec{x};t_0,t_1) = \prod_{t=t_0}^{t_1-1} U_4(\vec{x},t). \tag{62}$$

Wilson 圈的值通过求迹来得到

$$W_{\mathcal{L}}[U] = \mathrm{Tr}[S(\vec{x},\vec{y};t_1)T(\vec{y};t_0,t_1)^\dagger S(\vec{x},\vec{y};t_0)^\dagger T(\vec{x};t_0,t_1)]. \tag{63}$$

最简单的 Wilson 圈是沿着时间方向为 $t = t_1 - t_0$，沿着空间方向间隔为 $r = |\vec{y}-\vec{x}|$ 的长方形。为了理解 Wilson 圈的物理含义，我们选取一种时间规范，这种规范固定是将所有时间方向上的规范场链接都设成单位矩阵

$$U_0(x) = 1, \quad \forall x \tag{64}$$

由于 $U_0(x) = \exp(iaA_0(x))$，这个规范等价于令 $A_0(x) = 0$。于是 Wilson 圈在路径积分下的期望值可以写成

$$\langle W_{\mathcal{L}}[U]\rangle = \langle \mathrm{Tr}[S(\vec{x},\vec{y};t_1)S(\vec{x},\vec{y};t_0)^\dagger]\rangle \tag{65}$$

我们后面在费米子章节会证明，在无穷重夸克极限下，如果 x 和 y 两点存在一对静态正反夸克的源，那么这对静态正反夸克之间的传播子可以由最短距离连接 x、y 点的 Wilson 线给出。如果用数学的形式写出来

$$Q(\vec{x},t;\vec{y},t) \equiv \Psi(\vec{x},t)_{\alpha,a}\bar{\Psi}(\vec{y},t)_{\beta,b} \propto S(\vec{x},\vec{y};t)_{a,b} \tag{66}$$

这里我们忽略了传播子中的 spinor 指标 α,β，主要考察规范场的作用。于是从 Wilson 圈，我们可以得到

$$\langle W_{\mathcal{L}}(r,t)\rangle \quad\to\quad \langle \mathrm{Tr}[Q(\vec{x},t_1;\vec{y},t_1)Q(\vec{x},t_0;\vec{y},t_0)^\dagger]\rangle \quad\to\quad \langle[\Psi(\vec{x},t_1)\bar{\Psi}(\vec{y},t_1)][\Psi(\vec{x},t_0)_{\alpha,a}\bar{\Psi}(\vec{y},t_0)]^\dagger\rangle \tag{67}$$

这实际上告诉我们，Wilson 圈对应于一个格林函数，这个格林函数在 t_0 这个时间片产生一对距离为 r 的正反夸克和在 t_1 这个时间片上湮灭一对正反夸克。如果我们在两个 Wilson 线之间插入能量的本征态，我们得到

$$\langle W_{\mathcal{L}}(r,t)\rangle = \langle [S(\vec{x},\vec{y};0)]_{ab}|n\rangle\langle n[S(\vec{x},\vec{y};0)^\dagger]_{ba}\rangle e^{-E_n t} \tag{68}$$

这里的基态能量对应的是正反夸克对的能量，可以表述为空间距离为 r 的静态夸克势

$$E_1 = V(r) = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log\langle W_{\mathcal{L}}(r,t)\rangle \tag{69}$$

更高能量的激发态里除了我们感兴趣的夸克对之外，还有其它正反夸克的组合，这些组合的量子数与真空一致。事实上，只要时间间隔 $t = t_1 - t_0$ 取得足够大，Wilson 圈的贡献主要来自基态。

要判断夸克禁闭可以有两种方式，一种是给定一对带色荷的正反夸克，看它们之间的相互作用势能是否随着距离增大，如果一直增大的话，意味着在正反两个色荷离得无穷远时，能量无穷大。还有一种判断方式是，看分离出来的单个的色荷的自由能是否是无穷大，如果是的话，意味着我们需要加入无穷大的能量，才能把单个色荷从系统中分离出来。我们先来看第一种情况，也就是看带色荷的正反夸克之间的势能 $V(r)$ 随着距离是如何变化的。事实上，Wilson 在他的那篇开创性的文章里，就证明了当强相互作用耦合常数趋于无穷时，$V(r)$ 随着 r 增加是线性增长的。另一方面，在小耦合常数下，QCD 两个色荷之间的势很类似于 QED 的库伦势，都是 $1/r$ 的形式。所以我们可以把 $V(r)$ 表述为

$$V(r) = A + \frac{B}{r} + \sigma r \tag{70}$$

这种静态夸克势的表达方式，也被称为 Cornell 势，其中 σ 称为弦张量。

我们下面来看一下，强耦合极限下，σ 的计算。用路径积分来表达 Wislon 圈的期望值

$$\langle W_{\mathcal{L}}[U]\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}[U]\,\exp\left(-\frac{\beta}{N_c}\sum_P \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}[1-U_P]\right)\mathrm{Tr}\left[\prod_{l\in\mathcal{L}} U_l\right] \tag{71}$$

其中分子、分母可以消去一个 $\exp(-\beta/N_c\sum_P \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}[1])$。我们得到

$$\begin{aligned}\langle W_{\mathcal{L}}[U]\rangle &= \frac{1}{Z'}\int \mathcal{D}[U]\,\exp\left(\frac{\beta}{N_c}\sum_P \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}[U_P]\right)\mathrm{Tr}\left[\prod_{l\in\mathcal{L}} U_l\right]\\ &= \frac{1}{Z'}\int \mathcal{D}[U]\,\exp\left(\frac{\beta}{2N_c}\sum_P \left(\mathrm{Tr}[U_P]+\mathrm{Tr}[U_P^\dagger]\right)\right)\mathrm{Tr}\left[\prod_{l\in\mathcal{L}} U_l\right]\end{aligned} \tag{72}$$

强耦合极限 $g^2\to\infty$ 对应于 $\beta\to 0$ 极限，对于配分函数，我们有

$$Z' = \int \mathcal{D}[U]\,\exp\left(\frac{\beta}{2N_c}\sum_P\left(\mathrm{Tr}[U_P]+\mathrm{Tr}[U_P^\dagger]\right)\right) = \int \mathcal{D}[U]\,(1+O(\beta)) = 1+O(\beta) \tag{73}$$

对玻尔兹曼因子 $\exp\left(\frac{\beta}{2N_c}\sum_P\left(\mathrm{Tr}[U_P]+\mathrm{Tr}[U_P^\dagger]\right)\right)$ 这项做 Taylor 展开，只保留与 $\mathrm{Tr}[U_P^\dagger]$ 有关的项，我们得到

$$\begin{aligned}&\int \mathcal{D}[U]\frac{1}{n_A!}\left(\frac{1}{2N_c}\right)^{n_A}\left(\sum_P \mathrm{Tr}[U_P^\dagger]\right)^{n_A}\mathrm{Tr}\left[\prod_{l\in\mathcal{L}} U_l\right]\\ =\ & \left(\frac{1}{2N_c}\right)^{n_A}\int \mathcal{D}[U]\prod_{P\in\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}\mathrm{Tr}[U_P^\dagger]\,\mathrm{Tr}\left[\prod_{l\in\mathcal{L}} U_l\right]\\ =\ & \left(\frac{1}{2N_c}\right)^{n_A}\left(\frac{1}{N_c}\right)^{n_A}\mathrm{Tr}[1]\\ =\ & 3\exp(n_A\log\frac{\beta}{2N_c^2})\end{aligned} \tag{74}$$

这里 n_A 对应的是铺满整个 Wilson 圈所需的小方格子的个数：$n_A = \frac{rt}{a^2}$。所以，我们得到

$$V(r) \sim -\frac{r}{a^2} \log \frac{\beta}{2N_c^2} \left(1 + O(\beta)\right) \quad \Rightarrow \quad \sigma = -\frac{1}{a^2} \log \frac{\beta}{2N_c^2} \left(1 + O(\beta)\right) \tag{75}$$