中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

Hamtiltonian有效场论（HEFT）中的分波混合

报告人：李严

合作者: 吴佳俊 Curtis D. Abell Derek B. Leinweber Anthony W. Thomas

2019年10月，于中国格点QCD发展战略研讨会

目录

格点与实验中的可测量及对称性

- **实验：** 按旋转群 $O(3)$ 不可约表示划分的散射相移 $\delta_l(E)$
- **格点：** 按格点群 O_h 不可约表示划分的能谱 $E_n(\Gamma, L)$
- O_h是$O(3)$的子群，不可约表示将有如下约化

$$
\begin{aligned}
\mathbf{0}^+ &= \mathbf{A}_1^+ \\
\mathbf{1}^- &= \mathbf{T}_1^- \\
\mathbf{2}^+ &= \mathbf{E}^+ \oplus \mathbf{T}_2^+ \\
\mathbf{3}^- &= \mathbf{A}_2^- \oplus \mathbf{T}_1^- \oplus \mathbf{T}_2^- \\
\mathbf{4}^+ &= \mathbf{A}_1^+ \oplus \mathbf{E}^+ \oplus \mathbf{T}_1^+ \oplus \mathbf{T}_2^+
\end{aligned}
$$

- 相移与能谱之间应当存在联系，这种联系应遵从这个约化
- 分波混合：无穷体积下退耦的分波，在有限体积下存在耦合

Lüscher公式

- Lüscher公式：相移与能谱间存在模型无关的联系(忽略指数小项)
- 用角动量截断l_{cut}忽略高分波贡献($l > l_{\text{cut}}$)
- 在最简单的情况下，其将是一个1-1的公式
  - $l_{\text{cut}} = 0$: $E_n^{\text{lat}}(\mathbf{A}_1^+, L) = 100\,\text{MeV} \to \delta_0(100\,\text{MeV})$
- 更一般的情况下，不再是1-1了
  - $l_{\text{cut}} = 4$: $E_n^{\text{lat}}(\mathbf{A}_1^+, L) = 100\,\text{MeV} \to f\left[\delta_0(100\,\text{MeV}), \delta_4(100\,\text{MeV})\right] = 0$
  - 需要多个相同能量的能级才能联立求解出这些相移
- 找到多个相同能量的能级是很难的
- 更可行的是：将不同能量的能级联系起来→ 参数化与拟合
- 最直接的方法：参数化相移
- HEFT：参数化势能

M. Lüscher:
Commun. Math. Phys., 105:153-188, 1986.
Commun. Math. Phys., 104:177, 1986.
Nucl. Phys., B354:531-578, 1991.

什么是HEFT及HEFT的现状

- 什么是HEFT
  - 无穷体积Hamiltonian：$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} \xrightarrow{\text{散射方程}}$ 散射相移
  - 有限体积Hamiltonian：$\hat{H}_L = \hat{H}_{0L} + \hat{V}_L \xrightarrow{\text{矩阵本征值问题}}$ 能谱
  - $\hat{V}$与$\hat{V}_L$存在联系，可被同一组参数参数化
  - 拟合能谱确定参数，预言相移
- HEFT的现状
  - 之前只被应用于低分波情形，那种情况下矩阵维数可以被大幅降低
  - 这里给出了一般情况下约化矩阵维数的一套方案
  - 并且将简要介绍HEFT如何应用于运动系

目录

无穷体积下的势能

- 平面波态基: $|\mathbf{k}\rangle$
- 遵从旋转群表示的基：$|k;l,m\rangle := \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}}\, Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\ |\mathbf{k}\rangle$
- 旋转不变性只允许这样的相互作用：$|k';l,m\rangle\,\langle k;l,m|$
- Wigner-Eckart 定理→ 不同的m对应相同的v_l

$$\hat{V} = \int \frac{k'^2\,dk'}{(2\pi)^3} \int \frac{k^2\,dk}{(2\pi)^3} \sum_{l,m} v_l(k',k)\,|k';l,m\rangle\,\langle k;l,m|$$

势能的有限体积化

$$\hat{V} = \int \frac{k'^2\,dk'}{(2\pi)^3} \int \frac{k^2\,dk}{(2\pi)^3} \sum_{l,m} v_l(k',k)\ |k';l,m\rangle\,\langle k;l,m|$$

- $\mathbf{k} \to \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$ $\qquad \int_0^\infty \frac{k^2\,dk}{(2\pi)^3} \to \sum_{N=0}^\infty$ $\qquad N$ denotes $|\mathbf{n}|^2$
- $v_l(k',k) \to \tilde{v}_l(k_{N'},k_N) := \frac{v_l(k_{N'},k_N)}{4\pi L^3}$ $\qquad k_N$ denotes $\frac{2\pi}{L}\sqrt{N}$
- $|k;l,m\rangle := \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}}\, Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\ |\mathbf{k}\rangle$

$$\Longrightarrow \qquad |N;l,m\rangle := \sqrt{4\pi} \sum_{|\mathbf{n}|^2=N} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})\ |\mathbf{n}\rangle$$

$$\hat{V}_L = \sum_{N'} \sum_{N} \sum_{l,m} \tilde{v}_l(k_{N'},k_N)\ |N';l,m\rangle\,\langle N;l,m|$$

势能的有限体积化

$$\hat{V} = \int \frac{k'^2\,dk'}{(2\pi)^3} \int \frac{k^2\,dk}{(2\pi)^3} \sum_{l,m} v_l(k',k)\ |k';l,m\rangle\,\langle k;l,m|$$

- $\mathbf{k} \to \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$ $\qquad \int_0^\infty \frac{k^2\,dk}{(2\pi)^3} \to \sum_{N=0}^{\infty}$ $\qquad N$ denotes $|\mathbf{n}|^2$
- $v_l(k',k) \to \tilde{v}_l(k_{N'},k_N) := \frac{v_l(k_{N'},k_N)}{4\pi L^3}$ $\qquad k_N$ denotes $\frac{2\pi}{L}\sqrt{N}$
- $|k;l,m\rangle := \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}}\, Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\ |\mathbf{k}\rangle$

$$\Longrightarrow \qquad |N;l,m\rangle := \sqrt{4\pi} \sum_{|\mathbf{n}|^2=N} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})\ |\mathbf{n}\rangle$$

$$\hat{V}_L = \sum_{N'} \sum_{N} \sum_{l,m} \tilde{v}_l(k_{N'},k_N)\ |N';l,m\rangle\,\langle N;l,m|$$

势能的有限体积化

$$\hat{V} = \int \frac{k'^2\, dk'}{(2\pi)^3} \int \frac{k^2\, dk}{(2\pi)^3} \sum_{l,m} v_l(k', k)\ |k'; l, m\rangle \langle k; l, m|$$

- $\mathbf{k} \to \frac{2\pi}{L}\mathbf{n}$ $\qquad \int_0^\infty \frac{k^2\, dk}{(2\pi)^3} \to \sum_{N=0}^\infty$ $\qquad N$ denotes $|\mathbf{n}|^2$
- $v_l(k', k) \to \tilde{v}_l(k_{N'}, k_N) := \frac{v_l(k_{N'}, k_N)}{4\pi L^3}$ $\qquad k_N$ denotes $\frac{2\pi}{L}\sqrt{N}$
- $|k; l, m\rangle := \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}}\, Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\ |\mathbf{k}\rangle$

$$\implies \qquad |N; l, m\rangle := \sqrt{4\pi} \sum_{|\mathbf{n}|^2 = N} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})\ |\mathbf{n}\rangle$$

$$\hat{V}_L = \sum_{N'} \sum_{N} \sum_{l,m} \tilde{v}_l(k_{N'}, k_N)\ |N'; l, m\rangle \langle N; l, m|$$

分波是如何混合的

$$\hat{V}_L = \sum_{N'} \sum_{N} \sum_{l,m} \tilde{v}_l(k_{N'}, k_N) \, |N'; l, m\rangle \, \langle N; l, m|$$

- 有限体积下，(l, m) 不再是一个好量子数
- $|N; l, m\rangle$遵从 $O(3)$ 的不可约表示，因此有 O_h 不可约表示的成分

$$\begin{aligned}
\mathbf{0}^+ &= \mathbf{A}_1^+ \\
\mathbf{1}^- &= \mathbf{T}_1^- \\
\mathbf{2}^+ &= \mathbf{E}^+ \oplus \mathbf{T}_2^+ \\
\mathbf{3}^- &= \mathbf{A}_2^- \oplus \mathbf{T}_1^- \oplus \mathbf{T}_2^- \\
\mathbf{4}^+ &= \mathbf{A}_1^+ \oplus \mathbf{E}^+ \oplus \mathbf{T}_1^+ \oplus \mathbf{T}_2^+
\end{aligned}$$

- v_l耦合于这些成分, 进而耦合于对应表示下的能谱

分波是如何混合的

- 无穷体积下的态$|k;l,m\rangle$是相互正交的

$$\langle k;l',m'|k;l,m\rangle \propto \int d\Omega_{\hat{\mathbf{k}}} Y^*_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}})Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{l',l}\delta_{m',m}$$

- 但有限体积下的这些态$|N;l,m\rangle$却不是

$$\langle N;l',m'|N;l,m\rangle = 4\pi \sum_{|\mathbf{n}|^2=N} Y^*_{l'm'}(\hat{\mathbf{n}})Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$$

- 有着不同(l,m)的$|N;l,m\rangle$可能具有重叠的成分，即分波混合

P矩阵：衡量分波混合的程度

- $[P_N]_{l',m';l,m} := \langle N; l', m' | N; l, m \rangle = 4\pi \sum_{|\mathbf{n}|^2=N} Y^*_{l'm'}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$
- $[P_N]_{0,0;0,0} = \langle N; 0, 0 | N; 0, 0 \rangle = \sum_{|\mathbf{n}|^2=N} \mathbf{1} = C_3(N)$
- 旋转对称性的恢复:

$$L \to \infty \text{ with } \frac{2\pi}{L}\sqrt{N} \text{ fixed} \quad \Longrightarrow \quad N \to \infty$$

$$\sum_{|\mathbf{n}|^2=N} \to \int d\Omega \quad \Longrightarrow \quad [P_N]_{l',m';l,m} \to C_3(N)\delta_{l',l}\delta_{m',m}$$

P矩阵：衡量分波混合的程度

s-wave p-wave d-wave f-wave g-wave

$$
\begin{pmatrix}
1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.05 & 0 & 0 & 0 & 1.75 & 0 & 0 & 0 & 1.05 \\
0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.94 & 0 & 0 & 0 & -1.21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.53 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.21 & 0 & 0 & 0 & -0.94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.08 & 0 & 0 & 0 & -1.08 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.17 & 0 & 0 & 0 & 1.40 & 0 & 0 & 0 & -1.17 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 1.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.08 & 0 & 0 & 0 & -1.08 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1.21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.46 & 0 & 0 & 0 & 1.13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.88 & 0 & 0 & 0 & 1.13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1.53 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.33 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.13 & 0 & 0 & 0 & 0.88 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1.21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.13 & 0 & 0 & 0 & 1.46 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.64 & 0 & 0 & 0 & 1.18 & 0 & 0 & 0 & 1.64 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1.08 & 0 & 0 & 0 & -1.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.94 & 0 & 0 & 0 & 0.94 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.40 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.18 & 0 & 0 & 0 & 3.84 & 0 & 0 & 0 & 1.18 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1.08 & 0 & 0 & 0 & -1.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.94 & 0 & 0 & 0 & 0.94 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.64 & 0 & 0 & 0 & 1.18 & 0 & 0 & 0 & 1.64
\end{pmatrix}
$$

$$[P_{N=1}]\Big/C_3(1) \qquad\qquad C_3(1)=6$$

$$[P_N]_{l',m';l,m} := \langle N;l',m'|N;l,m\rangle = 4\pi \sum_{|\mathbf{n}|^2=N} Y^*_{l'm'}(\hat{\mathbf{n}})Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$$

25×25 matrix ordered as $(l,m)=(0,0),\ (1,-1),\ (1,0),\ (1,1),\ \cdots,\ (4,4)$

P矩阵：衡量分波混合的程度

s-wave p-wave d-wave f-wave g-wave

$$
\left(\begin{array}{ccccccccccccccccccccccccc}
1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.07 & 0 & 0 & 0 & 0.11 & 0 & 0 & 0 & 0.07 \\
0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.06 & 0 & 0 & 0 & -0.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.08 & 0 & 0 & 0 & -0.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1.02 & 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.07 & 0 & 0 & 0 & -0.09 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.03 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.09 & 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0 & 0 & 0 & -0.09 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.03 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0 & 0 & 0 & 1.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.09 & 0 & 0 & 0 & -0.07 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.03 & 0 & 0 & 0 & 0.09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.94 & 0 & 0 & 0 & -0.03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0.09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -0.06 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.09 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.03 & 0 & 0 & 0 & 0.94 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -0.08 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.09 & 0 & 0 & 0 & 1.03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.04 & 0 & 0 & 0 & 0.11 & 0 & 0 & 0 & 0.20 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.93 & 0 & 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.07 & 0 & 0 & 0 & -0.09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.03 & 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0 & 0 & 0 & -0.04 & 0 \\
0.11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.11 & 0 & 0 & 0 & 1.30 & 0 & 0 & 0 & 0.11 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0.85 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.09 & 0 & 0 & 0 & -0.07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.08 & 0 & 0 & 0 & 1.03 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.03 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.04 & 0 & 0 & 0 & 0.93 & 0 \\
0.07 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.09 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.20 & 0 & 0 & 0 & 0.11 & 0 & 0 & 0 & 1.04
\end{array}\right)
$$

$$[P_{N=581}] \Big/ C_3(581) \qquad\qquad C_3(581) = 336$$

$$[P_N]_{l',m';l,m} := \langle N; l', m' | N; l, m\rangle = 4\pi \sum_{|\mathbf{n}|^2=N} Y^*_{l'm'}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$$

25×25 matrix ordered as $(l, m) = (0,0), (1,-1), (1,0), (1,1), \cdots, (4,4)$

P矩阵：衡量分波混合的程度

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} \text{s-wave} & \text{p-wave} & \text{d-wave} & \text{f-wave} & \text{g-wave} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & -0.01 \\
0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00 & 0 & 0 & 0 & -0.00 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0.02 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00 & 0 & 0 & 0 & 0.00 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.01 & 0 & 0 & 0 & 0.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00 & 0 & 0 & 0 & 1.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0.99 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & -0.03 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.01 & 0 & 0 & 0 & 0.00 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.02 & 0 & 0 & 0 & 0.00 & 0 \\
-0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0 & -0.02 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00 & 0 & 0 & 0 & 1.02 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.00 & 0 & 0 & 0 & 1.01 & 0 \\
-0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.03 & 0 & 0 & 0 & -0.02 & 0 & 0 & 0 & 0.99
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$[P_{N=941}]\Big/ C_3(941) \qquad\qquad C_3(941) = 552$$

$$[P_N]_{l',m';l,m} := \langle N; l', m' | N; l, m \rangle = 4\pi \sum_{|\mathbf{n}|^2=N} Y^*_{l'm'}(\hat{\mathbf{n}}) Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}})$$

25×25 matrix ordered as $(l, m) = (0,0), (1,-1), (1,0), (1,1), \cdots, (4,4)$

P矩阵：衡量分波混合的程度

- P矩阵也遵从格点对称性
- $m \to (\Gamma, f, \alpha) \Longrightarrow |N; l, m\rangle \to |N, l; \Gamma, f, \alpha\rangle$

$$|N, l; \Gamma, f, \alpha\rangle = \sum_m [C_l]_{\Gamma, f, \alpha; m} |N; l, m\rangle$$

- 通过一个幺正表换得到新基下的内积矩阵
  - 幺正变换矩阵：$[C] = \text{diag}([C_0], [C_1], \cdots)$
  - 新矩阵将按照O_h不可约表示分块对角化

$$[C][P_N][C]^\dagger \to \delta_{\Gamma', \Gamma} \delta_{\alpha', \alpha} \langle N, l'; \Gamma, f', \alpha | N, l; \Gamma, f, \alpha\rangle$$

Hamiltonian矩阵维数的约化

- Original basis $|\mathbf{n}\rangle$: $\sum_{N=0}^{N_{\text{cut}}=600} C_3(N) \sim 60,000$
- Basis $|N; l, m\rangle$ with $l_{\text{cut}} = 4$: $\sum_{N=0}^{600} 25 \sim 600 \times 25$
- Basis $|N, l; \Gamma = \mathbf{A}_1^+, f, \alpha\rangle$: $\sum_{N=0}^{600} 2 \sim 600 \times 2$
- Orthonormalization needs the inner products——P-Matrix

例子：同位旋-2的$\pi\pi$散射(过程)

PRD 86, 034031 (2012)
Jozef J. Dudek et al.

- $l_{\text{cut}} = 4$, only s-, d- and g-waves are present
- Separable potential model:

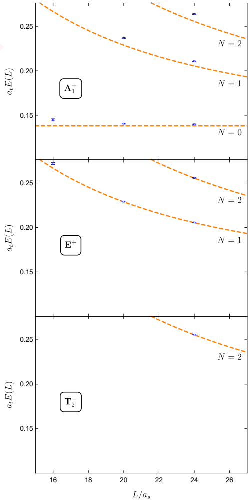
$$v_l(p,k) = f_l(p) G_l f_l(k)$$

$$f_l(k) \sim \frac{(d_l \times k)^l}{(1 + (d_l \times k)^2)^{l/2+2}}$$

- 6 parameters: G_0, G_2, G_4, d_0, d_2, d_4
- Dimensions of Hamiltonians ($N_{\text{cut}} = 600$):

$$\mathbf{A}_1^+ : 923 \quad \mathbf{E}^+ : 965 \quad \mathbf{T}_2^+ : 963$$

- The fitted data: 11 energy levels



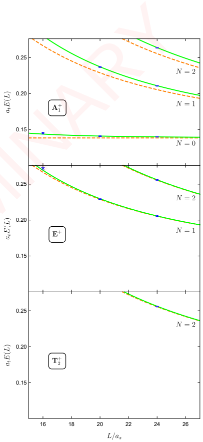
例子：同位旋-2的$\pi\pi$散射(结果)

Components of eigenstates

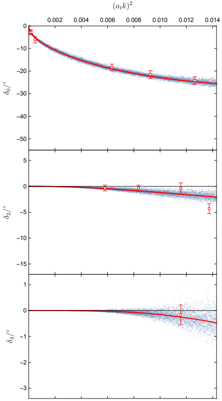
$\mathbf{A}_1^+$	$N=0$	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$\cdots$
1st	99.7	0.2	0.0	0.0	0.0	$\cdots$
2nd	0.1	97.4	1.9	0.2	0.0	$\cdots$
3rd	0.0	1.5	94.5	2.8	0.3	$\cdots$

- Fitting $\rightarrow$ Parameters $\rightarrow$ $\hat{H}$ and $\hat{H}_L$
- $\hat{H} \rightarrow \delta_l(E)$
- $\hat{H}_L \rightarrow E_n(\Gamma, L)$
- $\hat{H}_L \rightarrow$ Eigenstates

Volume dependent spectra



Phase shifts with errors



目录

运动系HEFT？

C.H. Kim et al:
Nucl. Phys., B727:218–243, 2005.

- 模型无关性是如何得到的
  - 从无穷体积到有限体积：$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \to L^{-3}\sum_{\mathbf{k}}$
  - 无穷和有限体积体系的差异：$\left(\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} - L^{-3}\sum_{\mathbf{k}}\right) f(\mathbf{k})$
  - 性质良好的函数，积分可被求和逼近，即求和减积分是可忽略小项
  - $f(\mathbf{k})$只有奇异的部分是重要的，场论的奇异性主要在on-shell点
  - 模型依赖性往往被包含在非奇异的部分中→模型无关的联系
- 运动系HEFT是如何得到的
  - 静止系的无穷体积相移→静止系积分：$\int d\mathbf{k}_c\ f_c(\mathbf{k}_c)$
  - 运动系的有限体积能谱→运动系求和：$\sum_{\mathbf{k}_m} f_m(\mathbf{k}_m)$
  - $\int d\mathbf{k}_c\ f_c(\mathbf{k}_c) - \sum_{\mathbf{k}_m} f_m(\mathbf{k}_m) \xrightarrow{???} \left(\int d\mathbf{k} - \sum_{\mathbf{k}}\right) f(\mathbf{k})$
  - 联系静止系与运动系→Boost:4-动量→3-动量Boost有不同的方案
  - 存在不同的方案给出相同奇异性的$f(\mathbf{k})$
  - HEFT中，对于给定的$\hat{V}$，不同的方案给出不同的$\hat{V}_L$
  - 我们找到了方案使得$\hat{V}_L$能量无关

运动系的新特性

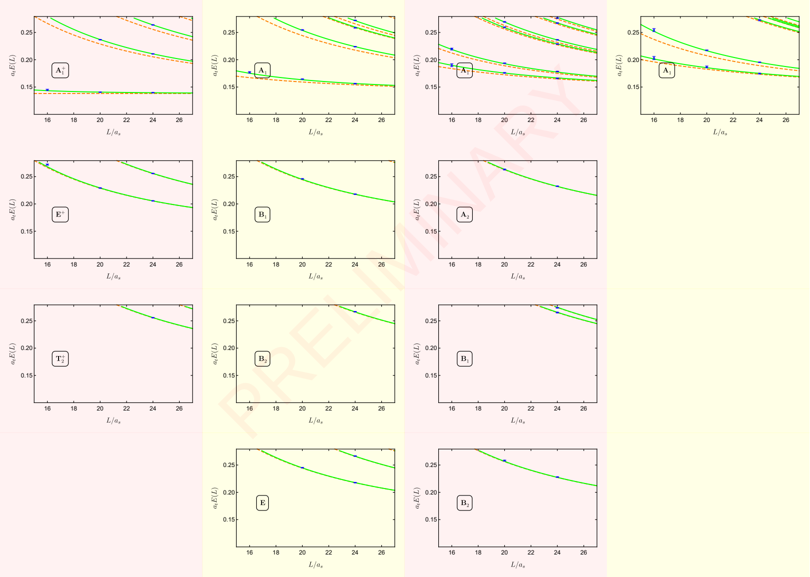
- 自由谱的简并度大大降低，$\mathbf{n}^2 \to (\mathbf{n}^2, \mathbf{n}\cdot\mathbf{d})$，$\mathbf{P} = \frac{2\pi}{L}\mathbf{d}$是总3动量
- 格点群变为O_h的小群(与$\mathbf{d}$有关)
- 质量是否相同会影响简并度与对称性
- 分波展开时取z方向为$\hat{\mathbf{d}}$而不是Lattice方向是更方便的
  - 此时不同l但相同m的态是相同的态
  - 直接使用$O(2)$作为无穷体积下的对称群(不等质量时是$SO(2)$)
  - 虽然简并壳变得非常多，但很多壳具有相同的P矩阵

例子：运动系下的$\pi\pi$散射(矩阵维数)

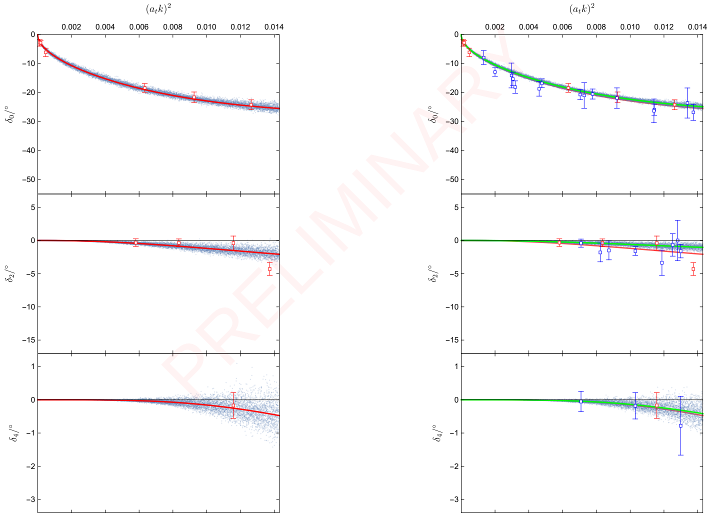
Frame: $\mathbf{d}$	Γ	$N_{\text{cut}}=100$	$N_{\text{cut}}=600$
Rest: (0,0,0)	$\mathbf{A}_1^+,\mathbf{E}^+,\mathbf{T}_2^+$	129,145,144	923,965,963
Moving: (0,0,1)	$\mathbf{A}_1,\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\mathbf{E}$	308,234,214,448	4102,3158,3064,6222
Moving: (0,1,1)	$\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2$	558,420,433,417	7772,6516,6625,6518
Moving: (1,1,1)	$\mathbf{A}_1$	508	7129

- $N_{\text{cut}}=600$对应的矩阵维数是很大的
- 我们已经有一些方案来进一步约化矩阵维数
- 这个例子使用$N_{\text{cut}}=100$给出的结果足够好了($\Delta\chi^2<0.1$)

例子：运动系下的$\pi\pi$散射(体积相依谱)



例子：运动系下的$\pi\pi$散射(相移)



目录

Summary

- HEFT视角下的分波混合
- 定义P矩阵衡量分波混合程度
- 基于此可以约化Hamiltonian矩阵的维数
- 运动系下的HEFT

Outlook

- 研究不同m_π的体系，用HEFT做手征外推
- 研究有共振的体系，考察共振参数与共振组分(e.g. $\pi\pi-\rho$)
- 利用共振组分，研究共振的形状因子(e.g. Δ)

ACKNOWLEDGMENTS

Finite-volume energy levels taken from [PRD 86, 034031 (2012), Jozef J. Dudek et al.] were provided by the Hadron Spectrum Collaboration – no endorsement on their part of the analysis presented in the current paper should be assumed.

谢谢!