

# parton distribution function of $\Delta^+$ on the lattice

柴雅卉 李媛 夏世城

导师 刘川 冯旭

2019 年 10 月 11 日

# Parton model

- ▶ Feynman's parton model:

当粒子接近光速运动时，粒子可以被看作是由一些没有相互作用的部分子构成，部分子一般为夸克和胶子。

- ▶ Parton distribution function  $f(x)$ :

在粒子中找到携带动量分数为  $x$  的部分子的概率。

- ▶ 因子化:

$$\sigma = \int dx_a dx_b f_{a/A}(x_a) f_{b/B}(x_b) \hat{\sigma} \quad (1)$$

# PDF在光锥坐标下的表达

- ▶ PDF-parton distribution function

$$q(x, \mu^2) = \int \frac{d\xi^-}{4\pi} e^{-ixp^+\xi^-} \langle P | \bar{\psi}(\xi^-) \gamma^+ e^{-ig \int_0^{\xi^-} d\eta^- A^+(\eta^-)} \psi(0) | P \rangle \quad (2)$$

- ▶  $\xi^-$  为光锥坐标,  $\xi^- = \frac{\xi^0 - \xi^3}{\sqrt{2}}$
- ▶  $\langle P |$  是动量为  $P^\mu = (P^0, 0, 0, P^3)$  的强子态
- ▶  $\mu^2$  是重整化标度
- ▶  $A$  是基础表示的胶子场

# Lattice计算PDF的困难

- ▶ 由于光锥PDF含有时间，无法在格点上计算。
- ▶ Lattice可以计算PDF的moment  $a_n = \int_{-1}^1 dx x^{n-1} q(x)$ 。但是由于信号以及不同的moment之间混合的问题，格点上只能计算低阶的几个moment,无法获得PDF的全部信息。

# Quasi-PDF的提出

- ▶ 2013年，季向东提出了quasi-pdf<sup>1</sup>

$$\tilde{q}(x, \mu^2, P_z) = \int \frac{dz}{4\pi} e^{-izxP_z} \langle P | \bar{\psi}(z) \gamma^z e^{-ig \int_0^z dz' A^z(z')} \psi(0) | P \rangle \quad (3)$$

- ▶ quasi-pdf中的坐标z是类空的，因此可以在格点上直接进行计算。

---

<sup>1</sup>Xiangdong Ji. "Parton Physics on Euclidean Lattice". In: (2013). DOI: [10.1103/PhysRevLett.110.262002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.262002). eprint: [arXiv:1305.1539](https://arxiv.org/abs/1305.1539).

# Quasi-PDF与PDF的联系

- ▶ 在大动量下，quasi-pdf可以通过大动量有效理论（LaMET）<sup>2</sup>匹配到物理的pdf上去，即

$$q(x, \mu) = \int_{-1}^1 \frac{dy}{|y|} C\left(\frac{x}{y}, \frac{\mu}{P_z}\right) \tilde{q}(y, P_z, \mu) + O\left(\frac{M^2}{P_z^2}, \frac{\Lambda_{QCD}^2}{P_z^2}\right) \quad (4)$$

- ▶  $\tilde{q}(x, P_z, \mu)$ 为重整化的quasi-pdf， $q(y, \mu)$ 为物理的重整化的pdf。
- ▶ 匹配系数 $C$ 可由微扰计算<sup>3</sup>得到，目前使用的是一圈计算的结果。

---

<sup>2</sup>Xiangdong Ji. *Parton Physics from Large-Momentum Effective Field Theory*. 2014. eprint: [arXiv:1404.6680](https://arxiv.org/abs/1404.6680).

<sup>3</sup>Constantia Alexandrou et al. "Reconstruction of light-cone parton distribution functions from lattice QCD simulations at the physical point". In: (2018). DOI: [10.1103/PhysRevLett.121.112001](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.112001) eprint: [arXiv:1803.02685](https://arxiv.org/abs/1803.02685).

# 格点计算

► 步骤:

在格点上计算裸的矩阵元，经过重整化<sup>4</sup>与傅里叶变换，得到重整化的quasi-pdf，再经过matching、质量修正，得到pdf。

$$h_{\text{lat}}(z, P_z, \Lambda) = \frac{1}{2P_z} \left\langle P \left| \bar{\psi}(0) \gamma_z \left( \prod_n U_z(n\hat{z}) \right) \psi(z) \right| P \right\rangle \quad (5)$$

►  $h^{\text{bare}} \xrightarrow{\text{renormalization}} h^r \xrightarrow{\text{fourier transform}} \tilde{q}^r(x, \mu^2, P_z) \xrightarrow{\text{matching}} q(x, \mu^2) \xrightarrow{\text{target mass correction}} q_{\text{final}}(x, \mu^2)$

► 为提取裸的矩阵元，我们要在格点上计算两点 and 三点函数

$$h^{\text{bare}} \stackrel{0 \ll \tau \ll t}{\sim} \frac{C^{3\text{pt}}(t_{\text{sink}}, t, 0; \vec{P})}{C^{2\text{pt}}(t_{\text{sink}}, 0; \vec{P})} \quad (6)$$

<sup>4</sup>Constantia Alexandrou et al. "Systematic uncertainties in parton distribution functions from lattice QCD simulations at the physical point". In: (2019). DOI: 10.1103/PhysRevD.99.114504. eprint: arXiv:1902.00587.

# $\Delta$ 粒子的性质

- ▶ 我们计算的是 $\Delta^+$ 粒子的PDF。 $\Delta$ 粒子是重子十重态，自旋和同位旋都是 $\frac{3}{2}$ ，因此是同位旋四重态。质量为1232MeV,主要衰变末态为 $\pi N$
- ▶ 在格点上我们可以构造如下算符来产生 $\Delta^+$ 重子的态

$$\mathcal{J}_{\sigma\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon^{abc} \left[ 2 \left( u^{aT}(x) C \gamma_{\sigma} d^b(x) \right) u_{\alpha}^c(x) + \left( u^{aT}(x) C \gamma_{\sigma} u^b(x) \right) d_{\alpha}^c(x) \right] \quad (7)$$

- ▶ 该算符会产生自旋为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{3}{2}$ 的态，但是自旋 $\frac{1}{2}$ 的态能量比较高，贡献被压低。



# 关联函数的构造

- ▶ 两点函数和三点函数分别为:

$$C_{\sigma\rho}^{2\text{pt}}(\mathcal{P}, \mathbf{P}; t_s, 0) = \mathcal{P}_{\alpha\beta} \sum_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} \langle 0 | \mathcal{I}_{\sigma\alpha}(\mathbf{x}, t_s) \overline{\mathcal{I}}_{\rho\beta}(\mathbf{0}, 0) | 0 \rangle \quad (8)$$

$$C_{\sigma_0\rho}^{3\text{pt}}(\mathcal{P}, \mathbf{P}; t_s, \tau, 0) = \tilde{\mathcal{P}}_{\alpha\beta} \sum_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} e^{-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{x}} \langle 0 | \mathcal{I}_{\sigma\alpha}(\mathbf{x}, t_s) \mathcal{O}(\mathbf{y}, \tau; z) \overline{\mathcal{I}}_{\rho\beta}(\mathbf{0}, 0) | 0 \rangle \quad (9)$$

- ▶ 其中:

$$\mathcal{O}(\mathbf{y}, \tau; z) = \overline{\psi}(\mathbf{y}, \tau) \gamma^0 W_z(\mathbf{y}, \mathbf{y} + z) \psi(\mathbf{y} + \mathbf{z}, \tau) \quad (10)$$

$$W_j(\mathbf{y}, \mathbf{y} + z) = U_j(\mathbf{y}) U_j(\mathbf{y} + \hat{e}_j) \cdots U_j(\mathbf{y} + (z-1)\hat{e}_j) \quad (11)$$

# 三点关联函数

- ▶ 选取不同的Lorentz指标 $\sigma$ ,  $\rho$ ,都可以得到结果, 只是系数以及在格点上的信号有可能不同。
- ▶ 目前, 我们采用的投影算符为 $\frac{1}{4}(1 + \gamma^0)$ , 对 $\sigma$ ,  $\rho$ 的空间分量进行对角求和<sup>5</sup>

$$h(\mathbf{P}, z) \stackrel{\tau, t_s \gg 1}{=} \frac{\sum_{\sigma=1}^3 C_{\sigma 0 \sigma}^{3pt}(\tilde{\mathcal{P}}, \mathbf{P}; t_s, \tau, 0)}{\sum_{\sigma=1}^3 C_{\sigma \sigma}^{2pt}(\mathcal{P}, \mathbf{P}; t_s, 0)} \quad (12)$$

<sup>5</sup>C. Alexandrou et al. "Determination of the  $y(1232)$  axial and pseudoscalar form factors from lattice QCD".

# 三点关联函数

- ▶ 为了消除非连通图的影响，我们计算了  $\tilde{q}_u - \tilde{q}_d$

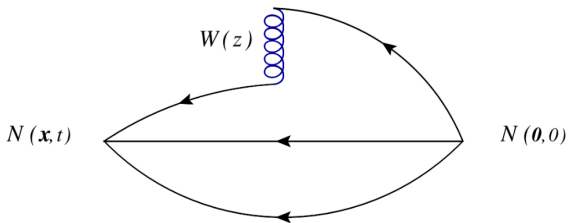
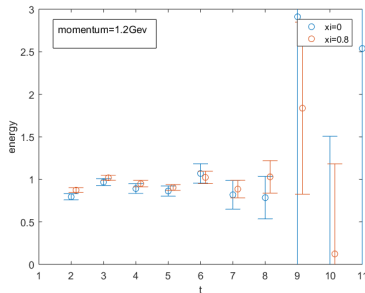
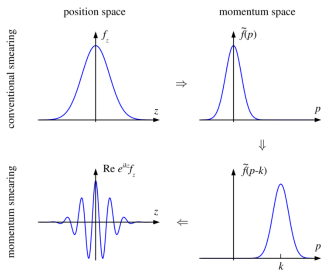


Figure: 三点函数的连通图

# momentum smearing

- 由于quasi-pdf需要将重子boost到一个较高的动量上，这会导致格点上关联函数信号的衰减，而动量涂摩<sup>6</sup>可以改善这个问题。

$$S_{\text{mom}}\psi(x) = \frac{1}{1 + 6\alpha} \left( \psi(x) + \alpha \sum_j U_j(x) e^{-i\xi\vec{P}\cdot\vec{e}_j} \psi(x + \vec{e}_j) \right) \quad (13)$$



<sup>6</sup>Gunnar S. Bali et al. "Novel quark smearing for hadrons with high momenta in lattice QCD". In: (2016). DOI:

# 组态及统计量

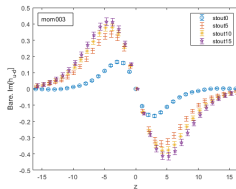
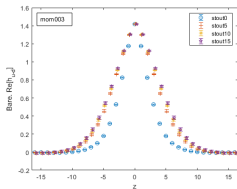
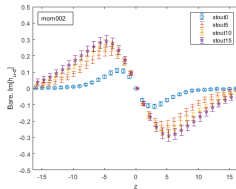
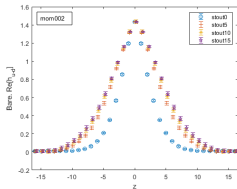
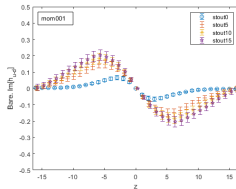
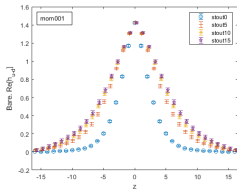
$\beta = 1.726, c_{SW} = 1.74, a = 0.096\text{fm}$	
$32^3 \times 64, L \approx 3.1\text{fm}$	$a\mu = 0.003$
	$m_\pi L = 3.95$
	$m_\pi = 0.255\text{GeV}$
	$m_{\Delta^+} = 1.39(5)\text{GeV}$
	$m_N = 1.08(2)\text{GeV}$

Table: Parameters of the ensemble used in this work.

$P_3$	$\frac{2\pi}{L} \approx 0.40\text{GeV}$	$\frac{4\pi}{L} \approx 0.81\text{GeV}$	$\frac{6\pi}{L} \approx 1.21\text{GeV}$
$N_{conf}$	151	461	474
$N_{meas}$	906	8472	42660

Table: The statistics in our calculation

# Results: Bare matrix elements



# Bare matrix elements

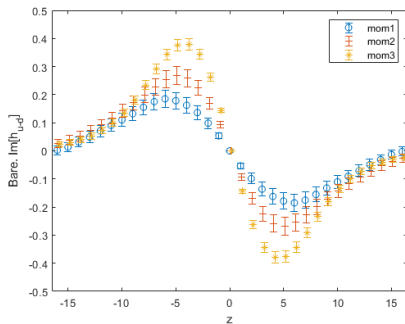
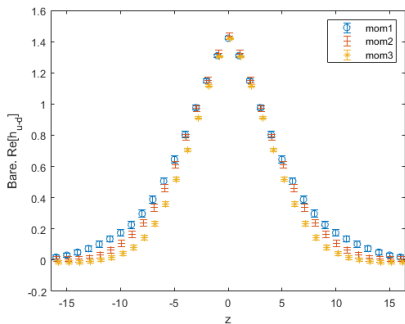


Figure: stout=10下不同动量裸的矩阵元的对比图

# Renormalization Factor

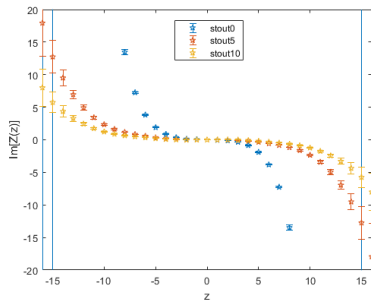
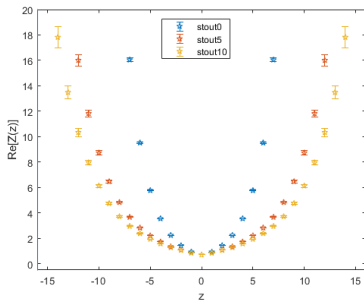
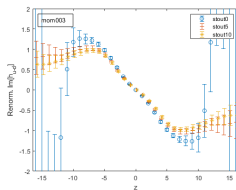
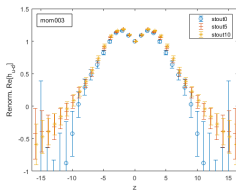
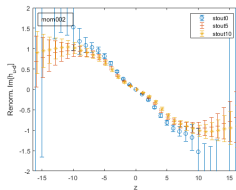
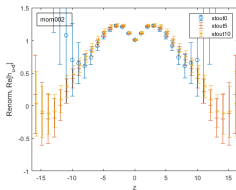
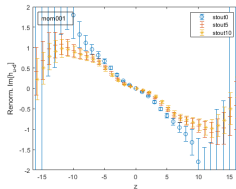
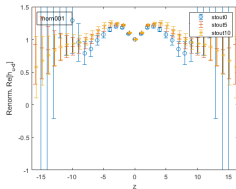


Figure: 不同stout参数下重整化因子的对比图



# Renormalized matrix elements



# Renormalized matrix elements

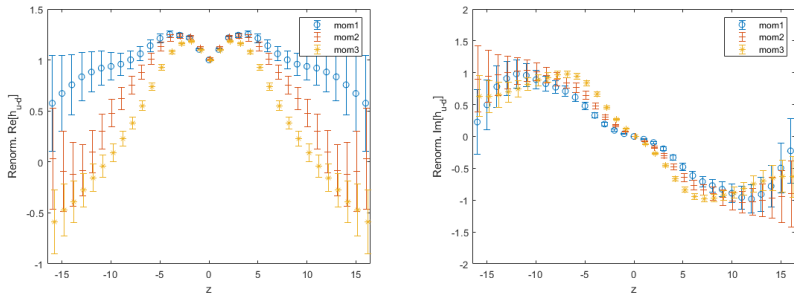


Figure: stout=10下不同动量重整化矩阵元的对比图

# Quasi-PDF与PDF

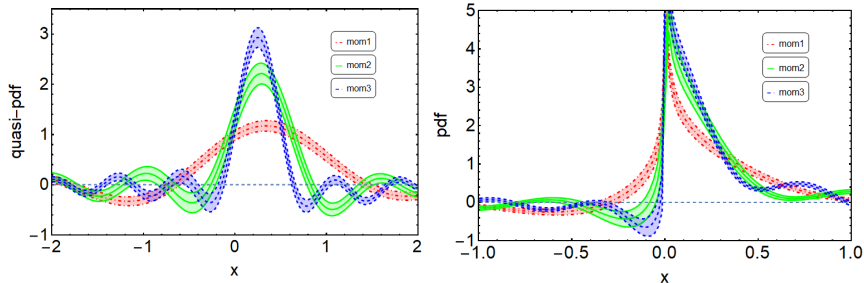


Figure: 左图为动量分别是0.40,0.81,1.21GeV下的quasi-PDF图，右图  
为做了matching后的PDF图

# 质量修正<sup>7</sup>

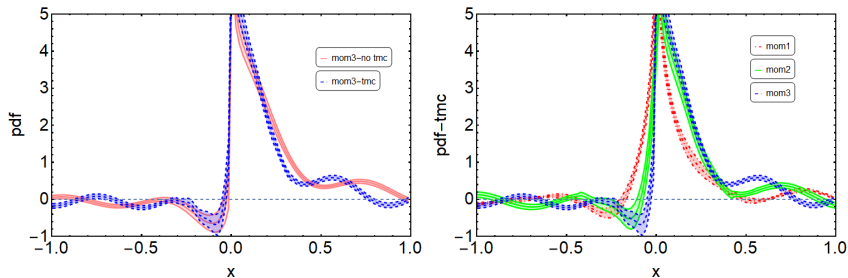


Figure: 左图为动量1.21GeV下的PDF及做了质量修正的对比图；右图  
为0.40,0.81,1.21GeV下做了质量修正后的PDF图

<sup>7</sup> Jiunn-Wei Chen et al. "Nucleon Helicity and Transversity Parton Distributions from Lattice QCD". In: (2016).

# Truncation of the Fourier Transform

- ▶ 原则上，傅里叶积分需要从负无穷积到正无穷，而格点提供的是有限离散的 $z$ 。我们需要去决定积分的上限 $z_{max}$ 。理想地，应该选取矩阵元的实部和虚部都衰减到0时的 $z$ 。

$$\tilde{q}(x, P_z, \Lambda) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz P_z}{2\pi} e^{ixz P_z} h_{\text{lat}} \quad (14)$$

$$\text{Re}[h^{\text{ren}}] = \text{Re}[Z] \text{Re}[h^{\text{bare}}] - \text{Im}[Z] \text{Im}[h^{\text{bare}}] \quad (15)$$

$$\text{Im}[h^{\text{ren}}] = \text{Re}[Z] \text{Im}[h^{\text{bare}}] + \text{Im}[Z] \text{Re}[h^{\text{bare}}] \quad (16)$$

# 不同 $z$ 截断下的PDF及质量修正

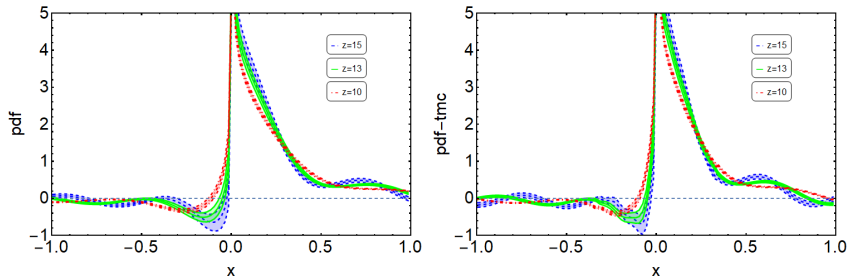


Figure: 左图为动量 $1.21\text{GeV}$ 下不同 $z$ 截断的PDF图，右图为做了质量修正后的PDF图

# 总结与展望

▶ 总结:

我们首次利用格点计算对 $\Delta^+$ 的PDF进行了探究,  
在 $m_\pi = 255 MeV$ 的组态上计算了动量分别为0.40, 0.81,  
1.21 GeV的情形

▶ 展望:

探究更高动量下的PDF  
分析激发态的影响  
分析有限体积效应

谢谢大家！