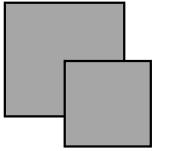




中国科学院高能物理研究所
INSTITUTE OF HIGH ENERGY PHYSICS



Four-lepton decay of vector quarkonia

Zhewen Mo (莫哲文)

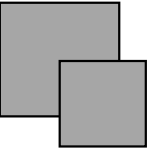
IHEP, CAS

In collaboration with Wen Chen (陈文), Yu Jia (贾宇),
Jichen Pan (潘济陈), Xiaonu Xiong (熊小努)

arXiv:2009.12363



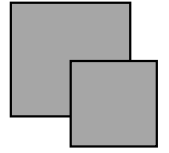
目录



- 研究动机
- NRQCD因子化简介
- 结果展示
- 总结



研究动机



- 矢量 (1^{--}) 夸克偶素衰变到两轻子是理论和实验上研究得非常清楚的过程
- 其分支比不敏感于轻子质量

J/ψ(1S)

$$J^G(J^{PC}) = 0^-(1^{--})$$

Mass $m = 3096.900 \pm 0.006$ MeV
 Full width $\Gamma = 92.9 \pm 2.8$ keV ($S = 1.1$)
 $\Gamma_{ee} = 5.53 \pm 0.10$ keV
 $\Gamma_{ee} < 5.4$ eV, CL = 90%

J/ψ(1S) DECAY MODES	Fraction (Γ_i/Γ)	Scale factor/ Confidence level (MeV/c)	p
hadrons	(87.7 ± 0.5) %	—	—
virtual $\gamma \rightarrow$ hadrons	(13.50 ± 0.30) %	—	—
ggg	(64.1 ± 1.0) %	—	—
γgg	(8.8 ± 1.1) %	—	—
e^+e^-	(5.971 ± 0.032) %	1548	—
$e^+e^-\gamma$	[a] (8.8 ± 1.4) × 10 ⁻³	1548	—
$\mu^+\mu^-$	(5.961 ± 0.033) %	1545	—

τ(1S)

$$J^G(J^{PC}) = 0^-(1^{--})$$

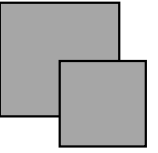
Mass $m = 9460.30 \pm 0.26$ MeV ($S = 3.3$)
 Full width $\Gamma = 54.02 \pm 1.25$ keV
 $\Gamma_{ee} = 1.340 \pm 0.018$ keV

τ(1S) DECAY MODES	Fraction (Γ_i/Γ)	Scale factor/ Confidence level (MeV/c)	p
$\tau^+\tau^-$	(2.60 ± 0.10) %	4384	—
e^+e^-	(2.38 ± 0.11) %	4730	—
$\mu^+\mu^-$	(2.48 ± 0.05) %	4729	—

P.A. Zyla et al. (PDG Group)



研究动机



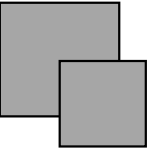
- 在理论上，矢量介子的两轻子衰变的短程系数已经算到 N^3LO ([Beneke, Kiyo, Marquard et al. \(2013\)](#))。

$$\Gamma(J/\psi \rightarrow \ell\ell) = \Gamma^{(0)} \left[1 - \frac{8}{3} \frac{\alpha_s}{\pi} - (44.55 - 0.41 n_f) \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^2 \right]^2 \\ + (-2091 + 120.66 n_f - 0.82 n_f^2) \left(\frac{\alpha_s}{\pi} \right)^3$$

- 迄今，BESIII实验积累了海量的 J/ψ 事例数 (10^{10})，Belle II 积累的 $Y(1S)$ 事例数 $> 10^8$ ([Jia, Zhou, Shen, Front.Phys. \(2020\), arXiv:2005.05892](#))，这意味着夸克偶素的一些稀有衰变已经能够被很好地探测到。



研究动机

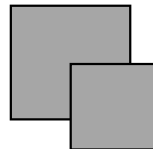


我们研究的矢量夸克偶素到四轻子的衰变，就是其中的一种稀有衰变。

- 其分支比相比于到两轻子的衰变有 α^2 压低和相空间压低。
- 这样的四轻子衰变为检验NRQCD因子化理论提供了新的场地。



描述重夸克偶素的NRQCD有效场论



重夸克偶素是一类最简单的强子，它由非相对论性的重夸克和反重夸克组成。目前公认最成功的处理夸克偶素的理论工具是现代的有效场论方法，称为非相对论量子色动力学（NRQCD）。

$$\mathcal{L}_{\text{NRQCD}} = \mathcal{L}_{\text{light}} + \mathcal{L}_{\text{heavy}} + \delta\mathcal{L}.$$

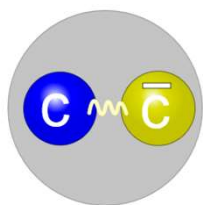
Charmonia: $v^2/c^2 \sim 0.3$

Bottomonia: $v^2/c^2 \sim 0.1$

$$\mathcal{L}_{\text{light}} = -\frac{1}{2}\text{tr} G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} + \sum \bar{q} i\not{D}q,$$

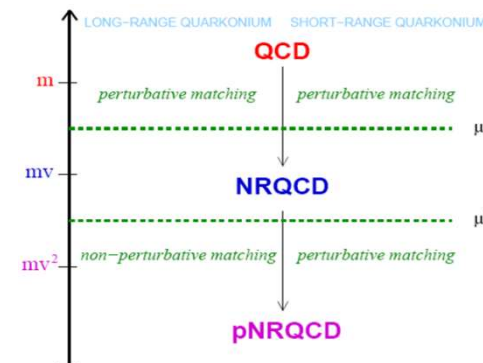
$$\mathcal{L}_{\text{heavy}} = \psi^\dagger \left(iD_t + \frac{\mathbf{D}^2}{2M} \right) \psi + \chi^\dagger \left(iD_t - \frac{\mathbf{D}^2}{2M} \right) \chi,$$

Caswell, Lepage (1986)



velocity counting rule

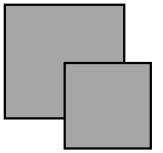
$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{\text{bilinear}} = & \frac{c_1}{8M^3} \left(\psi^\dagger (\mathbf{D}^2)^2 \psi - \chi^\dagger (\mathbf{D}^2)^2 \chi \right) \\ & + \frac{c_2}{8M^2} \left(\psi^\dagger (\mathbf{D} \cdot g\mathbf{E} - g\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \psi + \chi^\dagger (\mathbf{D} \cdot g\mathbf{E} - g\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \chi \right) \\ & + \frac{c_3}{8M^2} \left(\psi^\dagger (i\mathbf{D} \times g\mathbf{E} - g\mathbf{E} \times i\mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \psi + \chi^\dagger (i\mathbf{D} \times g\mathbf{E} - g\mathbf{E} \times i\mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi \right) \\ & + \frac{c_4}{2M} \left(\psi^\dagger (g\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \psi - \chi^\dagger (g\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \chi \right), \end{aligned}$$





NRQCD因子化

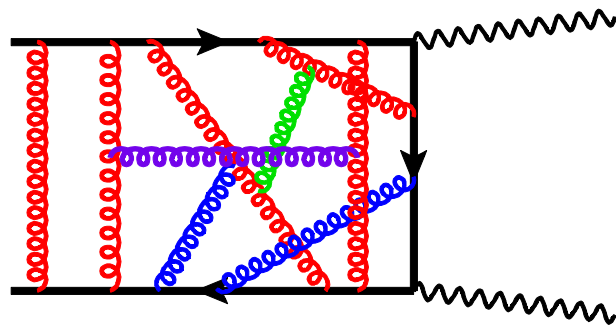
Bodwin, Braaten, Lepage (1995)



以夸克偶素的电磁衰变为例，其衰变宽度可以因子化成短程系数和长程NRQCD矩阵元的乘积。

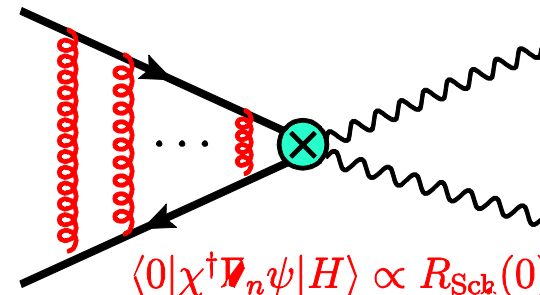
长程矩阵元可以近似为束缚态的零点波函数。

Quarkonium is a QCD bound state involving several distinct scales



$$\rightarrow \sum_n C_n(m) \times$$

*Short-distance coefficient
perturbatively calculable*



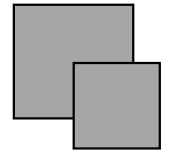
$$\langle 0 | \chi^\dagger \not{D}_n \psi | H \rangle \propto R_{\text{Sch}}(0)$$

wave function at the origin

nonperturbative yet universal



J/ψ 到两轻子和四轻子



为了方便计算，我们采用如下的替换技巧

$$u_c \bar{v}_{\bar{c}} \rightarrow \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} (\not{P} + 2m_c) \not{\epsilon} \times \left(\frac{1}{\sqrt{m_c}} R_{J/\psi}(0) \right) \otimes \frac{1_c}{\sqrt{N_c}},$$

以 J/ψ 为例，在 v 的领头阶， J/ψ 到两轻子的树图阶宽度为：

$$\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-) = \frac{e_c^2 \alpha^2}{m_c^2} |R_{J/\psi}(0)|^2$$

其中 $R_{J/\psi}(0)$ 是 J/ψ 径向零点波函数，NRQCD方法可以重复这个结果。

对于到四轻子的衰变，我们有

$$\Gamma(c\bar{c}({}^3S_1) \rightarrow 4l) = \frac{1}{4m_c} \frac{1}{3} \sum_{\text{polar}} \int d\Pi_4 |\mathcal{M}(c\bar{c}({}^3S_1) \rightarrow 4l)|^2$$

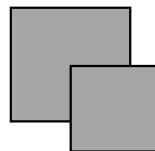
为了便于讨论，我们引入无量纲 R 比值

$$R(J/\psi \rightarrow 4l) \equiv \frac{\Gamma(J/\psi \rightarrow 4l)}{\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-)}.$$

非微扰因子在 R 中抵消掉了。



4体相空间参数化



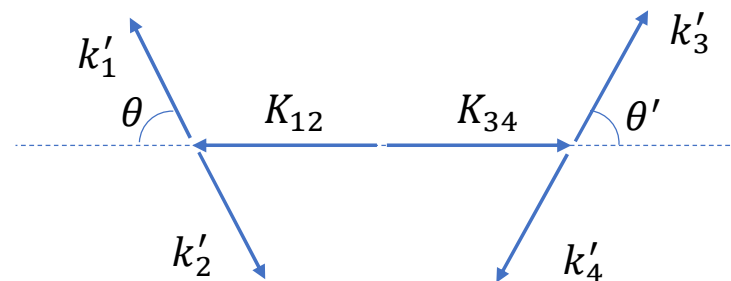
我们在文章的附录中给出了四体相空间的一种参数化方法

$$\int d\Pi_4 = \frac{1}{2^{12}\pi^6 m_c} \int dM_{12} dM_{34} d\cos\theta d\cos\theta' d\varphi |\mathbf{K}_{12}| \sqrt{(M_{12}^2 - 4m_e^2)(M_{34}^2 - 4m_\mu^2)}.$$

M_{12}, M_{34} 是两对轻子对的不变质量。

$$K_{12}^0 = K_{34}^0 = \sqrt{\mathbf{K}_{12}^2 + M_{34}^2}, \quad \mathbf{K}_{12} = -\mathbf{K}_{34} = (0, 0, |\mathbf{K}_{12}|),$$

$$k_1^\mu = L^\mu_\nu(K_{12})k_1^{\nu'}, \quad k_3^\mu = L^\mu_\nu(K_{34})k_3^{\nu'},$$



$$k_1^0 = \frac{M_{12}}{2}, \quad k_1' = \frac{1}{2} \sqrt{M_{12}^2 - 4m_e^2} (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta),$$

$$k_3^0 = \frac{M_{34}}{2}, \quad k_3' = \frac{1}{2} \sqrt{M_{34}^2 - 4m_\mu^2} (0, \sin\theta', \cos\theta').$$

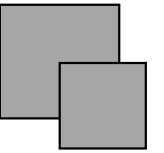
$$L^i_j(K_{ab}) = \delta^i_j + \frac{1}{M_{ab}(M_{ab} + K_{ab}^0)} K_{ab}^i K_{ab,j}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

$$L^i_0(K_{ab}) = L^0_i = \frac{1}{M_{ab}} K_{ab}^i,$$

$$L^0_0(K_{ab}) = \frac{K_{ab}^0}{M_{ab}}.$$



典型的费曼图



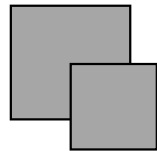
矢量重夸克偶素到四轻子衰变的典型的费曼图如下

$$R = \frac{\left| \Sigma \right|}{\left| \right|}^2$$

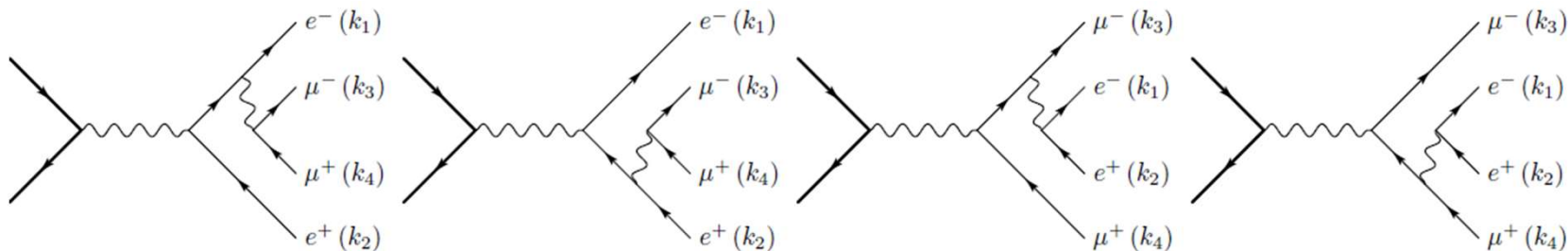
高阶QCD辐射修正和相对论修正只在于图的左半部分，对 $c\bar{c} \rightarrow 4l$ 与 $q\bar{q} \rightarrow 2l$ 的振幅产生相同的贡献，对它们的比值 R 没有影响。



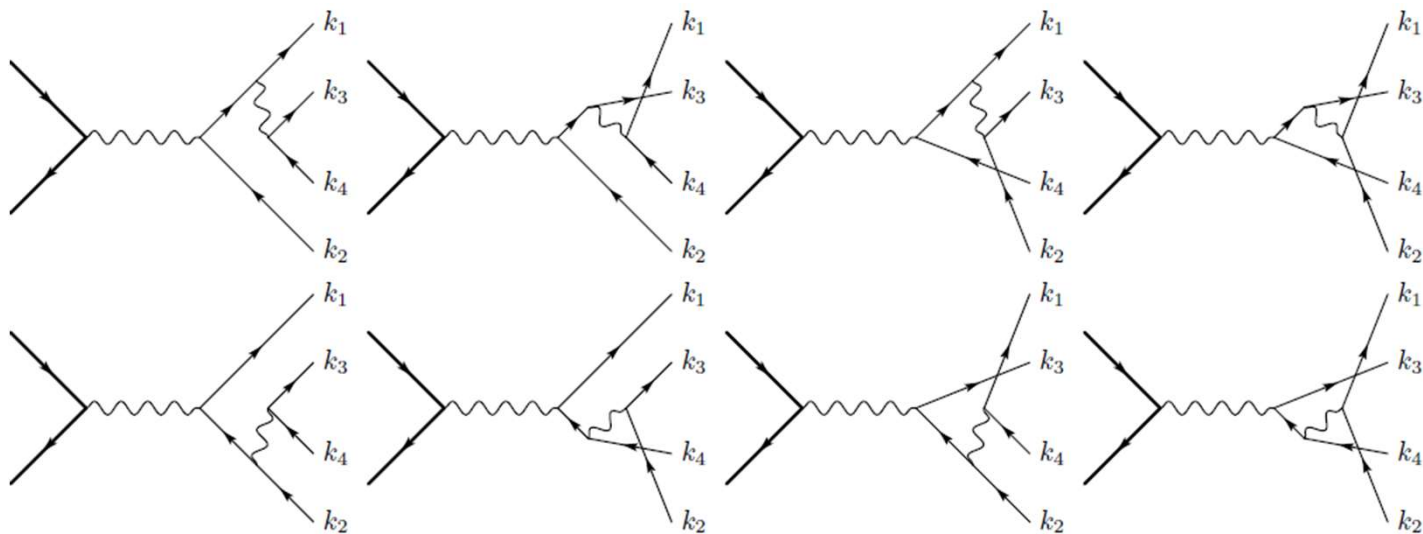
J/ψ 到同味四轻子和不同味四轻子



$$c\bar{c} \rightarrow l^+l^-l'^+l'^-$$



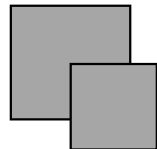
$$c\bar{c} \rightarrow l^+l^-l^+l^-$$



轻子质量取0会导致共线发散，这和两轻子衰变是完全不同的。



比值R的计算结果



$$R(J/\psi \rightarrow 4l) \equiv \frac{\Gamma(J/\psi \rightarrow 4l)}{\Gamma(J/\psi \rightarrow e^+e^-)}.$$

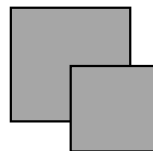
使用前面提到的四体相空间参数化方案，通过蒙特卡罗积分，我们对 J/ψ 和 $\Upsilon(1S)$ 数值计算了 R ：

	$R(\times 10^{-4})$		$\mathcal{B}(\times 10^{-5})$	
	J/ψ	Υ	J/ψ	Υ
$e^+e^-\mu^+\mu^-$	6.2 ± 0.5	11.5 ± 0.4	3.7 ± 0.3	2.7 ± 0.2
$e^+e^-\tau^+\tau^-$	/	3.7 ± 0.3	/	$0.89^{+0.12}_{-0.11}$
$\mu^+\mu^-\tau^+\tau^-$	/	0.25 ± 0.04	/	$0.059^{+0.012}_{-0.011}$
$2(e^+e^-)$	8.8 ± 0.5	13.6 ± 0.3	5.2 ± 0.3	3.2 ± 0.2
$2(\mu^+\mu^-)$	0.16 ± 0.03	0.64 ± 0.04	0.09 ± 0.02	0.15 ± 0.02
$2(\tau^+\tau^-)$	/	$(1.7^{+2.0}_{-1.1})\times 10^{-4}$	/	$(4.0^{+5.0}_{-2.7})\times 10^{-5}$

TABLE I. The R ratio and the affiliated branching fraction for ${}^3S_1 \rightarrow 4l$. The uncertainties are estimated by setting $m_c = 1.5 \pm 0.2\text{GeV}$ and $m_b = 4.7 \pm 0.3\text{GeV}$

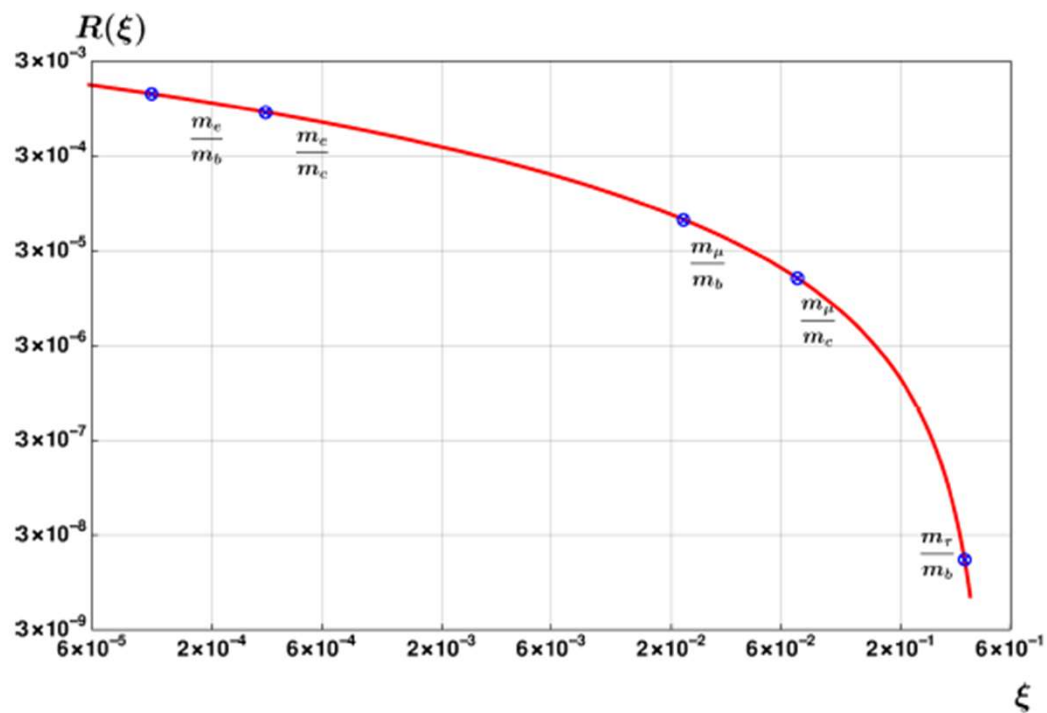


比值 R 随轻子夸克质量比 ξ 的变化



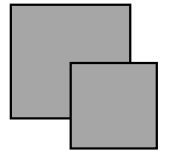
$$\xi = \frac{m_l}{m_Q}, \quad Q = c, b$$

考虑重夸克到4个同味轻子的衰变。我们发现， $R(\xi)$ 在 $\xi \rightarrow 0$ 时发散：



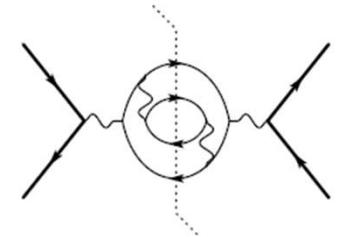


发散程度的估计



- 方法一：光学定理+逆么正方法 (**Ridder, Gehrmann, Heinrich, Nucl.Phys.B, 2004**)
处理0质量轻子

$$R(J/\psi \rightarrow 4l) = \Gamma^{-3}(1 - \epsilon) \left(\frac{m_c^2}{\pi\mu^2} \right)^{-3\epsilon} \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^2 \left[-\frac{1}{3\epsilon^3} - \frac{17}{9\epsilon^2} + \frac{1}{\epsilon} \left(-2\zeta(3) + \frac{10\pi^2}{9} - \frac{1405}{108} \right) + \frac{103\zeta(3)}{3} + \frac{367\pi^2}{54} - \frac{8\pi^4}{45} - \frac{60835}{648} \right], \quad (6)$$

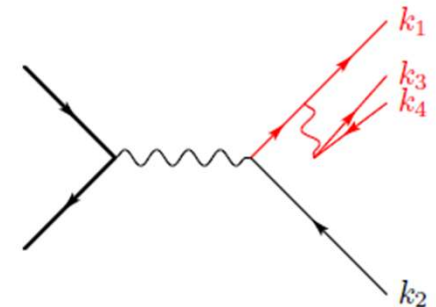


$$\frac{1}{D_i} = 2\pi i \delta^+(p_i^2) = \left(\frac{1}{p_i^2 + i0} - \frac{1}{p_i^2 - i0} \right) \theta(p_i^0)$$

$1/\epsilon^3$ 对应 $\log m_Q^2/m_l^2$ 的三次方。

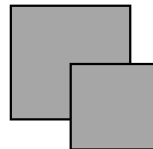
- 方法二：Splitting kernel 方法 (**Catani, Grazzini, Nucl.Phys.B, 2000**)
重现了上一种方法领头阶的 $1/\epsilon^3$ 的红外pole。
领头阶的3次方发散可以解释为三轻子共线导致的双重共线发散外加其中一对轻子的软发散。

我们得出结论 $R(\xi)$ 在领头阶以 $\log^3 \frac{m_Q^2}{m_l^2}$ 的幂次发散。

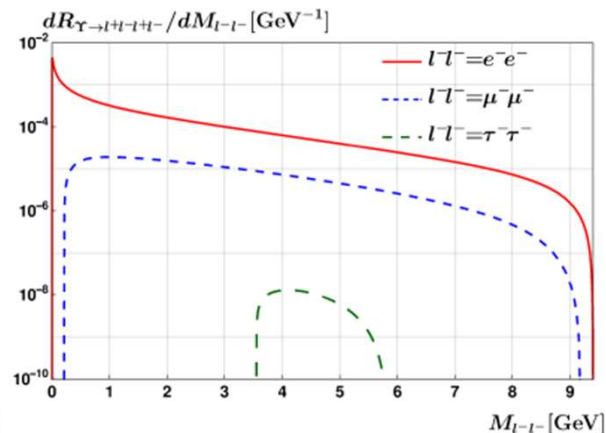
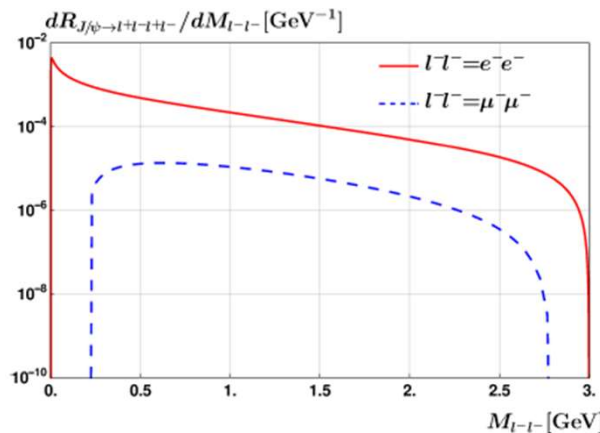




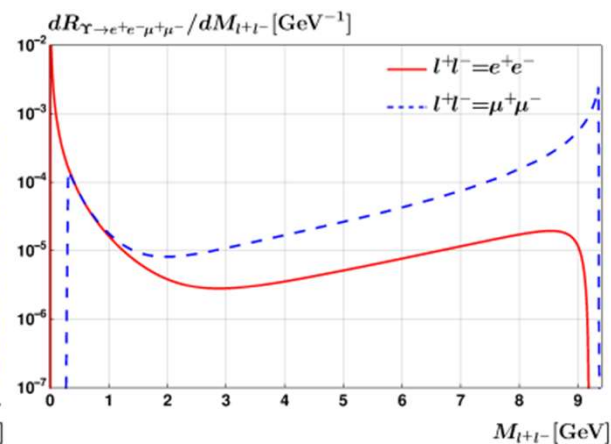
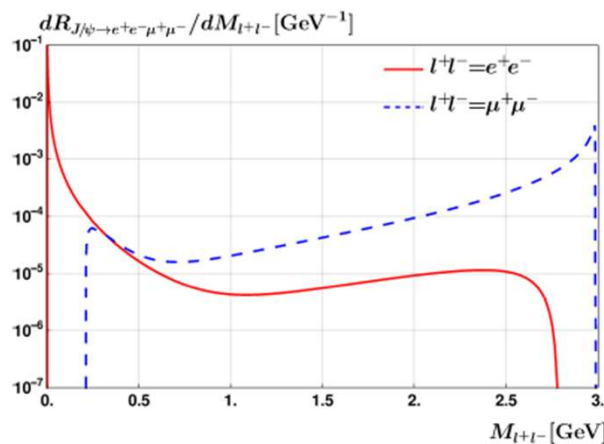
R 关于轻子对的不变质量谱



$$J/\psi (\Upsilon) \rightarrow l^+ l^- l^+ l^-$$

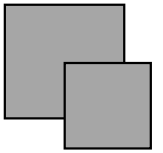


$$J/\psi (\Upsilon) \rightarrow e^+ e^- \mu^+ \mu^-$$

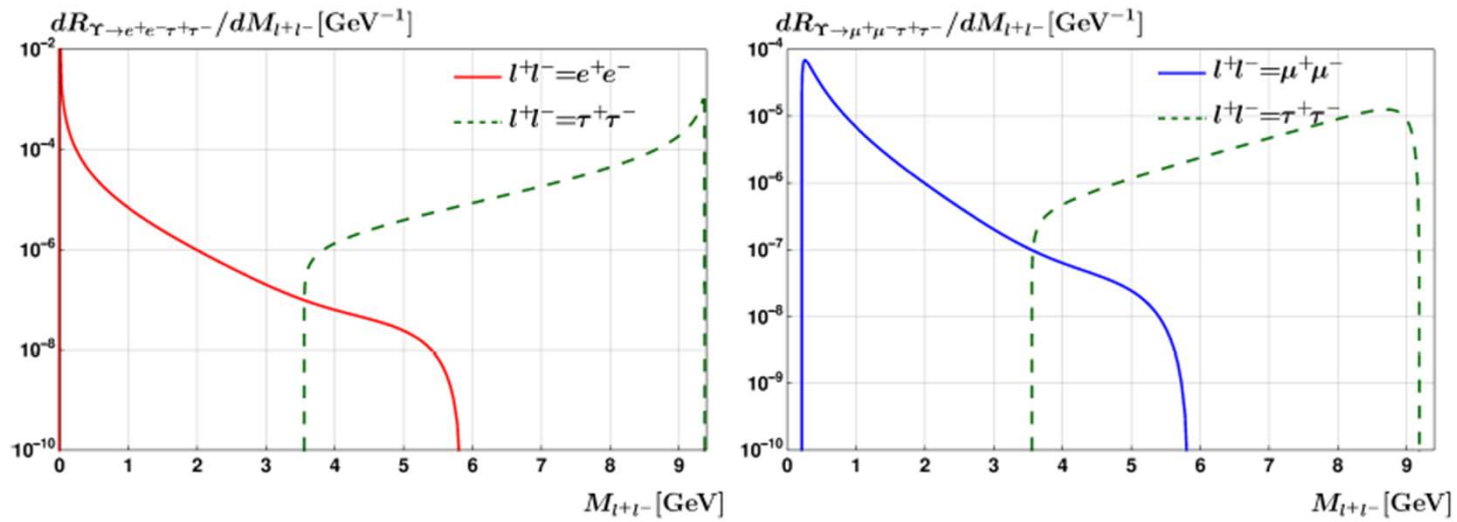




不变质量谱 (续)

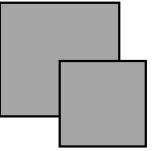


$$\Upsilon \rightarrow l^+ l^- \tau^+ \tau^-$$





总结



- 我们计算了矢量夸克偶素衰变到四轻子与衰变到两轻子宽度的比值 R 。
- 矢量夸克偶素衰变到不同味的四轻子对应的宽度非常不同（与之相比， $J/\psi(\Upsilon) \rightarrow l^+l^-$ 不敏感于轻子味道），我们研究了 $m_l \rightarrow 0$ 时衰变宽度的共线增强行为，给出了领头阶的发散行为是 $\log^3 \frac{m_Q^2}{m_l^2}$ 。
- 我们预言 $J/\psi(\Upsilon)$ 到 $2(e^+e^-)$ 和 $e^+e^-\mu^+\mu^-$ 的衰变很有希望能在BESIII和Belle II上观测到。
- 预言了 R 的不变质量谱，可用于与实验做更为细致的比较。
- 我们对预言有信心，因为 R 的值不会因为相对论修正和QCD修正而改变。