格点量子色动力学基础

冯旭

北京大学
PEKING UNIVERSITY

对撞机唯象学暑期学校 @ 青岛，2021年7月14日-15日

课程目标

让大家了解量子色动力学(QCD)的非微扰定义

- 大部分场论课程的学习都是从微扰论出发的，本课程介绍QCD的非微扰定义
- 即使不用格点 QCD 去做数值模拟和计算，了解格点 QCD 也能帮助大家更好地理解 QCD

教材

- Quantum Chromodynamics on the Lattice: An Introductory Presentation, Gattringer & Lang
- Lattice Methods for Quantum Chrodynamics, Thomas DeGrand & Carleton DeTar
- 格点量子色动力学力学导论, 刘川

Lecture note

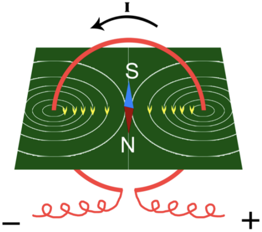
- PKU Summer School, 2019 - Frontiers in Lattice QCD

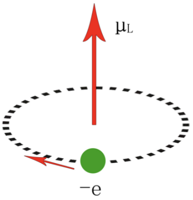
  https://indico.ihep.ac.cn/event/9715/
- INT Summer School, 2012 - Lattice QCD for Nuclear Physics

  http://www.int.washington.edu/PROGRAMS/12-2c/Lectures.html
- Les Houches Summer School, 2009 - Mordern Perspectives in Lattice QCD

  相关Lecture note已经结集出版

课程的引入-从缪子反常磁矩说开去





- 通电线圈与磁矩 - (安培实验，1820)

$$\mu = I \cdot S$$

- 环形电流

$$I = \frac{e}{T}, \quad T = \frac{2\pi R}{v}, \quad S = \pi R^2 \quad \rightarrow \quad \mu = \frac{1}{2} Rev$$

- 角动量

$$L = Rmv$$

- 磁矩 μ 与角动量 L 之间的关系

$$\mu = g\frac{e}{2m}L$$

引入无量纲的系数 $g = 1$，被称为朗德因子(Landé g factor)

狄拉克理论中的朗德因子

狄拉克方程

$$(p^\mu\gamma_\mu - eA^\mu\gamma_\mu - m)u = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} E-m-e\phi & -\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}-e\mathbf{A}) \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}-e\mathbf{A}) & -E-m+e\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_b \\ u_s \end{pmatrix} = 0$$

取非相对论极限

$$(E-m)u_b = \left\{\frac{1}{E+m-e\phi}[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}-e\mathbf{A})]^2 + e\phi\right\}u_b$$

$E-m$ 是非相对论性能量 $\rightarrow$ 非相对论性哈密顿量

$$H_{nr} = \frac{1}{2m}[\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{p}-e\mathbf{A})]^2 + e\phi$$

利用等式 $[\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}][[\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}] = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + i\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，可以得到

$$\begin{aligned} H_{nr} &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p}-e\mathbf{A})^2 + \frac{i}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\underbrace{[(\mathbf{p}-e\mathbf{A})\times(\mathbf{p}-e\mathbf{A})]}_{ie\mathbf{B}} + e\phi \\ &= \frac{1}{2m}(\mathbf{p}-e\mathbf{A})^2 - g_e\frac{e}{2m}\mathbf{s}\cdot\mathbf{B} + e\phi \end{aligned}$$

这里 $g_e = 2$, $\quad \mathbf{s} = \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$

- 对于一个电子，质量为m，电荷为e，自旋为s，它的磁矩μ为

$$\mu = g_e \frac{e}{2m} s$$

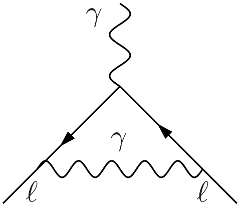
狄拉克理论预言朗德因子 $g = 2$

- 量子涨落导致反常磁矩

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} \neq 0$$

其中最大贡献来源于量子电动力学(QED)

$$a_e \approx \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.001\,16$$



电子反常磁矩是奠定量子电动力学(QED)的基石

实验测量 (CODATA 2018)

$$a_e^{\rm exp} = 1\,159\,652\,181.28(18) \times 10^{-12}$$

标准模型理论预言 - including QED, $O(\alpha^5)$ (Aoyama, Kinoshita, Nio, 2018)

$$a_e^{\rm th} = 1\,159\,652\,181.61(23) \times 10^{-12}$$

实验和理论符合到10位有效数字，成功地验证了QED

朝永振一郎、施温格 & 费曼因建立量子电动力学获1965年诺贝尔奖

三代轻子的同与不同

e vs μ vs τ: 标准模型中，除了质量不一样，其他性质都一样

$$m_\tau : m_\mu : m_e \approx 3500 : 200 : 1$$

缪子不稳定，实验测量电子反常磁矩的精度远好于缪子

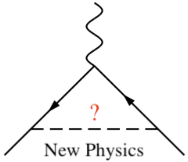
那为什么对缪子反常磁矩感兴趣?

e vs μ vs τ: 标准模型中，除了质量不一样，其他性质都一样

$$m_\tau : m_\mu : m_e \approx 3500 : 200 : 1$$

缪子不稳定，实验测量电子反常磁矩的精度远好于缪子

那为什么对缪子反常磁矩感兴趣?



- 在最低阶，用一个能量标度为Λ_{NP}的很重的虚粒子来表征新物理对轻子反常磁矩的贡献

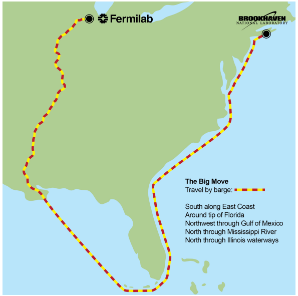
$$a_\ell^{NP} \propto \frac{m_\ell^2}{\Lambda_{NP}^2} \quad \rightarrow \quad \frac{a_\mu^{NP}}{a_e^{NP}} \propto \frac{m_\mu^2}{m_e^2} \approx 4 \times 10^4$$

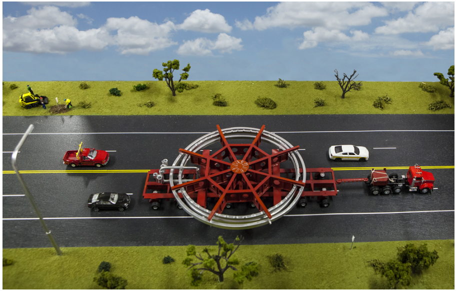
- 尽管与a_e相比，a_μ的实验测量精度差了800倍 $\rightarrow$ 但是a_μ 对新物理的敏感性依旧高出了50倍
- τ 虽然对新物理最为敏感，但实验太困难了，寿命比缪子短了 7×10^6 倍

BNL实验测量与标准模型理论预言偏差3.7个标准差

BNL Exp. [0.54 ppm]	$a_\mu^{\rm exp} = 116592080(63) \times 10^{-11}$	Muon g-2, PRD 2006
SM Total [0.32 ppm]	$a_\mu^{\rm SM} = 116591810(43) \times 10^{-11}$	White paper 2020
Deviation [3.7 σ]	$a_\mu^{\rm exp} - a_\mu^{\rm SM} = 279(76) \times 10^{-11}$	

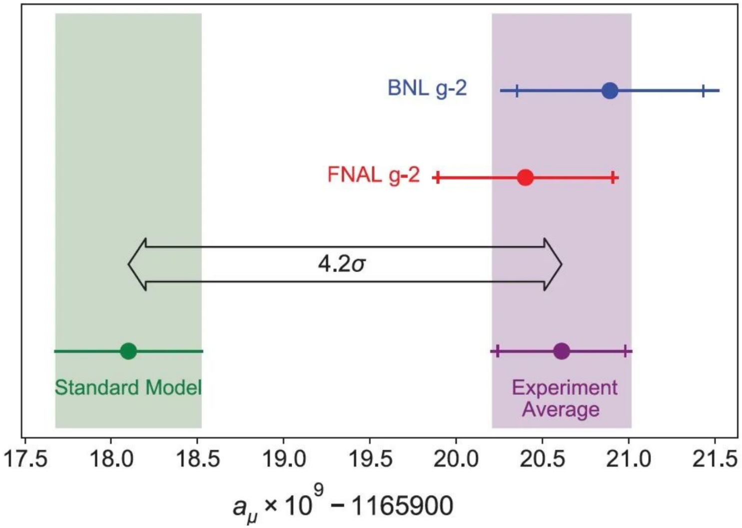
费米实验室新实验：主要装置为一个直径15米的超导磁铁环





从BNL转移到FNAL $\Rightarrow$ 把实验误差降低到BNL实验测量的1/4

实验上的进展：BNL 2006 → FNAL 2021

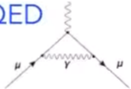


- FNAL实验只分析了最终采集数据量的很小一部分数据($< 6\%$)
- FNAL新实验结合BNL旧实验，实验-理论偏差从3.7变成4.2个标准差

Muon $g-2$：标准模型各部分贡献

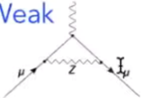
$$\boxed{a_\mu = a_\mu(\text{QED}) + a_\mu(\text{Weak}) + a_\mu(\text{Hadronic})}$$

QED



$+\ldots$ $\quad 116\,584\,718.9\,(1) \times 10^{-11}$ $\quad$ 0.001 ppm

Weak

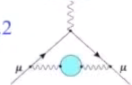


$+\ldots$ $\quad 153.6\,(1.0) \times 10^{-11}$ $\quad$ 0.01 ppm

Hadronic...

...Vacuum Polarization (HVP)

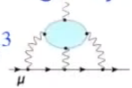
α^2



$+\ldots$ $\quad 6845\,(40) \times 10^{-11}$ [0.6%] $\quad$ 0.37 ppm

...Light-by-Light (HLbL)

α^3



$+\ldots$ $\quad 92\,(18) \times 10^{-11}$ [20%] $\quad$ 0.15 ppm

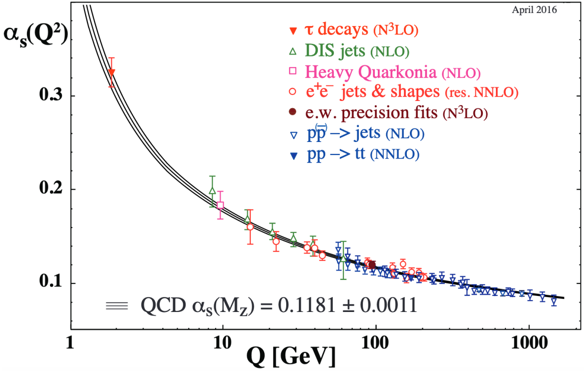
FNAL实验目标精度 0.14 ppm $\longrightarrow$ 强真空极化(HVP) 误差降到 0.2-0.3%

为什么HVP和HLbL的理论计算这么困难?

- 高能渐近自由与低能非微扰

$$\alpha_s(\mu) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\beta_0 \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2_{\rm QCD}}}, \quad \beta_0 = \left(\frac{11N_c - 2N_f}{3}\right)/16\pi^2$$

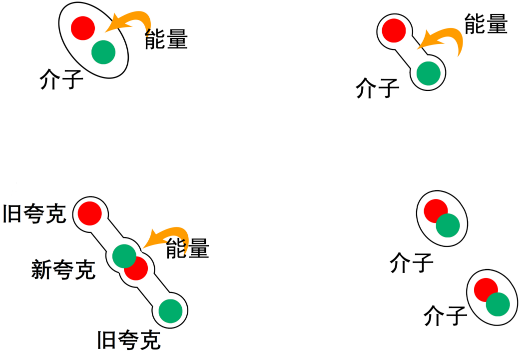
- 非微扰QCD能标$\Lambda_{\rm QCD} \sim 500$ MeV
- 高能区，$\mu \gg \Lambda_{\rm QCD}$，$\alpha_s(\mu) \to 0$
  $\Rightarrow$ 夸克和胶子渐近自由
- 低能区，$\mu \to \Lambda_{\rm QCD}$，$\alpha_s(\mu) \to \infty$
  $\Rightarrow$ 微扰论失效



需要从第一性原理出发进行非微扰计算

- 色禁闭

$$V(r) = A + \frac{B}{r} + \sigma r$$



夸克受到 QCD 相互作用的强力束缚，带单个色荷的夸克不可能从核子中单个地分离出来

给研究强子结构造成了极大的困难

QCD 的特殊性质(三)

- 手征对称性自发破缺

$$\langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L \rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \quad SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A \to SU(N_f)_V$$

真空夸克凝聚 $\Rightarrow$ 手征对称性自发破缺 $\Rightarrow$ 粒子物理世界形形色色的强子谱

  - Goldstone 定理指出，有 $N_f^2 - 1$ 个无质量 Goldstone 玻色子，比如 pion、kaon
  - 矢量介子和轴矢介子的能谱表现出很大的差异

$$m_\rho = 0.770 \text{ GeV}, \quad m_{a_1} = 1.26 \text{ GeV}$$

探索 QCD 在低能区的性质、QCD 的真空结构 $\Rightarrow$ 理解强子的质量来源和相互作用行为

格点 QCD 的应运而生

目标

- 非微扰地处理低能强相互作用，提供精确的低能QCD输入
- 研究强子谱学和结构信息
- 研究色禁闭的机制以及手征对称性自发破缺、QCD真空结构
- 极端条件下，有限温度、有限密度下的物态方程
- $\cdots$

只要在一个物理过程里面，初态和末态是作为强子态出现

$\Rightarrow$ 夸克被禁闭在强子内部，计算相关强子矩阵元就需要非微扰的处理方式

1974年诺贝尔奖获得者 K. G. Wilson 开创格点 QCD

- Wilson 的开山之作：Confinement of quarks, PRD 10 (1974) 2445, 引用 > 5500
  - $\alpha_s \to \infty$，解析计算得到夸克间的势能随距离增加线性增长

K. G. Wilson

PHYSICAL REVIEW D VOLUME 10, NUMBER 8 15 OCTOBER 1974

Confinement of quarks*

Kenneth G. Wilson
Laboratory of Nuclear Studies, Cornell University, Ithaca, New York 14850
(Received 12 June 1974)

A mechanism for total confinement of quarks, similar to that of Schwinger, is defined which requires the existence of Abelian or non-Abelian gauge fields. It is shown how to quantize a gauge field theory on a discrete lattice in Euclidean space-time, preserving exact gauge invariance and treating the gauge fields as angular variables (which makes a gauge-fixing term unnecessary). The lattice gauge theory has a computable strong-coupling limit; in this limit the binding mechanism applies and there are no free quarks. There is unfortunately no Lorentz (or Euclidean) invariance in the strong-coupling limit. The strong-coupling expansion involves sums over all quark paths and sums over all surfaces (on the lattice) joining quark paths. This structure is reminiscent of relativistic string models of hadrons.

【作业:阅读 K. G. Wilson 这篇开创性的文章，了解格点非微扰正规化方案。】

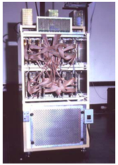
格点 QCD 的发展——50年历程

- 计算机上的第一个数值计算由 M. Creutz 在 1979 年实现
- QCD 超级计算机 1983 – 2011

Matrix Multiplier

1Mflops 1983

16-Node



256 Mflops 1985

64-Node

1.0 Gflops 1987

256-Node

16 Gflops 1989

QCDSP

600 Gflops 1998

QCDOC

20 Tflops 2005

LLNL Sequoia, IBM

20 Pflops 2011

- 未来几年内，QCD 计算机进入E级超算时代，每秒进行10^{18}浮点运算

格点QCD的发展主要依靠

- 超算的发展
- 算法的改进
- 格点 QCD 研究手段的突破

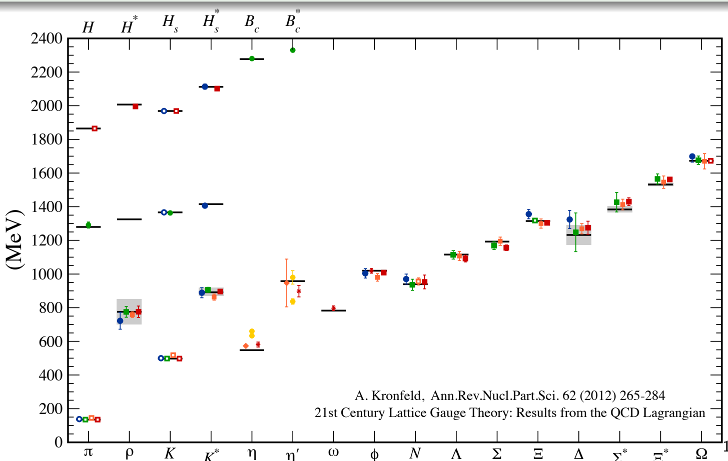
进入到 2000 年以后

淬火近似(不含海夸克) $\Rightarrow$ full QCD 模拟($N_f = 2, 2+1$) $\Rightarrow$ 物理点模拟(物理的夸克质量)

输入：标准模型基本参数

α_s，quark mass

输出：低能强子谱 vs 实验

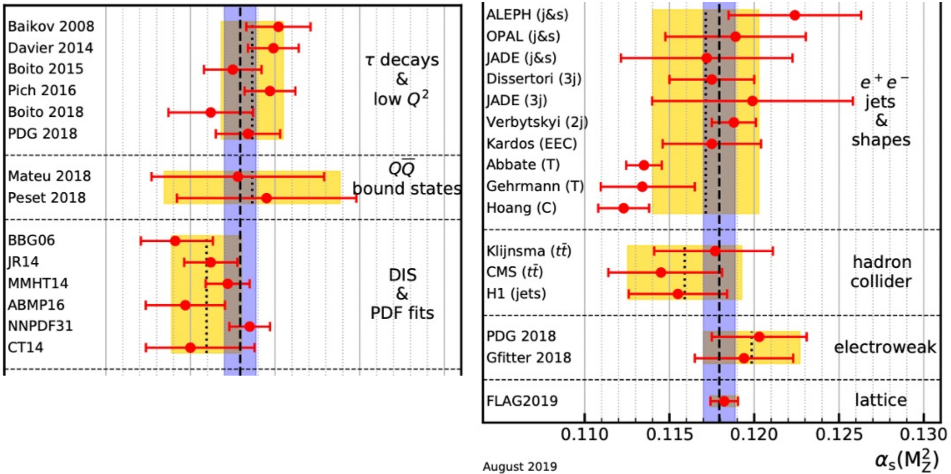


强相互作用耦合常数

高能区的深度非弹实验与微扰 QCD 印证 $\Rightarrow$ 揭示了 QCD 是强相互作用背后最基本的理论

低能区的强子谱和强子结构与非微扰格点 QCD 的印证实际上起到了同样的作用

格点 QCD 给出了目前最为精确的强相互作用耦合常数

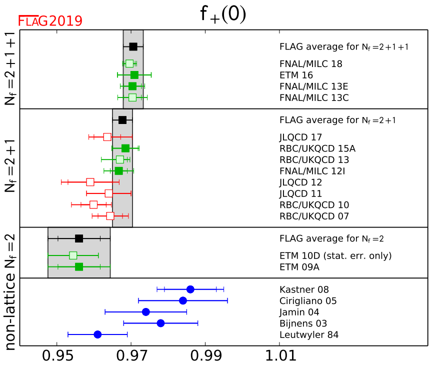


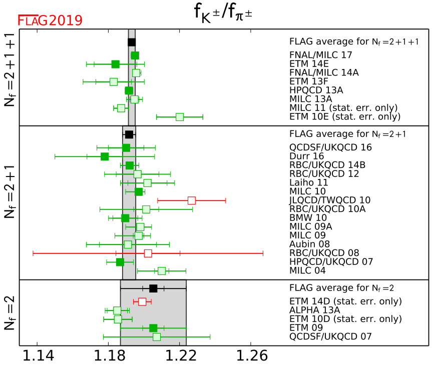
衰变常数与形状因子

Flavor Lattice Averaging Group (FLAG) —— FLAG Review 2019

$$f_+^{K\pi}(0) = 0.9706(27) \quad \Rightarrow \quad 0.28\% \text{ error}$$

$$f_{K^\pm}/f_{\pi^\pm} = 1.1932(19) \quad \Rightarrow \quad 0.16\% \text{ error}$$





结合实验测量 [arXiv:1411.5252, 1509.02220]

$$K_{\ell 3} \quad \Rightarrow \quad |V_{us}| f_+(0) = 0.2165(4) \quad \Rightarrow \quad |V_{us}| = 0.2231(7)$$

$$K_{\mu 2}/\pi_{\mu 2} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{V_{us}}{V_{ud}}\right| \frac{f_{K^\pm}}{f_{\pi^\pm}} = 0.2760(4) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{V_{us}}{V_{ud}}\right| = 0.2313(5)$$

Flag average 2019

误差 $< 1\%$

	N_f	FLAG average	Frac. Err.
f_K/f_π	$2+1+1$	1.1932(19)	0.16%
$f_+(0)$	$2+1+1$	0.9706(27)	0.28%
f_D	$2+1+1$	212.0(7) MeV	0.33%
f_{D_s}	$2+1+1$	249.9(5) MeV	0.20%
f_{D_s}/f_D	$2+1+1$	1.1783(16)	0.13%
f_B	$2+1+1$	190.0(1.3) MeV	0.68%
f_{B_s}	$2+1+1$	230.3(1.3) MeV	0.56%
f_{B_s}/f_B	$2+1+1$	1.209(5)	0.41%

误差 $< 5\%$

	N_f	FLAG average	Frac. Err.
$\hat{B}_K$	$2+1$	0.7625(97)	1.3%
$f_+^{D\pi}(0)$	$2+1$	0.666(29)	4.4%
$f_+^{DK}(0)$	$2+1$	0.747(19)	2.5%
$\hat{B}_{B_s}$	$2+1$	1.35(6)	4.4%
B_{B_s}/B_{B_d}	$2+1$	1.032(28)	3.7%
$\ldots$			

精度优于 1% $\Rightarrow$ 需要加入 QED 效应 $\Rightarrow$ QCD 中的 QED 修正：新的格点研究前沿

FLAG 组织

Flavor Lattice Averaging Group = FLAG

- 遴选格点QCD领域的专家组成工作组
- 对全球格点QCD计算的结果进行总结、评估，给出权威的全球平均结果
- 每3年1期，以 FLAG Review 的形式向格点QCD以外的领域公布结果
- 这些结果可用于微扰论、唯象学、手征有效理论、DS方程等多个领域的研究

FLAG 类似于格点 QCD 领域的 Particle Data Group

QCD 的格点非微扰定义

描述格点 QCD 的几个关键词

一句话概括：格点 QCD 是构建在分立的欧氏时空格子下的 QCD 理论

描述格点 QCD 的几个关键词

一句话概括：格点 QCD 是构建在分立的欧氏时空格子下的 QCD 理论

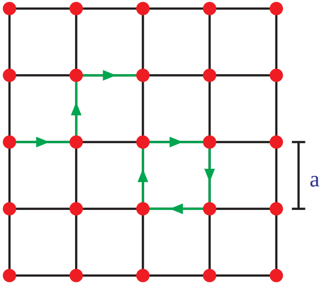
- 关键词一：分立的时空格子

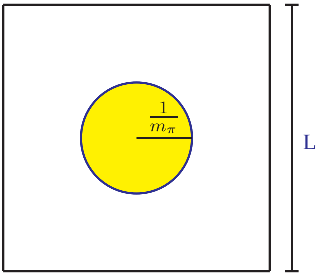
- 关键词二：欧氏时空

- 关键词三：QCD 理论

QCD 格点离散化

- 夸克场位于格点上，$\psi(x)$, $x_\mu = n_\mu a$
- 胶子场由格点之间的链接来表示 $U_\mu(x) = e^{iagA_\mu(x)}$





- 计算机只能模拟有限的自由度 $\Rightarrow$ 格距a不能是无穷小，格子长度L不能是无穷大
- $N = L/a \sim 32, 48, 64, \cdots$，考虑到 4 维时空，总的格点数就是 N^4

紫外与红外截断

- 非零格距 a 引入的是紫外截断 $\Lambda_{lat} \sim \frac{1}{a}$
  - 考察含粲系统，需要 $\frac{1}{a} \gg m_c$，否则格距误差太大 $\sim a\, m_c$
  - 目前格点上模拟的 ultra-fine lattice spacing 在 0.04 fm，对应的能量标度是 5 GeV 左右
  - 格点上的裸算符经重整化后，不依赖于截断，在 $a \to 0$ 时存在连续极限值
  - 强子能谱由 QCD 哈密顿量本征值给出，无需重整化

紫外与红外截断

- 非零格距 a 引入的是紫外截断 $\Lambda_{lat} \sim \frac{1}{a}$
  - 考察含粲系统，需要$\frac{1}{a} \gg m_c$，否则格距误差太大$\sim a\,m_c$
  - 目前格点上模拟的 ultra-fine lattice spacing 在 0.04 fm，对应的能量标度是 5 GeV 左右
  - 格点上的裸算符经重整化后，不依赖于截断，在$a \to 0$时存在连续极限值
  - 强子能谱由 QCD 哈密顿量本征值给出，无需重整化

- 格子长度 L 引入的是红外截断
  - QCD 系统中存在强子的产生和湮灭 $\Rightarrow$ 最轻的强子为 pion 介子
  - L 应该大于 pion 介子的康普顿波长，$L \gg \frac{1}{m_\pi}$，否则系统将受到显著有限体积影响
  - 经验上来讲，当$m_\pi L \geq 4$时，对于某些物理量，有限体积效应不是那么重要
  - 对于稳定强子，有限体积效应随$m_\pi L$增大指数压低
  - 对于多强子态和共振态，有限体积效应随$m_\pi L$增大幂次压低 $\Rightarrow$ Lüscher 公式

紫外与红外截断

- 非零格距 a 引入的是紫外截断 $\Lambda_{lat} \sim \frac{1}{a}$
  - 考察含粲系统，需要 $\frac{1}{a} \gg m_c$，否则格距误差太大 $\sim a\, m_c$
  - 目前格点上模拟的 ultra-fine lattice spacing 在 0.04 fm，对应的能量标度是 5 GeV 左右
  - 格点上的裸算符经重整化后，不依赖于截断，在 $a \to 0$ 时存在连续极限值
  - 强子能谱由 QCD 哈密顿量本征值给出，无需重整化

- 格子长度 L 引入的是红外截断
  - QCD 系统中存在强子的产生和湮灭 $\Rightarrow$ 最轻的强子为 pion 介子
  - L 应该大于 pion 介子的康普顿波长，$L \gg \frac{1}{m_\pi}$，否则系统将受到显著有限体积影响
  - 经验上来讲，当 $m_\pi L \geq 4$ 时，对于某些物理量，有限体积效应不是那么重要
  - 对于稳定强子，有限体积效应随 $m_\pi L$ 增大指数压低
  - 对于多强子态和共振态，有限体积效应随 $m_\pi L$ 增大幂次压低 $\Rightarrow$ Lüscher 公式

- $a \ll \frac{1}{m_c} \ll \frac{1}{m_\pi} \ll L$，同时兼顾最大的体积和最小的格距 $\Rightarrow N^4 \sim 150^4 \Rightarrow$ 艰巨的任务

小的格距 vs 大的体积 $\Rightarrow$ 格点计算根据物理目标来进行参数选择

最大的格点体积

最大的格点simulation来自 M. Lüscher 在2017年的格点年会上的汇报 【1707.09758】

- $N = 192$的淬火格点系统，格距=0.1 fm，格子长度=19.2 fm
- 64节点、1536核、8.2TB内存的机器上花了10天的时间模拟出来
- QCD系统并非长程系统 $\Rightarrow$ 如果体积很大，那么场变量在离得很远的时候的关联很弱

可以认为它们的涨落是独立的，这种性质也被称为“stochastic locality”

- 计算机可以模拟一个192^4的格子或者256个48^4的格子
- 一个192^4的大格子上做几百次测量，甚至优于几百个48^4的规范场组态做平均
- 超级计算机的发展更青睐并行化程度更高的大格子

关键词二：欧氏时空

- Wick转动：从闵氏时空转换到欧氏时空

$$x_0 \equiv t \to -ix_4 = -i\tau, \quad p_0 \equiv E \to ip_4$$

- 在欧氏时空下，度规取成$(+,+,+,+)$，有

$$x_E^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = \vec{x}^2 - t^2 = -x_M^2$$

$$p_E^2 = \sum_{i=1}^{4} p_i^2 = \vec{p}^2 - E^2 = -p_M^2$$

- 从路径积分的角度来看一个2点格林函数，在闵氏时空下

$$\langle \hat{O}_1 \hat{O}_2 \rangle_M = \frac{1}{Z_M} \int \mathcal{D}[A_\mu]\mathcal{D}[\psi]\mathcal{D}[\bar{\psi}]\, O_1 O_2 e^{-iS_M}$$

这里，配分函数Z由路径积分给出

$$Z_M = \int \mathcal{D}[A_\mu]\mathcal{D}[\psi]\mathcal{D}[\bar{\psi}]\, e^{-iS_M}$$

路径积分带有一个权重因子e^{-iS_M}，这是一个震荡型的因子

- 路径积分进行Monte Carlo数值模拟 $\Rightarrow$ 需要一个高斯型的权重因子
- 在Wick 转动下$t \to -i\tau$，权重因子变为$e^{-iS_M} \to e^{-S_E}$
- 权重因子实际上相当于统计力学系统的玻尔兹曼因子
- 2点格林函数可以写成

$$\langle \hat{O}_1 \hat{O}_2 \rangle_E = \frac{1}{Z_E} \int \mathcal{D}[A_\mu]\mathcal{D}[\psi]D\bar{\psi}\, O_1 O_2 e^{-S_E}$$

这里

$$Z_E = \int \mathcal{D}[A_\mu]\mathcal{D}[\psi]D\bar{\psi}\, e^{-S_E}$$

- 欧氏时空，作用量最小的路径对于路径积分的贡献最大，其它路径的贡献被指数压低了
- 闵氏时空，大作用量对应的路径有一个剧烈震荡的因子，在积分时贡献也会抵消掉

把欧氏时空的场论看成是量子场论的一种非微扰定义

欧氏时空场论 vs 经典统计力学

- 与场算符相关的格林函数用路径积分的形式表达出来 $\Rightarrow$ 格点 QCD 模拟的基础
- 把欧氏时空路径积分系统类比为一个统计力学系统

欧氏时空场论

- 作用量：$S[\psi, \bar{\psi}, A]$
- 路径积分权重因子：e^{-S}
- 真空到真空的振幅：

$$\int [d\psi][d\bar{\psi}][dA]\, e^{-S}$$

- 真空能量
- 真空期望值：$\langle 0|O|0\rangle$
- 格林函数：

$$\langle 0|\, T[O_1 \cdots O_n]|0\rangle$$

经典统计力学

- 哈密顿量：H
- 玻尔兹曼因子：$e^{-\beta H}$
- 配分函数：

$$\sum_{conf.} e^{-\beta H}$$

- 自由能
- 正则系综平均：$\langle O\rangle$
- 关联函数：

$$\langle O_1 \cdots O_n\rangle$$

闵氏时空下的关联函数

闵氏时空，2点函数

$$\Gamma_M(t,\vec{k}) = \int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \langle 0|T[\hat{O}_M(\vec{x},t)\hat{O}_M^\dagger(\vec{0},0)]|0\rangle$$

算符$\hat{O}_M(\vec{x},t)$在海森堡表象下可以写为

$$\hat{O}_M(\vec{x},t) = e^{i\hat{H}t - i\hat{p}x}\hat{O}_M(\vec{0},0)e^{-i\hat{H}t+i\hat{p}x}$$

不妨取$t>0$

$$\Gamma_M(t,\vec{k}) = \int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \langle 0|e^{i\hat{H}t-i\hat{p}x}\hat{O}_M(\vec{0},0)e^{-i\hat{H}t+i\hat{p}x}\hat{O}_M^\dagger(\vec{0},0)|0\rangle$$

利用Hilbert空间的完备性，插入能量本征态$1=\sum_n \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3}|n,\vec{p}\rangle\langle n,\vec{p}|$

$$\begin{aligned}\Gamma_M(t,\vec{k}) &= \sum_n \langle 0|\hat{O}_M(\vec{0},0)e^{-i\hat{H}t}|n,\vec{k}\rangle\langle n,\vec{k}|\hat{O}_M^\dagger(\vec{0},0)|0\rangle \\ &= \sum_n \langle 0|\hat{O}_M(\vec{0},0)|n,\vec{k}\rangle e^{-iE_n t}\langle n,\vec{k}|\hat{O}_M^\dagger(\vec{0},0)|0\rangle\end{aligned}$$

其中$|n,\vec{k}\rangle$代表带动量$\vec{k}$的、量子数对应于$\hat{O}_M$算符的强子态的第n个激发态。

欧氏时空，2点函数

$$\Gamma_E(\tau,\vec{k}) = \int d^3\vec{x}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \langle 0| T[\hat{O}_E(\vec{x},\tau)\hat{O}_E^\dagger(\vec{0},0)]|0\rangle$$

算符写为

$$\hat{O}_E(\vec{x},\tau) = e^{\hat{H}\tau - i\hat{p}x} O_E(\vec{0},0) e^{-\hat{H}\tau + i\hat{p}x}$$

在$t=\tau=0$的时间上，有

$$\hat{O}_M(\vec{x},0) = \hat{O}_E(\vec{x},0)$$

当$t=\tau\neq 0$时

$$\hat{O}_M(\vec{x},t) \neq \hat{O}_E(\vec{x},\tau)$$

在Wick转动下，$t\to -i\tau$，但哈密顿量算符$\hat{H}$保持不变

$$\Gamma_E(\tau,\vec{k}) = \sum_n \langle 0|\hat{O}_E(\vec{0},0)|n,\vec{k}\rangle e^{-E_n\tau}\langle n,\vec{k}|\hat{O}_E^\dagger(\vec{0},0)|0\rangle$$

- 对于闵氏和欧氏时空，哈密顿量一样 $\Rightarrow$ 对应的能谱都一样，能量本征态也一样
- 不含时的强子矩阵元，比如说$\langle 0|\hat{O}(\vec{0},0)|n,\vec{k}\rangle$，欧氏和闵氏时空得到的也是一样的

闵氏时空和欧氏时空物理的不同

- 传统的含时物理量，比如质子的部分子分布函数(parton distribution function)

$$q(x,\mu^2)=\int\frac{d\xi^-}{4\pi}e^{-ix\xi^-P^+}\langle N(P)|\bar{\psi}(\xi^-)\gamma^+\exp\left(-ig\int_0^{\xi^-}d\eta^-A^+(\eta^-)\right)\psi(0)|N(P)\rangle$$

  - 质子的动量P^μ可以取为z方向，$P^\mu=(P^0,0,0,P^z)$
  - $\xi^\pm=(t\pm z)/\sqrt{2}$是光锥坐标
  - t是闵氏时间

由于算符明显含时，没法在欧氏时空直接计算

解决方案：大动量有效理论（季向东）【1305.1539、1404.6680】等一系列文章。

- 传统的含时物理量，比如质子的部分子分布函数(parton distribution function)

$$q(x,\mu^2)=\int\frac{d\xi^-}{4\pi}\,e^{-ix\xi^-P^+}\langle N(P)|\bar{\psi}(\xi^-)\gamma^+\exp\left(-ig\int_0^{\xi^-}d\eta^-A^+(\eta^-)\right)\psi(0)|N(P)\rangle$$

  - 质子的动量P^μ可以取为z方向，$P^\mu=(P^0,0,0,P^z)$
  - $\xi^\pm=(t\pm z)/\sqrt{2}$是光锥坐标
  - t是闵氏时间

  由于算符明显含时，没法在欧氏时空直接计算

解决方案：大动量有效理论（季向东）【1305.1539、1404.6680】等一系列文章。

- 含共振态和多粒子态的物理量
  - 通过构造关联函数，可以提取出哈密顿量的本征态，对应的是粒子的能谱
  - 共振态、多粒子态，对应的是branch cut $\Rightarrow$ 当能量大于两粒子阈值，能量是连续的
  - 在格点上，由于整个物理体积是有限的，在有限的体积中能谱必然是分立的

解决方案：有限体积方法$\Rightarrow$有限体积中的离散能谱，转变为无穷体积中的粒子-粒子散射振幅

【M. Lüscher, Commun.Math.Phys. 105 (1986) 153， NPB 354 (1991) 531】

time-like 和 space-like 区域的差别

以真空极化函数为例，在闵氏时空，可以定义为

$$\Pi^{(M)}_{\mu\nu} = \int d^4x_M\, e^{iqx_M}\langle 0|J_\mu(x_M)J_\nu(0)|0\rangle, \quad \Pi^{(M)}_{\mu\nu} = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\cdot\Pi^{(M)}(q^2)$$

- 真空极化函数对应于$e^+e^- \to \gamma^* \to \mathrm{hadrons}$的过程
- $s = q^2 > 0$，对应time-like区域，这里s可以认为是末态强子的不变质量平方
- 真空极化函数的虚部，与强子谱密度(spectral density)成正比
- 可以由BESIII实验的R值测量来给出

$$\mathrm{Im}\;\Pi^{(M)}(s) = 2\pi\rho(s) = \frac{R(s)}{6\pi}, \quad R(s) \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \mathrm{hadrons})}{4\pi\alpha(s)^2/(3s)}$$

time-like 和 space-like 区域的差别

以真空极化函数为例，在闵氏时空，可以定义为

$$\Pi^{(M)}_{\mu\nu} = \int d^4x_M\, e^{iqx_M}\langle 0|J_\mu(x_M)J_\nu(0)|0\rangle, \quad \Pi^{(M)}_{\mu\nu} = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu}q^2)\cdot\Pi^{(M)}(q^2)$$

- 真空极化函数对应于$e^+e^- \to \gamma^* \to \text{hadrons}$的过程
- $s = q^2 > 0$，对应time-like区域，这里s可以认为是末态强子的不变质量平方
- 真空极化函数的虚部，与强子谱密度(spectral density)成正比
- 可以由BESIII实验的R值测量来给出

$$\mathrm{Im}\ \Pi^{(M)}(s) = 2\pi\rho(s) = \frac{R(s)}{6\pi}, \quad R(s) \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadrons})}{4\pi\alpha(s)^2/(3s)}$$

对于欧氏时空，真空极化函数

$$\Pi^{(E)}_{\mu\nu} = \int d^4x_E\, e^{iQx_E}\langle 0|J_\mu(x_E)J_\nu(0)|0\rangle, \quad \Pi^{(E)}_{\mu\nu}(Q^2) = (Q_\mu Q_\nu - \delta_{\mu\nu}Q^2)\cdot\Pi^{(E)}(Q^2)$$

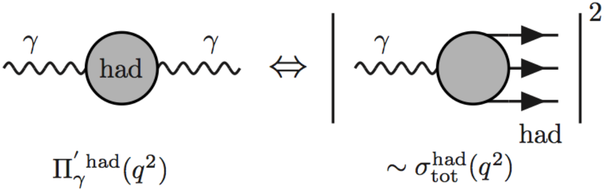
- $q^2 = -Q^2 < 0$，对应space-like区域
- 通过欧氏时空傅里叶变换，格点上计算得到的是space-like区域的真空极化函数

R 值与强真空极化的关系

强真空极化(Hadronic vacuum polarization, HVP)

$$= (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu)\Pi_V(q^2)$$

- 光学定理



$$\mathrm{Im}\,\Pi_V(s) \quad \Leftarrow \quad R(s) = \frac{3s}{4\pi\alpha^2}\sigma(e^+e^- \to \mathrm{hadrons})$$

- 色散关系

$$\Pi_V(q^2) - \Pi_V(0) = \frac{q^2}{\pi}\int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds\, \frac{\mathrm{Im}\,\Pi_V(s)}{s(s - q^2 - i\varepsilon)}$$

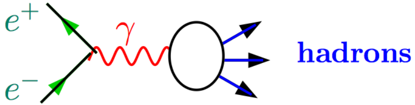
凡是物理过程中包含单个虚光子的，都可以从R值得到真空极化修正

高能区的R值

R是个比值

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \gamma^* \to \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \to \gamma^* \to \mu^+\mu^-)}$$

- 由于$\sigma(e^+e^- \to \gamma^* \to \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$是一个可计算的物理量，$R$值测量的本质是对$\sigma(e^+e^- \to \gamma^* \to \text{hadrons})$的测量



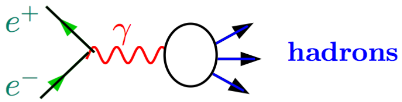
在高能区，由于QCD渐近自由，可以用微扰论计算R值

$$R(s)^{\text{pert}} = N_c \sum_f Q_f^2 \frac{v_f}{2}(3 - v_f^2)\Theta(s - 4m_f^2) \times (1 + \alpha_s c_1 + \alpha_s^2 c_2 + \cdots)$$

- $N_c = 3$为早期人们认识到三种不同的色荷提供了直接的实验依据

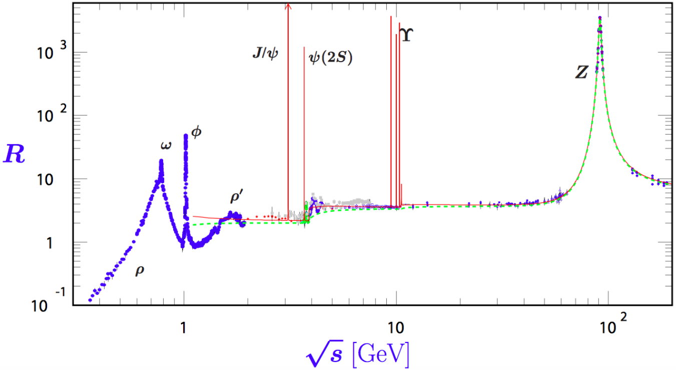
现今的实验更关注低能区R值的测量

北京正负电子对撞机 **BES III** 实验

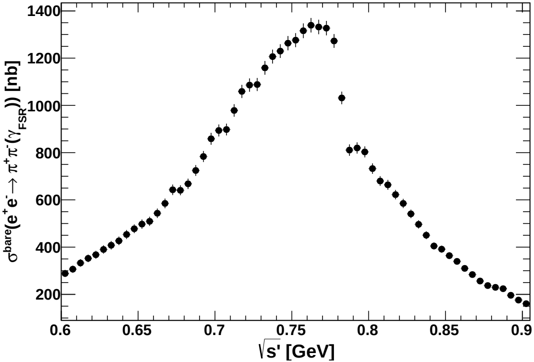


- 为低能强子物理和味物理提供了大量珍贵的实验数据

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \to \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \to \mu^+\mu^-)}$$

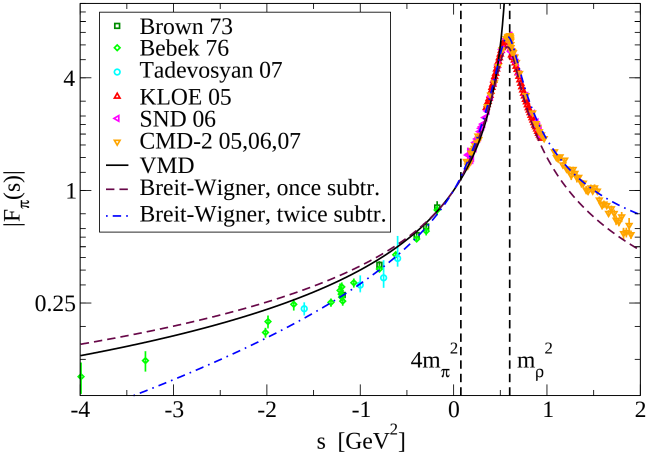


$\sigma(e^+e^- \to \pi^+\pi^-)$ **at 0.6 - 0.9 GeV**, from [BES III, Phys. Lett. B753 (2016) 629]



- 能量小于0.9 GeV，强子末态由$\pi^+\pi^-$主导 $\Rightarrow$ R值由timelike pion form factor 给出
- ρ 共振态的峰出现在0.77 GeV
  - $e^+e^- \to \pi^+\pi^-$ 在 0.6 GeV 和在 0.77 GeV 时并没有本质区别
  - ρ 共振态本质上是$\pi\pi$散射在0.77 GeV能量区域的特殊表现

类时和类空区域的关联



- 在time-like区域，通过实验测量，获得共振态的峰
- space-like区域，真空极化函数随能量的变化是平滑的

time-like 和 space-like区域的物理通过色散关系连接

π类时形状因子

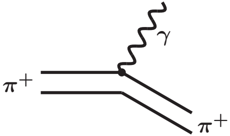
- 得到了$\sigma(e^+e^- \to \pi^+\pi^-)$，可以从中提取$\pi$类时(timelike)形状因子

$$\sigma(e^+e^- \to \pi^+\pi^-) = \sigma^0(e^+e^- \to \pi^+\pi^-)|F_\pi(s)|^2$$

  - σ^0: 假设 $\pi^\pm$ 是点粒子，在树图水平下计算的散射截面
  - $|F_\pi(s)|^2$ 描绘了π内部的电磁结构

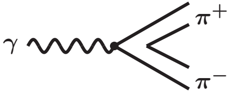
$\pi\pi$散射、ρ共振态、π类时形状因子 $\Rightarrow$ 三位一体的物理量

类空形状因子 $\langle\pi|J_\mu|\pi\rangle$



$\Rightarrow$ 初末态单粒子，$F_\pi(q^2)$ 是实函数，格点算得很好

类时形状因子 $\langle\pi\pi|J_\mu|0\rangle$



$\Rightarrow$ 末态多粒子，$F_\pi(q^2)$ 是复函数，以前认为格点算不了

欧氏时空关联函数是格点计算的主要对象

- 欧氏时空下，算符的时间依赖关系可以写成 $O(t) = e^{Ht}O(0)e^{-Ht}$
- 以π算符为例 $\pi(t) = \sum_{\mathbf{x}} \bar{u}\gamma_5 d(\mathbf{x}, t)$，可以构造关联函数

$$C_\pi(t) = \langle 0|\pi^\dagger(t)\pi(0)|0\rangle = \sum_n e^{-E_\pi^n t}|\langle n|\pi|0\rangle|^2$$

  - t很大时，$C_\pi(t)$的时间依赖关系由基态$|n\rangle = |\pi\rangle$给出 $\Rightarrow$ π 能谱

- 如果构造$\pi\pi$算符，那么由关联函数能得到$\pi\pi$的能谱

$$C_{\pi\pi}(t) = \langle 0|(\pi\pi)^\dagger(t)(\pi\pi)(0)|0\rangle = \sum_n e^{-E_{\pi\pi}^n t}|\langle \pi\pi, n|\pi\pi|0\rangle|^2$$

  - 格点计算的空间物理尺寸是有限的~几个fm，所以得到$\pi\pi$的能谱是离散的

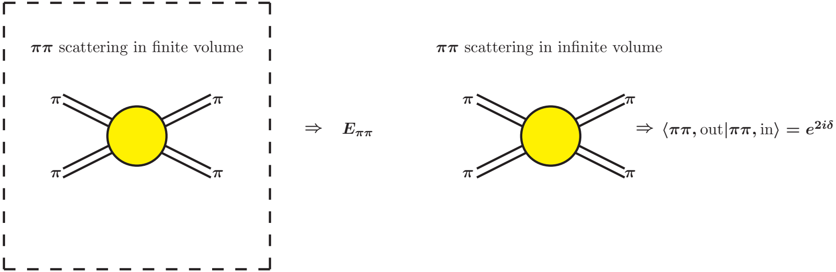
$\pi\pi$散射相移

从离散的能量$E_{\pi\pi}$能得到什么？

- 如果$\pi\pi$之间没有相互作用，那么 $E_{\pi\pi}$ 可以由格点有限尺寸L直接给出的

$$E_{\pi\pi}^{\mathrm{free}} = \sqrt{m_\pi^2 + \vec{p}_1^{\,2}} + \sqrt{m_\pi^2 + \vec{p}_2^{\,2}}\,, \quad \vec{p}_{1,2} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}_{1,2}$$

- 有相互作用的情况下，$E_{\pi\pi}$ 和 $E_{\pi\pi}^{\mathrm{free}}$有所不同
  - $\triangle E = E_{\pi\pi}^n - E_{\pi\pi}^{\mathrm{free}} \neq 0$ 包含了QCD相互作用的信息



- Lüscher 构建了 $E_{\pi\pi}$ 和 $\delta(E)$ 之间的关系式，充分利用了有限体积效应

$$n\pi - \delta(k) = \phi(q), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad q = \frac{k}{2\pi/L}, \quad E_{\pi\pi} = 2\sqrt{m_\pi^2 + k^2}$$

$$\int_V d^3x \langle 0|J_\mu(x,t)J_\mu(0)|0\rangle_V = \sum_n |\langle \pi\pi, n|J_\mu|0\rangle_V|^2 e^{-E^n_{\pi\pi}t}$$

从矢量流算符的关联函数中，可以得到

- $E^n_{\pi\pi}$：从中获得了散射相移δ的信息
- $|\langle \pi\pi, n|J_\mu|0\rangle_V|^2$：能给我们什么信息?

回想：无穷空间类时形状因子的定义

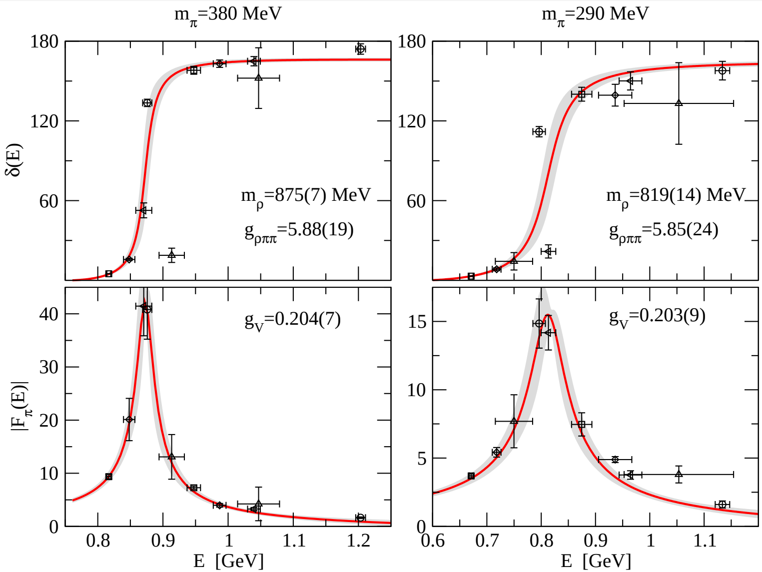
$$\langle \pi(p_1)\pi(p_2), \mathrm{out}|J_\mu|0\rangle = \sqrt{2}i(p_1-p_2)_\mu F_\pi(s)$$

格点QCD得到有限体积下的振幅$|\langle \pi\pi, n|J_\mu|0\rangle_V|^2$

弄清楚有限体积修正效应，就能从$|\langle \pi\pi, n|J_\mu|0\rangle_V|^2$得到$|F_\pi(s)|^2$

Lellouch-Lüscher 公式：连接有限体积和无穷体积下的含多强子态矩阵元

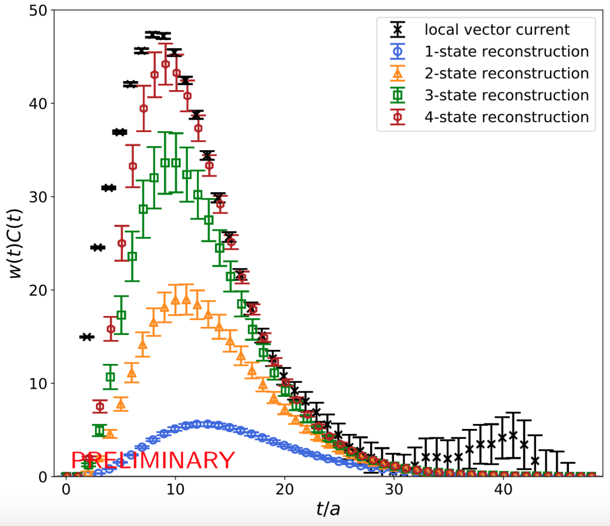
散射相移与类时形状因子的格点数据



XF, S. Aoki, S. Hashimoto, T. Kaneko, PRD91 (2015) 054504

$\pi\pi$ 对 spacelike 关联函数的重要性

即使在spacelike 区域，也需要系统地研究$\pi\pi$ 散射



RBC-UKQCD 合作组的研究结果

在格点上构建 QCD 理论，需要做到

- 构建格点离散化的费米子场和规范场，这是格点正规化所必须的
- 构建作用量的时候要尽可能保证原有的对称性不被破坏

在格距趋于0的时候要保证能回到连续时空的QCD理论

- 需要做路径积分，就要明确定义费米子场和规范场积分测度

给路径积分一个严格的非微扰的定义

格点自由费米子场作用量

- 费米子场定义在欧氏4维时空格子

$$\psi(n), \quad \bar{\psi}(n), \quad n_\mu = 0, 1, \cdots, L-1, \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

- 连续时空的自由费米子场作用量的表达式给出如下

$$S_F^0[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x \, \bar{\psi}(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x)$$

格点自由费米子场作用量

- 费米子场定义在欧氏4维时空格子

$$\psi(n), \quad \bar{\psi}(n), \quad n_\mu = 0, 1, \cdots, L-1, \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

- 连续时空的自由费米子场作用量的表达式给出如下

$$S_F^0[\psi, \bar{\psi}] = \int d^4x\, \bar{\psi}(x)(\gamma_\mu \partial_\mu + m)\psi(x)$$

- 在分立的时空里面，把求导替换为差分算符，可以有向前、向后差分

$$\partial_\mu \psi(n) = \frac{1}{a}(\psi(n+\hat{\mu}) - \psi(n)), \quad \partial_\mu^* \psi(n) = \frac{1}{a}(\psi(n) - \psi(n-\hat{\mu}))$$

或者两者求平均

$$\bar{\partial}_\mu \psi(n) = \frac{\psi(n+\hat{\mu}) - \psi(n-\hat{\mu})}{2a}$$

- 格点上给出的自由费米子场作用量为

$$S_F^0[\psi, \bar{\psi}] = a^4 \sum_n \bar{\psi}(n) \left(\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu \frac{\psi(n+\hat{\mu}) - \psi(n-\hat{\mu})}{2a} + m\psi(n) \right)$$

计算机处理的都是无量纲的数，把格距a吸收到费米子场和质量中，构成无量纲的量 $a^{\frac{3}{2}}\psi(n)$、am

格点自由费米子场作用量

对于费米子场的路径积分来讲，格点上的费米子场依然可以用Grassmann数来表示，对费米子场的积分依然满足 Grassmann数积分

$$\int d\psi d\bar{\psi} = \int d\psi d\bar{\psi}\,\psi = \int d\psi d\bar{\psi}\,\bar{\psi} = 0$$

$$\int d\psi\,\psi = \int d\bar{\psi}\,\bar{\psi} = 1$$

$$\int d\psi d\bar{\psi}\,\bar{\psi}\psi = 1$$

由于我们在欧氏时空选择了度规$(+,+,+,+)$，那么我们的γ矩阵选择的也是欧氏时空的γ矩阵，其中一种手征表示是

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & i\vec{\sigma} \\ -i\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

它们具有厄米性$\gamma_\mu^\dagger = \gamma_\mu$，并且满足反对易关系

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} I$$

这里，我们得到的是$2\delta_{\mu\nu}$，而不是$2g_{\mu\nu}$。在欧氏时空中，γ_5矩阵定义为

$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

规范对称性

- 对费米子场做规范变换

$$\psi(n) \to V(n)\psi(n), \quad \bar{\psi}(m) \to \bar{\psi}(m)V^{\dagger}(m)$$

- 要使得正反夸克构成的算符规范不变，可以引进一个规范场链接(link)，连接正反夸克场

$$\bar{\psi}(m)U(m,n)\psi(n) \equiv \bar{\psi}(m)\left(\mathcal{P}e^{\int_n^m igA_\mu(x)dx_\mu}\right)\psi(n)$$

这里$\mathcal{P}$表示积分和路径有关。链接$U(m,n)$满足规范变换

$$U(m,n) \to V(m)U(m,n)V^{\dagger}(n)$$

有了这个链接以后，整个夸克bilinear算符是规范不变的

- 费米子作用量中只有相邻的正反夸克场发生耦合，可以引进长度为1的链接，刚好连接这样的两个夸克场

$$U_\mu(n) \equiv U(n, n+\hat{\mu}) = e^{iagA_\mu(n+\frac{\hat{\mu}}{2})}$$

从这个定义可以看出，$U_\mu(n)$并非定义在n上，而是定义在从n出发向四个方向的链接上

简单费米子(Naive fermion)

有了$U_\mu(n)$以后，也可以定义一个反向的link

$$U_{-\mu}(n) \equiv U(n, n-\hat{\mu}) = U(n-\hat{\mu}, n)^\dagger = U_\mu(n-\hat{\mu})^\dagger = e^{-iagA_\mu(n-\frac{\hat{\mu}}{2})}$$

它满足规范变换

$$U_{-\mu}(n) \to V(n)U_{-\mu}(n)V(n-\hat{\mu})^\dagger$$

把规范场加入到费米子场作用量里面去，得到

$$S_F[\psi, \bar{\psi}] = a^4 \sum_n \bar{\psi}(n) \left(\sum_{\mu=1}^{4} \gamma_\mu \frac{U_\mu(n)\psi(n+\hat{\mu}) - U_{-\mu}(n)\psi(n-\hat{\mu})}{2a} + m\psi(n) \right)$$

定义向前、向后协变差分

$$D_\mu \psi(n) = \frac{1}{a}(U_\mu(n)\psi(n+\hat{\mu}) - \psi(n)), \quad D^*_\mu \psi(n) = \frac{1}{a}(\psi(n) - U_{-\mu}(n)\psi(n-\hat{\mu}))$$

【作业：对费米子场作用量进行格距a的微扰展开，给出$O(a)$和$O(a^2)$项的表达式，并确认，$O(1)$这一项和连续时空的形式是一致的。】

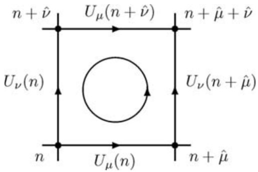
构造规范不变的算符有两种方式

- 一种是正反夸克场之间用gauge link来连接，形如

$$\bar{\psi}(m)U_\mu(m)U_\nu(m+\hat{\mu})\cdots U_\rho(n-\hat{\rho})\psi(n)$$

- 另一种是由纯规范场构成，由gauge linke形成一个闭合的圈，最简单的例子是小方块

$$P_{\mu\nu}(n) = \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(U_\mu(n)U_\nu(n+\hat{\mu})U_\mu^\dagger(n+\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x))$$



  - 由于$U_\mu(n)$是个SU(3)的矩阵，小方块求迹之后是个复数
  - 可以证明，如果小方块的4个链接反着走，与正着走刚好形成复共轭
  - 取实部实际上是把这两种路径做了平均

【作业：请确认对于规范场的闭合圈，正着走和反着走刚好形成复共轭。另外，请确认对于规范不变的算符，只有上述两种构造方式。】

- 在连续极限下，可以把一个闭合圈上的规范场乘积写为

$$G(x,y) = \mathcal{P}\exp\left(ig\int_{\mathcal{C}_{x,y}} A\cdot dr\right) = \exp\left(ig\int_{\mathcal{S}_{x,y}} \nabla\times A\cdot ds\right)$$

第二个式子，由Stokes公式得到

- 对于一个μ,ν方向的小方块 $P_{\mu\nu}(n) = \exp\left(ia^2 gF_{\mu\nu} + O(a^4)\right)$

【作业：请从小方块$P_{\mu\nu}(n)$的定义出发，验证这个式子，先考虑$U(1)$规范场，再考虑更为复杂的$SU(3)$非阿贝尔规范场。提示：在 $n+\frac{\hat{\mu}+\hat{\nu}}{2}$处做展开】

规范场作用量

- 在连续极限下，可以把一个闭合圈上的规范场乘积写为

$$G(x,y)=\mathcal{P}\exp\left(ig\int_{\mathcal{C}_{x,y}}A\cdot dr\right)=\exp\left(ig\int_{\mathcal{S}_{x,y}}\nabla\times A\cdot ds\right)$$

第二个式子，由Stokes公式得到

- 对于一个μ,ν方向的小方块　$P_{\mu\nu}(n)=\exp\left(ia^2gF_{\mu\nu}+O(a^4)\right)$

【作业：请从小方块$P_{\mu\nu}(n)$的定义出发，验证这个式子，先考虑$U(1)$规范场，再考虑更为复杂的$SU(3)$非阿贝尔规范场。提示：在 $n+\frac{\hat{\mu}+\hat{\nu}}{2}$处做展开】

- $P_{\mu\nu}(n)$对a做泰勒展开

$$P_{\mu\nu}(n)=1+ia^2gF_{\mu\nu}-\frac{1}{2}a^4g^2F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+O(g^6)$$

- 为了消去第一项和第二项，将规范场作用量定义为

$$S_G[U]=\frac{2}{g^2}\sum_n\sum_{\mu<\nu}\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}[1-P_{\mu\nu}(n)]$$

在$a\to0$的极限下，$a^4\sum_n\to\int d^4x$，回复到$S_G[U]=S_G[A]$

格点版本的作用量中，耦合常数出现在了分母上　$\Rightarrow$　强耦合极限下可以解析处理

对称性

- 在欧氏时空下Lorentz 对称性变成了$SO(4)$对称性
- 格点离散化与有限体积下 $\Rightarrow$ 对称性会进一步破缺为hypercubic 群
  - 原本任意的旋转变换现在只能允许转90°
  - 平移不变性这件事情，只能以格距为单位进行平移，才能保证
  - 在周期性边界条件下，格点上的动量只能允许取

$$k = \frac{2\pi n}{La}, \quad n = 0, 1, 2, \cdot L - 1$$

这些对称性的破缺，在格点正规化这个框架下，几乎是不可避免的

- 格点QCD尽可能地保留了其它的对称性，比方说宇称($\mathcal{P}$)、电荷共轭($\mathcal{C}$)和时间反演($\mathcal{T}$)。费米子场和规范场在$\mathcal{P}$、$\mathcal{C}$、$\mathcal{T}$变换下满足

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{T}$
$U_4(\vec{x},\tau)$ $U_i(\vec{x},\tau)$	$U_4(-\vec{x},\tau)$ $U_{-i}(-\vec{x},\tau)$	$U_4^*(\vec{x},\tau)$ $U_i^*(\vec{x},\tau)$	$U_{-4}(\vec{x},-\tau)$ $U_i(\vec{x},-\tau)$
$\psi(\vec{x},\tau)$ $\bar{\psi}(\vec{x},\tau)$	$\gamma_4\psi(-\vec{x},\tau)$ $\bar{\psi}(-\vec{x},\tau)\gamma_4$	$C\bar{\psi}^T(\vec{x},\tau)$ $-\psi^T(\vec{x},\tau)C^{-1}$	$\gamma_4\gamma_5\psi(\vec{x},-\tau)$ $\bar{\psi}(\vec{x},-\tau)\gamma_5\gamma_4$

这里电荷共轭矩阵C可以写成$C=\gamma_4\gamma_2$的形式，它满足关系式

$$C\gamma_\mu C^{-1}=-\gamma_\mu^T=-\gamma_\mu^*$$

- 还有一个保存下来的对称性的是规范不变性
- 对于naive费米子来讲，手征对称性也是满足的，但是naive 费米子会有doubling的问题
  $\Rightarrow$ Wilson的解决方案是引进了Wilson项，但这一引进项破坏了手征对称性

格点 QCD 依赖的参数

- α_s：在格点作用量里面由裸的参数g^2来给出
- 夸克质量：包括up, down, strange三个较轻的夸克，以及比较重的charm和bottom quark
  - top夸克寿命太短，也不形成强子态，所以不在格点QCD的研究范畴
  - charm夸克目前是直接可以像三个较轻的夸克一样进行simulation的
  - bottom quark的引入一般要借助于重夸克有效理论、或者Non-relativistic QCD等手段
- 格点作用量里的夸克质量也是裸参数，是在格点正规化下引入的，会依赖于截断，也即a
- 要调节裸参数$g(a), m_i(a)$，使得格点计算出来的物理量和实验符合

$$O(g(a), m_i(a), a) = O_{\text{phys}}$$

  - 调节裸夸克的质量，使得格点QCD计算出来的π介子质量等于实验的测量值 $\Rightarrow$ u/d夸克参数可以认为是物理的参数
  - 让kaon或者Ω重子的质量也等于实验测量值，那么这个时候的s夸克也调到了物理值

一旦用几个物理量把QCD的参数定下来以后，其它的物理量全是格点QCD的理论预言

计算机上得到的数全是无量纲的数

- 以pion介子质量为例，计算得到的实际是无量纲量am_π的值
- 要与PDG上物理的值进行比较，首先要知道，格距a到底是多大?
- 由于格距a的存在，粗看起来，好像在格点QCD里面多引进了一个参数，这是怎么回事?

计算机上得到的数全是无量纲的数

- 以pion介子质量为例，计算得到的实际是无量纲量am_π的值
- 要与PDG上物理的值进行比较，首先要知道，格距a到底是多大?
- 由于格距a的存在，粗看起来，好像在格点QCD里面多引进了一个参数，这是怎么回事?

为了回答这几个问题，先考虑一个没有相互作用的系统

- 格距$a = 0.1$ fm，物理尺寸$L = 1$ fm，对应于一个$(L/a)^4 = 10^4$的立方格子
- 格距$a = 0.2$ fm，物理尺寸$L = 2$ fm，对应于一个$(L/a)^4 = 10^4$的立方格子

计算机上得到的数全是无量纲的数

- 以pion介子质量为例，计算得到的实际是无量纲量am_π的值
- 要与PDG上物理的值进行比较，首先要知道，格距a到底是多大?
- 由于格距a的存在，粗看起来，好像在格点QCD里面多引进了一个参数，这是怎么回事?

为了回答这几个问题，先考虑一个没有相互作用的系统

- 格距$a = 0.1$ fm，物理尺寸$L = 1$ fm，对应于一个$(L/a)^4 = 10^4$的立方格子
- 格距$a = 0.2$ fm，物理尺寸$L = 2$ fm，对应于一个$(L/a)^4 = 10^4$的立方格子
- 在无相互作用的时候，两者完全没有区别

当引进了相互作用以后，实际上低能QCD是存在一个非微扰的haronic scale，Λ_{QCD}

- 裸的耦合常数g^2和截断a之间满足重整化群耦合常数跑动

$$g^2(a) = \frac{1}{\beta_0 \ln \frac{1}{a^2\Lambda^2}} \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \frac{1}{a}\exp(-\frac{1}{2\beta_0 g^2})$$

  - 由于Λ这个scale的存在，使得我们输入的裸耦合常数和格距a是不独立的
  - 格点上最后定格距a并不是通过上式 $\Leftarrow$ Λ是个非微扰的scale，而等式左边来自微扰论

纯规范场分析

纯规范场

在纯规范场下，物理量O的期望值可以由路径积分

$$\langle O\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}[U]\, O[U] e^{-S_G[U]}$$

给出。这里配分函数Z定义为

$$Z = \int \mathcal{D}[U]\, e^{-S_G[U]},$$

积分测度定义为

$$\mathcal{D}[U] = \prod_{x\in L^3 T}\prod_{\mu=1}^{4}\int dU_\mu(x)$$

- $U_\mu(x)$的取值都是$SU(3)$群的群元 $\Rightarrow$ 矩阵元素的取值范围在0到1之间，compact gauge field
- 微扰论常用的规范场A_μ，通过$SU(3)$群的生成元来构造，称为non-compact gauge field
- 在一个连续的紧致群(compact group)上进行积分，积分测度在数学上被称为 Haar 测度

规范场的作用量定义为

$$S_G[U] = \frac{\beta}{N_c}\sum_{x\in L^3 T}\sum_{\mu<\nu} \mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}[1 - P_{\mu\nu}(x)], \quad \beta = \frac{2N_c}{g^2}$$

Haar 测度的一些性质

在规范变化下，$U_\mu(x)$变为

$$U_\mu(x) \quad \rightarrow \quad U'_\mu(x) = V(x)U_\mu(x)V(x+\hat{\mu})^\dagger$$

要满足规范不变性，我们要求积分测度

$$dU_\mu(x) = dU'_\mu(x) = d(V(x)U_\mu(x)V(x+\hat{\mu})^\dagger)$$

因为群元$V(x)$的选取具有任意性，这等价于

$$dU = d(UW) = d(WU)$$

在做路径积分的时候，积分测度会在分子、分母里抵消掉一个因子，不妨引入归一化条件

$$\int dU\, 1 = 1$$

利用这两个条件，可以得到一系列$SU(3)$积分

$$\int_{SU(3)} dU\, U_{ab} = 0$$

$$\int_{SU(3)} dU\, U_{ab} U_{cd} = 0$$

$$\int_{SU(3)} dU\, U_{ab} (U^{\dagger})_{cd} = \frac{1}{3} \delta_{ad} \delta_{bc}$$

$$\int_{SU(3)} dU\, U_{ab} U_{cd} U_{ef} = \frac{1}{6} \epsilon_{ace} \epsilon_{bdf}$$

导出这几个积分的思路如下：

$$\int dU\, f(U) = \int d(VU)\, f(VU) = \int dU\, f(VU)$$

以第一个积分为例

$$\int dU\, U_{ab} = \int dU\, (VU)_{ab} = V_{ac} \int dU\, U_{cb}$$

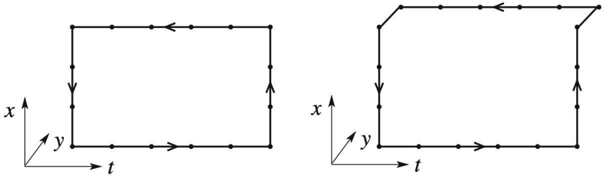
由于V_{ac}可以取任意$SU(3)$群元，只能让$\int dU\, U_{ab} = 0$

- 在$SU(1)$情况下，U取在单位圆上，$\int dU\, U$ 等价于对单位圆是矢量求平均，也为0

对于由纯规范场构成的规范不变量来讲，它是由规范场链接构成的闭合圈来给出的

$$L(U) = \mathrm{Tr}\left[\prod_{(x,\mu)\in\mathcal{L}} U_\mu(x)\right]$$

这里$\mathcal{L}$是个闭合圈



Wilson 圈是其中最有名的一种闭合圈

- 空间线$S(\vec{x},\vec{y};t)$定义为

$$S(\vec{x},\vec{y};t) = \prod_{(\vec{z},j)\in\mathcal{C}_{\vec{x},\vec{y}}} U_j(\vec{z},t)$$

- 时间线$T(\vec{x};t_0,t_1)$定义为

$$T(\vec{x};t_0,t_1) = \prod_{t=t_0}^{t_1-1} U_4(\vec{x},t).$$

Wilson圈的值通过求迹来得到

$$W_{\mathcal{L}}[U] = \mathrm{Tr}[S(\vec{x},\vec{y};t_1)T(\vec{y};t_0,t_1)^\dagger S(\vec{x},\vec{y};t_0)^\dagger T(\vec{x};t_0,t_1)]$$

取时间规范，这种规范固定是将所有时间方向上的规范场链接都设成单位矩阵

$$U_0(x) = 1, \quad \forall x, \quad \Rightarrow \quad A_0(x) = 0$$

Wilson圈在路径积分下的期望值可以写成

$$\langle W_{\mathcal{L}}[U]\rangle = \langle \mathrm{Tr}[S(\vec{x},\vec{y};t_1)S(\vec{x},\vec{y};t_0)^\dagger]\rangle$$

在无穷重夸克极限下，x和y两点存在一对静态正反夸克的源，传播子可以由Wilson线给出

$$Q(\vec{x},t;\vec{y},t) \equiv \Psi(\vec{x},t)_{\alpha,a}\bar{\Psi}(\vec{y},t)_{\beta,b} \propto S(\vec{x},\vec{y};t)_{a,b}$$

从Wilson圈可以得到

$$\langle W_{\mathcal{L}}(r,t)\rangle \quad \rightarrow \quad \langle \mathrm{Tr}[Q(\vec{x},t_1;\vec{y},t_1)Q(\vec{x},t_0;\vec{y},t_0)^\dagger]\rangle \quad \rightarrow \quad \langle [\Psi(\vec{x},t_1)\bar{\Psi}(\vec{y},t_1)][\Psi(\vec{x},t_0)_{\alpha,a}\bar{\Psi}(\vec{y},t_0)]^\dagger\rangle$$

格林函数在t_0这个时间片产生一对距离为r的正反夸克和在t_1这个时间片上湮灭一对正反夸克

插入纯规范场哈密顿量的本征态

$$\langle W_{\mathcal{L}}(r,t)\rangle = \langle [S(\vec{x},\vec{y};0)]_{ab}|n\rangle\langle n[S(\vec{x},\vec{y};0)^{\dagger}]_{ba}\rangle e^{-E_n t}$$

这里的基态能量对应的是正反夸克对的能量，可以表述为空间距离为r的静态夸克势

$$E_1 = V(r) = \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{t}\log\langle W_{\mathcal{L}}(r,t)\rangle$$

考察带色荷的正反夸克之间的势能$V(r)$随着距离是如何变化的

- 强耦合极限下，Wilson 证明了$V(r)$随着r增加是线性增长的
- 在小耦合常数下，QCD两个色荷之间的势很类似于QED的库伦势，都是$1/r$的形式

$V(r)$表述为

$$V(r) = A + \frac{B}{r} + \sigma r$$

这种静态夸克势的表达方式，也被称为Cornell 势，其中σ称为弦张量

强耦合极限下，σ的计算。用路径积分来表达Wislon圈的期望值

$$\langle W_{\mathcal{L}}[U]\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}[U]\,\exp\left(-\frac{\beta}{N_c}\sum_P \mathrm{Re\,Tr}[1-U_P]\right)\mathrm{Tr}\left[\prod_{l\in\mathcal{L}} U_l\right]$$

其中分子、分母可以消去一个$\exp(-\beta/N_c\sum_P \mathrm{Re\,Tr}[1])$。约化以后得到

$$\begin{aligned}\langle W_{\mathcal{L}}[U]\rangle &= \frac{1}{Z'}\int \mathcal{D}[U]\,\exp\left(\frac{\beta}{N_c}\sum_P \mathrm{Re\,Tr}[U_P]\right)\mathrm{Tr}\left[\prod_{l\in\mathcal{L}} U_l\right]\\ &= \frac{1}{Z'}\int \mathcal{D}[U]\,\exp\left(\frac{\beta}{2N_c}\sum_P \left(\mathrm{Tr}[U_P]+\mathrm{Tr}[U_P^\dagger]\right)\right)\mathrm{Tr}\left[\prod_{l\in\mathcal{L}} U_l\right]\end{aligned}$$

强耦合极限$g^2\to\infty$对应于$\beta\to 0$极限，对于配分函数，我们有

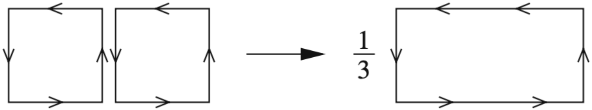
$$Z' = \int \mathcal{D}[U]\,\exp\left(\frac{\beta}{2N_c}\sum_P \left(\mathrm{Tr}[U_P]+\mathrm{Tr}[U_P^\dagger]\right)\right) = \int \mathcal{D}[U]\,(1+O(\beta)) = 1+O(\beta)$$

对玻尔兹曼因子$\exp\left(\frac{\beta}{2N_c}\sum_P\left(\mathrm{Tr}[U_P]+\mathrm{Tr}[U_P^\dagger]\right)\right)$这项做Taylor展开，只保留与$\mathrm{Tr}[U_P^\dagger]$有关的项

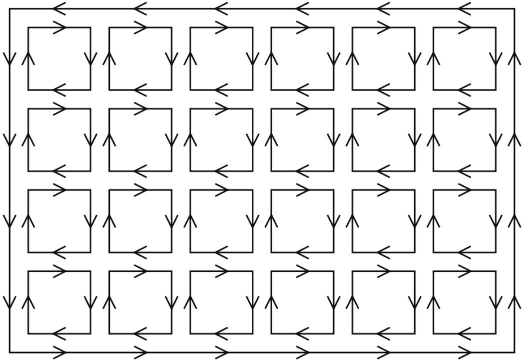
$$
\begin{aligned}
\langle W_{\mathcal{L}}[U]\rangle &= \int \mathcal{D}[U]\frac{1}{n_A!}\left(\frac{1}{2N_c}\right)^{n_A}\left(\sum_P \mathrm{Tr}[U_P^\dagger]\right)^{n_A}\mathrm{Tr}\left[\prod_{l\in\mathcal{L}} U_l\right] \\
&= \left(\frac{1}{2N_c}\right)^{n_A}\int \mathcal{D}[U]\prod_{P\in\mathcal{A}_{\mathcal{L}}}\mathrm{Tr}[U_P^\dagger]\,\mathrm{Tr}\left[\prod_{l\in\mathcal{L}} U_l\right]
\end{aligned}
$$

考察路径积分中有贡献的项，利用

$$
\int_{SU(3)} dU\, U_{ab}(U^\dagger)_{cd} = \frac{1}{3}\delta_{ad}\delta_{bc}, \quad \Rightarrow \quad \int dU\ \mathrm{Tr}[VU]\,\mathrm{Tr}[U^\dagger W] = \frac{1}{3}\mathrm{Tr}[VW]
$$



最经济的方式是根据面积铺满整个Wilson圈



$$\langle W_{\mathcal{L}}[U]\rangle = \left(\frac{1}{2N_c}\right)^{n_A}\left(\frac{1}{N_c}\right)^{n_A}\mathrm{Tr}[1] = 3\exp\left(n_A \log\frac{\beta}{2N_c^2}\right)$$

n_A可取的最小数值为$n_A = (r/a)\times(t/a) \quad \Rightarrow \quad$ 面积法则

$$V(r) \sim -\frac{r}{a^2}\log\frac{\beta}{2N_c^2}(1+O(\beta)) \quad \Rightarrow \quad \sigma = -\frac{1}{a^2}\log\frac{\beta}{2N_c^2}(1+O(\beta))$$

Sommer parameter

从静态夸克势中，可以提取一个和距离有关的量，叫做Sommer parameter，它定义为

$$r^2 \frac{\partial V(r)}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = 1.65$$

这个量可以认为是个物理量。因为Cornell势可以很成功地用于预言charmonium和Upsilon系统的能级，通过和实验数据做对比，可以得到

$$r_0 = 0.49 \text{ fm}$$

r_0这个量可以帮助我们来确定格距a的大小

- 用格点上计算出来的r_0/a的值
- 通过和r_0的物理值比较，马上可以定出格距大小

采用r_0来定标有几个好处

- 对于势模型的选取很不敏感，所以模型依赖性可忽略
- r_0这个距离取得比较适中，保证了静态夸克势可以很好地由$c\bar{c}$或者$b\bar{b}$的谱来确定下来
- 格点QCD能够给出很精确的r_0的值
- 它对海夸克的依赖很不敏感，不需要我们先把u/d夸克参数调到物理值 $\Rightarrow$ r_0这个量对于full QCD和淬火QCD都适用

确定格距的方法不只一种，比方说可以用某个强子H的质量。我们有

$$a = \frac{(am_H)^{\rm lat}}{m_H^{\rm exp}}$$

这里常用的物理量有Ω^-重子的质量以及pion介子衰变常数等

两个最基本的要求

- 该物理量在格点上的计算结果很精确(当然实验值也要足够精确)
- 该物理量对于轻夸克的依赖关系比较小
  $\Rightarrow$ 因为夸克质量也是QCD的参数，不希望同时调两个参数来和实验进行比对

无论采取哪种方法，得到的格距的值应该是自洽的，这是对于格点QCD simulation结果的一个highly non-trivial的检验。

一期一会

Email: xu.feng@pku.edu.cn