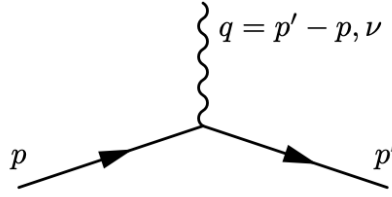


根据同学的提问，推导了一下形状因子 F_1 、 F_2 与磁矩的关系。其中反常磁矩来源于 F_2 的贡献。



考虑轻子流与外加电磁场的相互作用。首先不考虑量子涨落的修正，相互作用可以描述为

$$-ie\bar{u}(p')\gamma^\nu u(p)A_\nu(q) \quad (1)$$

我们主要关心磁场的作用，因此可以把四矢势 A_ν 写为

$$A_\nu(q) = (0, A_i(q)) \quad (2)$$

则相互作用的贡献为

$$ie\bar{u}(p')\gamma^i u(p)A^i(q) \quad (3)$$

在 $p, p', q \rightarrow 0$ 的极限下，只保留一阶修正项，夸克场可以写成两分量的形式

$$u(p) \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}\right) \xi \\ \left(1 + \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m}\right) \xi \end{pmatrix}, \quad (4)$$

利用

$$\gamma^0 \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma^i & \\ & \sigma^i \end{pmatrix} \quad (5)$$

可以得到

$$\bar{u}(p')\gamma^i u(p) = 2m \xi^\dagger \left(\frac{\vec{p}' \cdot \vec{\sigma}}{2m} \sigma^i + \sigma^i \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{2m} \right) \xi \quad (6)$$

再利用

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k \quad (7)$$

得到

$$\bar{u}(p')\gamma^i u(p) = 2m \xi^\dagger \left[\frac{p'^i + p^i}{2m} - \frac{i}{2m} \epsilon^{ijk} q^j \sigma^k \right] \xi \quad (8)$$

其中第一项正比于轻子动量，与洛伦兹力相关。只有第二项才与磁矩相关。保留第二项的贡献，得到

$$e\bar{u}(p')\gamma^i u(p)A^i(q) = e 2m \xi^\dagger \frac{-i}{2m} \epsilon^{ijk} q^j \sigma^k \xi A^i(q) \quad (9)$$

定义磁场为

$$B^k(q) = -i \epsilon^{ijk} q^j A^i(q) \quad (10)$$

则相互作用量写为

$$e \bar{u}(p')\gamma^i u(p)A^i(q) = 2m \xi^\dagger \frac{e}{m} \frac{\sigma^k}{2} \xi B^k(q) \quad (11)$$

可以提取出磁矩

$$\mu^k = \frac{e}{m} \xi^\dagger \frac{\sigma^k}{2} \xi \quad (12)$$

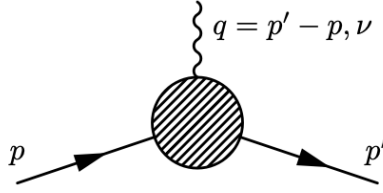
将自旋记为

$$\vec{s} = \xi^\dagger \frac{\vec{\sigma}}{2} \xi \quad (13)$$

则磁矩可写为

$$\vec{\mu} = g \left(\frac{e}{2m} \right) \vec{s}, \quad g = 2 \quad (14)$$

得到无 QED 修正的情况下, g 因子等于 2。



考虑量子涨落, 这时相互作用可以描述为

$$-ie\bar{u}(p') \left[\gamma^\nu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\nu\mu} q_\mu}{2m} F_2(q^2) \right] u(p) A_\nu(q) \quad (15)$$

现在重点考察第二项, 因为这一项已经正比于小量 q_μ , 在不考虑高阶修正的情况下, 夸克场可以简化为

$$u(p) \approx \sqrt{m} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \quad (16)$$

利用

$$\sigma^{ij} = \frac{i}{2} [\gamma^i, \gamma^j] = \epsilon^{ijk} \sigma^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{i0} = \frac{i}{2} [\gamma^i, \gamma^0] = i\sigma^i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

得到

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \sigma^{i\mu} q_\mu u(p) A^i(q) &= -\bar{u}(p') \sigma^{ij} q^j u(p) A^i(q) + \bar{u}(p') \sigma^{i0} q^0 u(p) A^i(q) \\ &= -2m \epsilon^{ijk} \xi^\dagger \sigma^k \xi q^j A^i(q) \\ &= -i2m \xi^\dagger \sigma^k \xi B^k \end{aligned} \quad (18)$$

最后得到

$$e\bar{u}(p') \frac{i\sigma^{i\mu} q_\mu}{2m} u(p) A^i(q) = 2m \xi^\dagger \frac{e}{m} \frac{\sigma^k}{2} \xi B^k \quad (19)$$

结合公式 (9) 和公式 (19) 得到, 在有 QED 修正的情况下, 磁矩表达为

$$\vec{\mu} = \frac{e}{m} [F_1(0) + F_2(0)] \xi^\dagger \frac{\vec{\sigma}}{2} \xi = g \left(\frac{e}{2m} \right) \vec{s} \quad (20)$$

这里 g 定义为

$$g = 2 [F_1(0) + F_2(0)] \quad (21)$$

根据电荷守恒, 有 $F_1(0) = 1$, 因此反常磁矩完全由 $F_2(0)$ 给出, 即

$$a_\ell = \frac{g-2}{2} = F_2(0) \quad (22)$$