格点 QCD 上对赝标量胶球性质的研究

湖南师范大学
桂龙成
第一届中国格点 QCD 年会，10/31/21

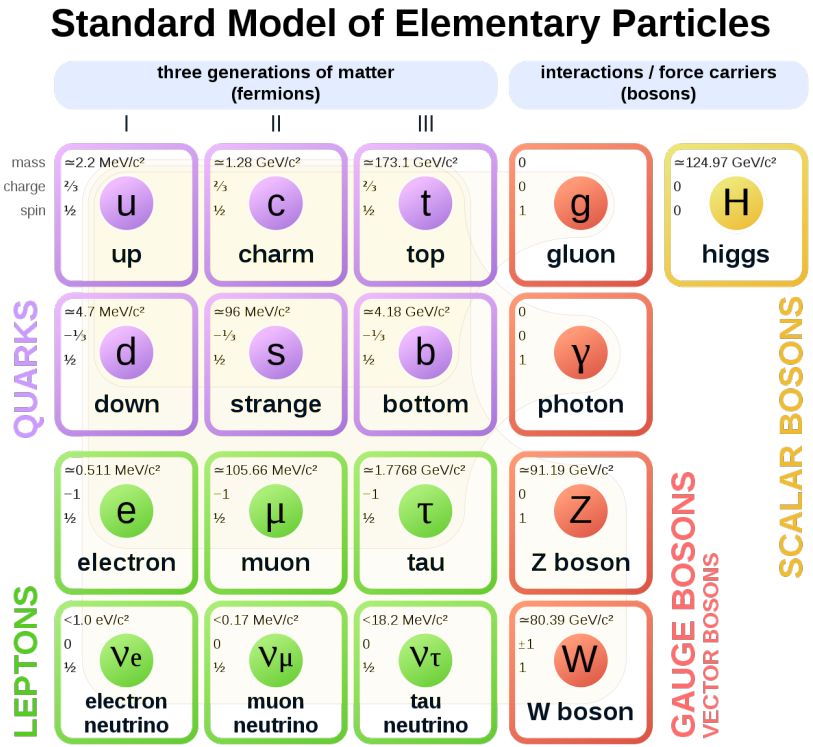
Outline

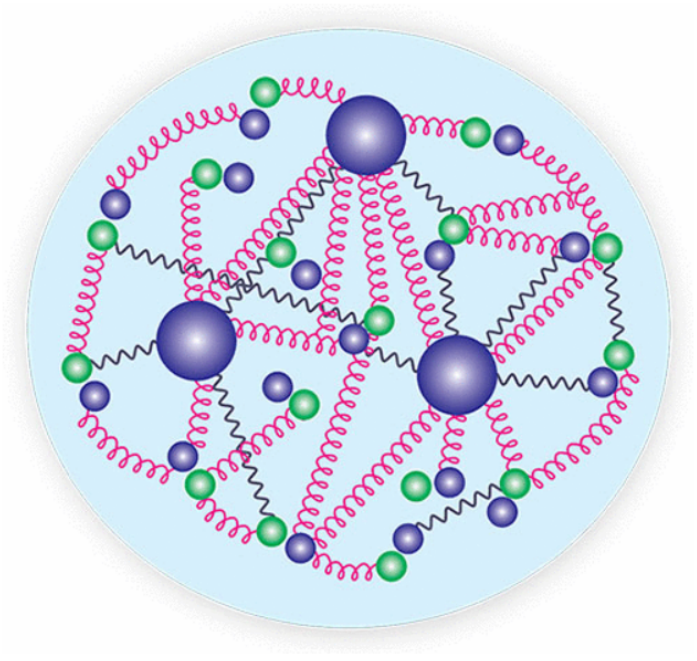
1. 简介

2. 计算细节

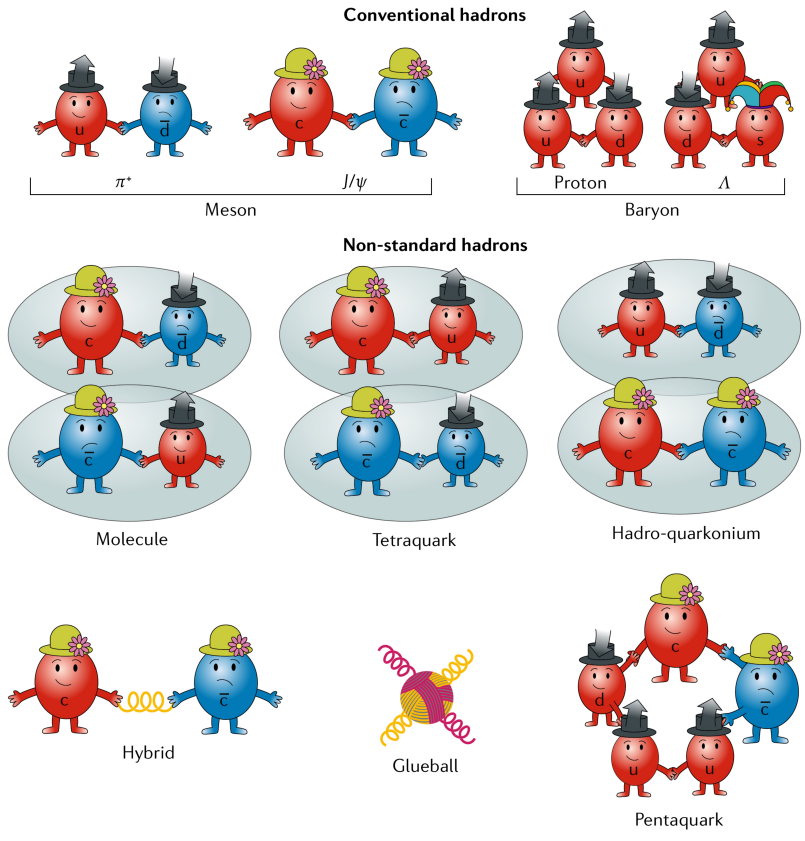
3. 讨论与总结

标准模型


Standard Model of Elementary Particles
three generations of matter (fermions)
interactions / force carriers (bosons)
I
II
III
mass
charge
spin
≃2.2 MeV/c²
⅔
½
u
up
≃1.28 GeV/c²
⅔
½
c
charm
≃173.1 GeV/c²
⅔
½
t
top
0
0
1
g
gluon
≃124.97 GeV/c²
0
0
H
higgs
QUARKS
≃4.7 MeV/c²
−⅓
½
d
down
≃96 MeV/c²
−⅓
½
s
strange
≃4.18 GeV/c²
−⅓
½
b
bottom
0
0
1
γ
photon
SCALAR BOSONS
≃0.511 MeV/c²
−1
½
e
electron
≃105.66 MeV/c²
−1
½
μ
muon
≃1.7768 GeV/c²
−1
½
τ
tau
≃91.19 GeV/c²
0
1
Z
Z boson
GAUGE BOSONS
VECTOR BOSONS
LEPTONS
<1.0 eV/c²
0
½
νe
electron neutrino
<0.17 MeV/c²
0
½
νμ
muon neutrino
<18.2 MeV/c²
0
½
ντ
tau neutrino
≃80.39 GeV/c²
±1
1
W
W boson

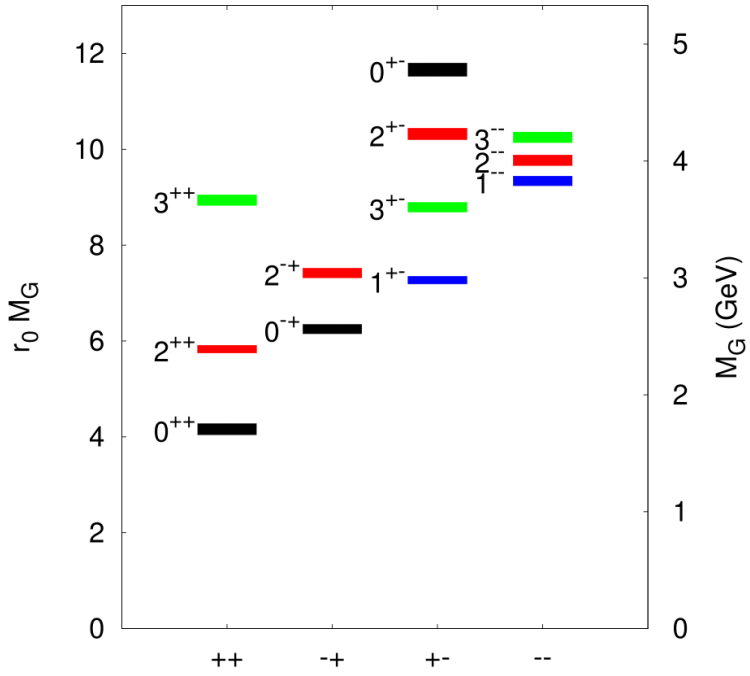


奇特强子态



Nature Rev.Phys. 1, 480 (2019)

格点预言胶球质量谱



PRD 73,014516(2006)

	m_π/MeV	m_0++/MeV	m_2+/MeV	m_0+/MeV
$N_f=2$	650	1498(58)	2384(67)	2585(65)
$N_f=2+1$	360	1795(60)	2620(50)	–

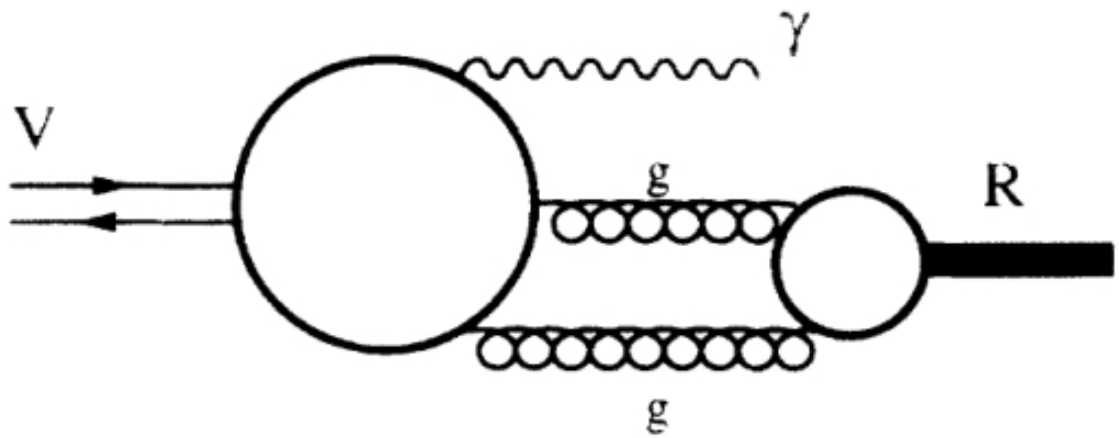
CPC 42,093103; JHEP 10,170

胶球候选者

- 标量：$f_0(1370)$,$f_0(1500)$,$f_0(1710)$
- 张量：$f_2(2340)$
- 赝标量：$\eta(1405)/\eta(1475)$,$X(1835)$,
  $X(2370)$,$X(2500)$
- 如何分辨胶球？

J/ψ辐射衰变过程

J/ψ辐射衰变过程富含胶子，被认为是寻找胶球的重要场所。

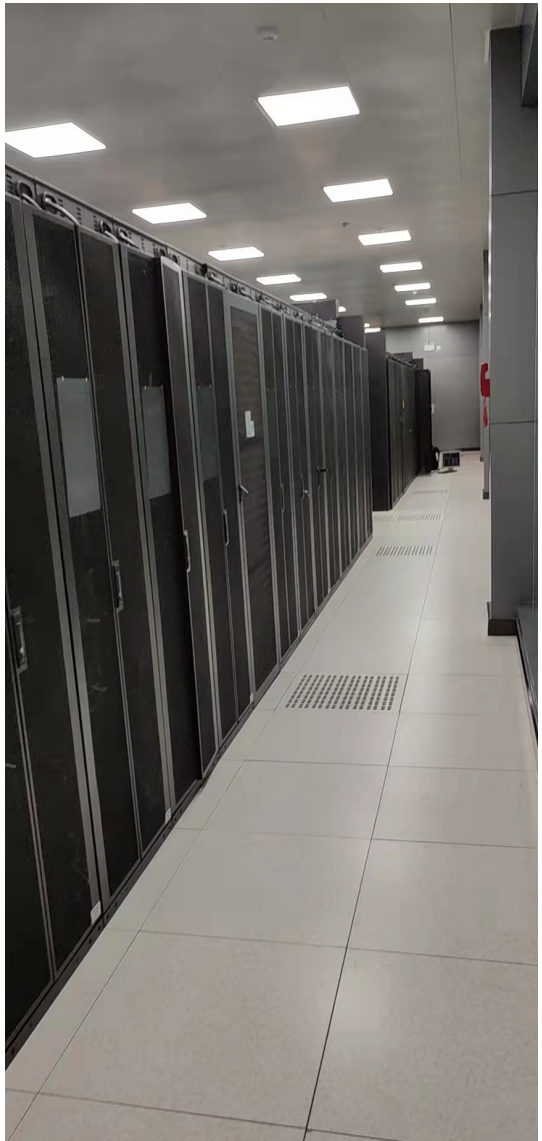


(b)

J/ψ辐射衰变过程

- 我们之前的研究表明，标量及张量胶球在 J/ψ辐射衰变过程具有较大的产率 [RRL110,021601(2013);PRL 111,091601,(2013)]。
- 进一步研究 J/ψ辐射衰变到赝标量胶球过程 [PRD 100, 054511(2019)]。
- 该过程的计算在湖南师范大学的湘江一号上完成。

湘江一号



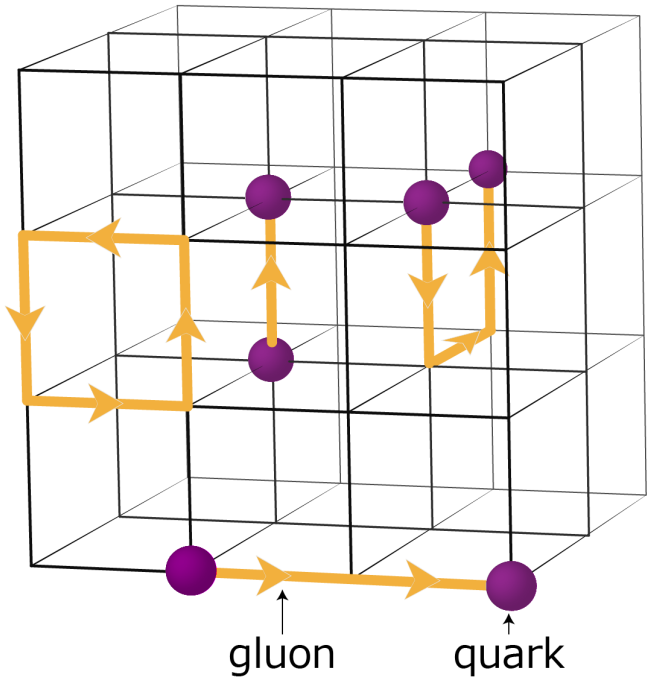
格点 *QCD*

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D} \cup_\mu e^{-S[\bar{\psi},\psi,\mathrm{U}_\mu]}$$

$$= \int \mathcal{D} \cup_\mu e^{-S_g[U_\mu]} \det \mathcal{M}\,[U_\mu]$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int \mathcal{D} \cup_\mu \det \mathcal{M}\,[U_\mu]$$

$$\times\, \mathcal{O}\,[\bar{\psi}, \psi, U_\mu]\, e^{-S[\bar{\psi},\psi,\mathrm{U}_\mu]}$$



组态

- 规范场作用量

$$S_{II} = \beta \left\{ \frac{5}{3}\frac{\Omega_{\rm sp}}{\xi u_s^4} + \frac{4}{3}\frac{\xi\Omega_{\rm tp}}{u_s^2 u_t^2} - \frac{1}{12}\frac{\Omega_{\rm sr}}{\xi u_s^6} - \frac{1}{12}\frac{\xi\Omega_{\rm str}}{u_s^4 u_t^2} \right\}$$

β	ξ	a_s(fm)	La_s(fm)	$L^3 \times T$	$N_{\rm conf.}$
2.4	5	0.222(2)	1.78	$8^3 \times 96$	20 000
2.8	5	0.138(1)	1.66	$12^3 \times 144$	20 000
3.0	5	0.110(1)	1.76	$16^3 \times 160$	10 000

- 淬火近似：比较便宜的产生大量组态，胶球会有更良好的定义。

定标

- 通过 Sommer 参数来设置标度

$$W(R,t) = Z(\hat{R})e^{-\hat{t}\hat{V}(R)}, t \to \infty \tag{1}$$

$$\hat{V}(\hat{R}) = \hat{V}_0 + \frac{\hat{\alpha}}{\hat{R}} + \hat{\sigma}\hat{R} \tag{2}$$

$$R^2 \frac{dV(R)}{dR}\bigg|_{R=r_0} = 1.65 \tag{3}$$

- 也通过 Wilson flow 的方法做了检验。

费米子作用量

- 采用 tadpole 改进的费米子作用量

$$\mathcal{M}_{xy} = \delta_{xy}\sigma + \mathcal{A}_{xy}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{xy} =& \delta_{xy}\left[\frac{1}{2\kappa_{\max}} + \rho_t \sum_{i=1}^{3} \sigma_{0i}\mathcal{F}_{0i} + \rho_s\left(\sigma_{12}\mathcal{F}_{12} + \sigma_{23}\mathcal{F}_{23} + \sigma_{31}\mathcal{F}_{31}\right)\right] \\ & - \sum_{\mu} \eta_\mu \left[\left(1-\gamma_\mu\right) U_\mu(x)\delta_{x+\mu,y} + \left(1+\gamma_\mu\right) U_\mu^\dagger(x-\mu)\delta_{x-\mu,y}\right]\end{aligned} \tag{4}$$

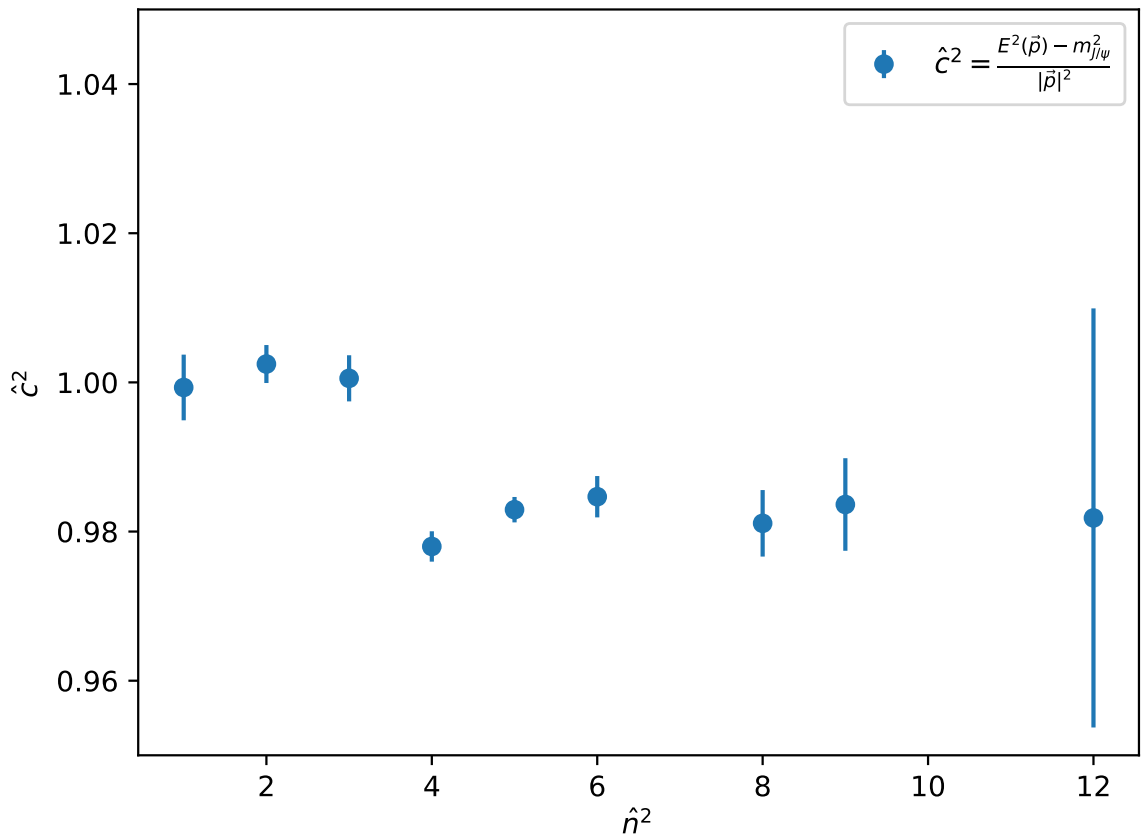
其中

$$\eta_i = v/\left(2u_s\right), \quad \eta_0 = \xi/2, \quad \sigma = 1/(2\kappa) - 1/\left(1\kappa_{\max}\right)$$

$$\rho_t = c_{SW}(1+\xi)/\left(4u_s^2\right), \quad \rho_s = c_{SW}/\left(2u_s^4\right)$$

夸克质量及裸光速

- 需要调节夸克质量参数 κ及裸光速 ν给出物理的 J/ψ质量及满足色散关系。



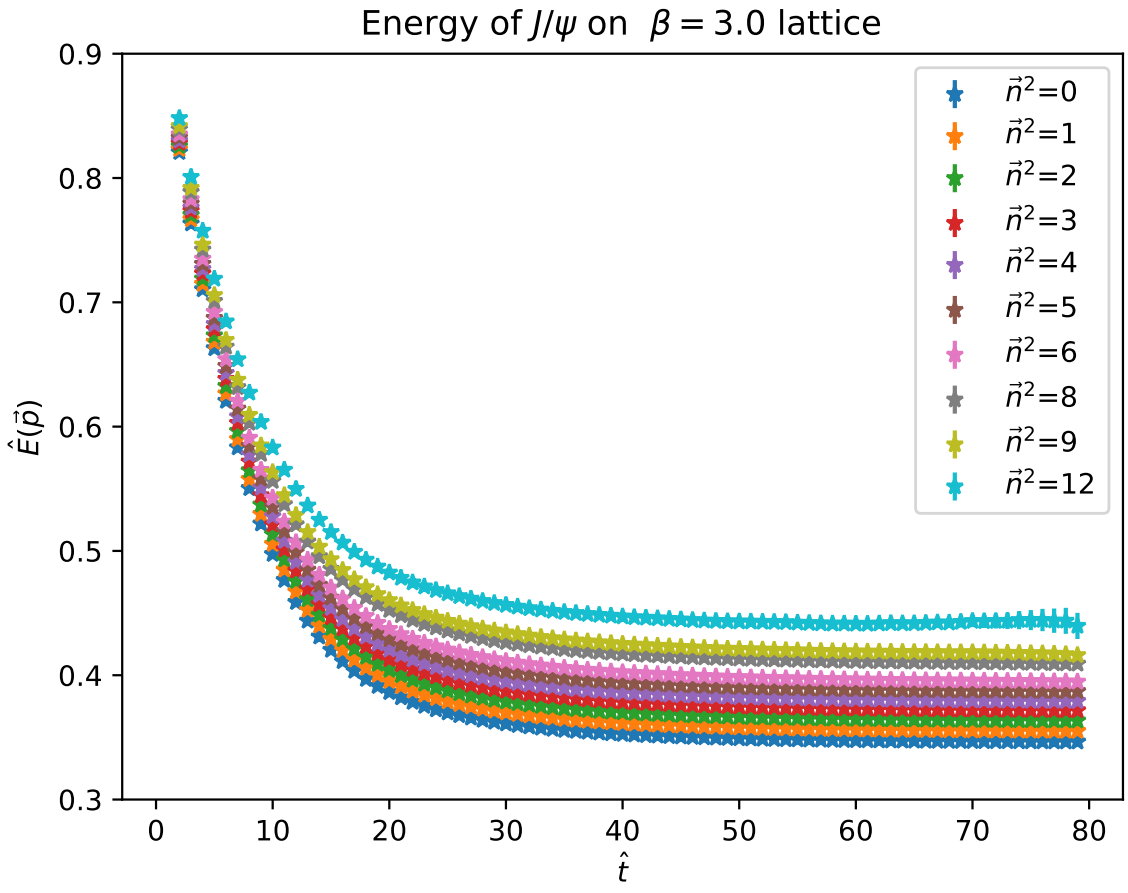
质量谱

- 格点上通过计算两点关联函数来抽取强子质量

$$
\begin{aligned}
C^{(2)}(\vec{p},t) &= \sum_{\vec{x}} e^{-\vec{p}\cdot\vec{x}} \left\langle 0 \left| \mathcal{O}(\vec{x},t)\mathcal{O}^{\dagger}(0,0) \right| 0 \right\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \langle 0|\mathcal{O}(\vec{p},0)|n(\vec{p})\rangle \frac{e^{-E_n(\vec{p})t}}{2E_n(\vec{p})} \\
&\quad \times \left\langle n(\vec{p}) \left| O^{\dagger}(0,0) \right| 0 \right\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z^{(n)}Z^{(n)*}}{2E_n(\vec{p})} e^{-E_n(\vec{p})t}
\end{aligned}
$$

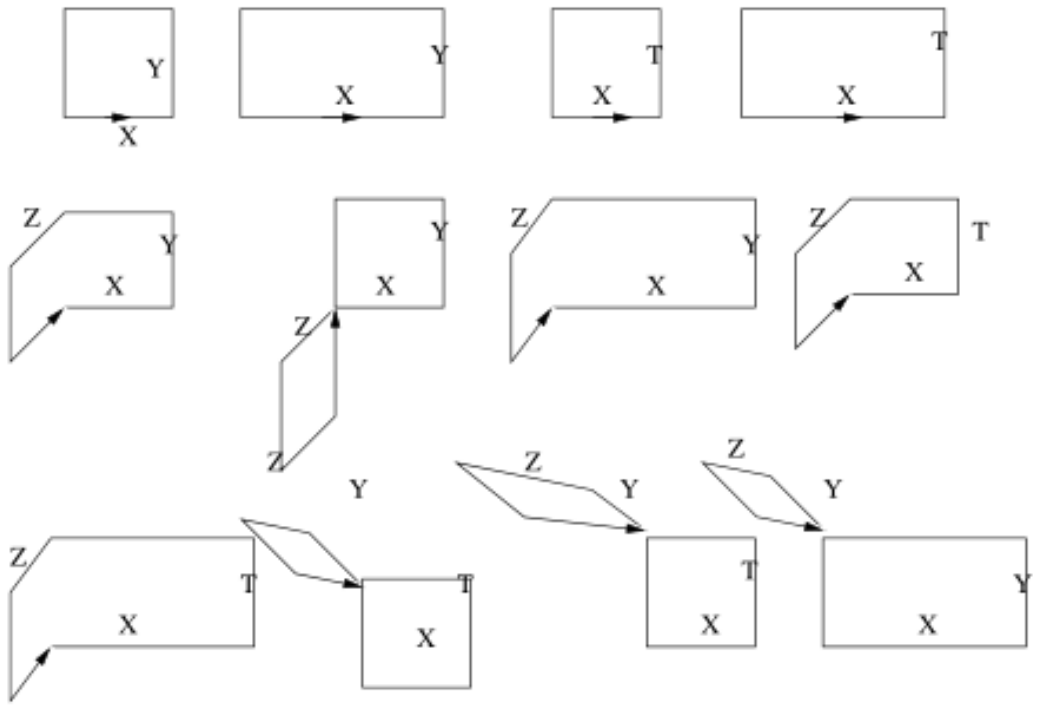
质量谱

- 通过计算 $\langle \mathcal{O}_{J/\psi}(\vec{p},t)\mathcal{O}^{\dagger}_{J/\psi}(\vec{0},0)\rangle$得到 J/ψ的质量



赝标量胶球算符

- 通过不同形状的 Wilson 圈来构建胶球算符



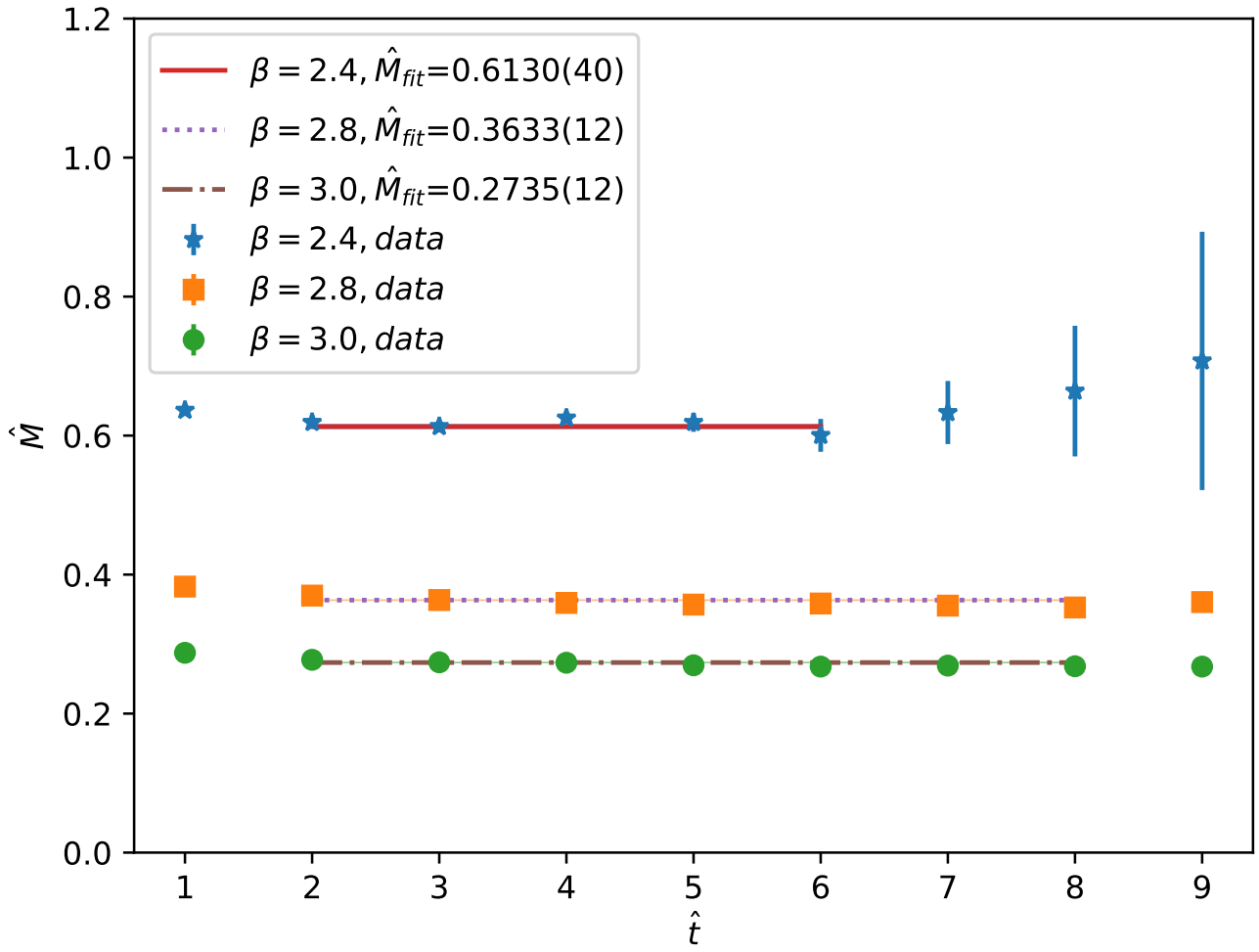
PRD 73,014516(2006)

赝标量胶球算符

- 通过变分法，来得到主要投影到基态赝标量胶球的算符

$$C_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\tau} \left\langle 0 \left| \phi_{\alpha}^{R}(t+\tau)\phi_{\beta}^{R}(\tau) \right| 0 \right\rangle$$
$$C\left(t_D\right) V^R = e^{-t_D m(t_D)} C(0) V^R \tag{5}$$

赝标量胶球有效质量


$\beta = 2.4, \hat{M}_{fit}$=0.6130(40)
$\beta = 2.8, \hat{M}_{fit}$=0.3633(12)
$\beta = 3.0, \hat{M}_{fit}$=0.2735(12)
$\beta = 2.4, data$
$\beta = 2.8, data$
$\beta = 3.0, data$
$\hat{M}$
$\hat{t}$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1
2
3
4
5
6
7
8
9

J/ψ辐射衰变

- 在 J/ψ辐射衰变到胶球的宽度公式为

$$\Gamma_{J/\psi\to\gamma G} = \frac{1}{24\pi}\frac{|\vec{k}|}{M_{J/\psi}^2}\sum_{\lambda_{J/\psi},\lambda_\gamma,\lambda_G}\left|\mathcal{M}_{\lambda_{J/\psi},\lambda_\gamma,\lambda_6}\left(\vec{p}_i,\vec{p}_f\right)\right|^2 \tag{6}$$

其中树图阶的电磁衰变振幅

$$M_{r,r_\gamma,r_G} = \epsilon_\mu^*\left(\vec{q},r_\gamma\right)\left\langle G\left(\vec{p}_f,r_G\right)\left|j^\mu(0)\right|J/\psi\left(\vec{p}_i,r\right)\right\rangle \tag{7}$$

$$j^\mu(0) = \bar{\psi}(0)\gamma_\mu\psi(0)$$

辐射衰变

- 跃迁矩阵元可以分解成形状因子的组合

$$\left\langle G\left(\vec{p}_f, r_G\right)\left|\mathrm{j}^\mu(0)\right|\mathrm{J}/\psi\left(\vec{p}_i, r\right)\right\rangle = M(Q^2)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \times p_{i,\nu} p_{f,\rho} \epsilon_\sigma\left(\vec{p}_i, \lambda_{J/\psi}\right) \tag{8}$$

- 从而总宽度可以直接由在壳的形状因子给出

$$\Gamma_{J/\psi\to\gamma X} = \frac{1}{12\pi}|\vec{k}|^3|M(0)|^2 \tag{9}$$

三点关联函数

- 另一方面，根据 LSZ 约化，跃迁矩阵元可以通过计算三点关联函数得到

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(3)}_{i,\mu,j}\left(\vec{q};t_f,t\right) = \frac{1}{T}\sum_{\tau=0}^{T-1}\sum_{\vec{y}} e^{-i\vec{q}\rangle}\left\langle \Phi^{(i)}\left(t_f+\tau\right)\right. \\
\left.\times J_\mu(\vec{y},t+\tau)O_{V_j}(\overrightarrow{0},\tau)\right\rangle \\
= \sum_{T,V,r}\frac{e^{-M_T(t_f-t)}e^{-E_v(\vec{q})t}}{2M_T V_3 2E_v(\vec{q})} \\
\times\left\langle 0\left|\Phi^{(i)}(0)\right|G_i(\vec{0})\right\rangle\left\langle G_i(\vec{0})\left|J_\mu(0)\right|V(\vec{q},r)\right\rangle \\
\times\left\langle V(\vec{q},r)\left|O^\dagger_{V,j}(0)\right|0\right\rangle
\end{aligned}
\tag{10}
$$

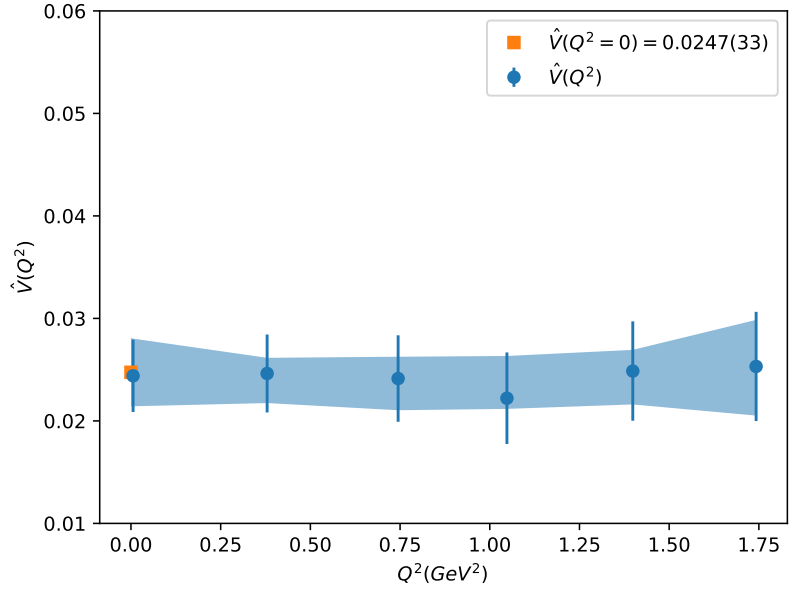
形状因子

- 定义如下的比值，从时间上稳定的平台中拟合出的 $M_{r,r_\gamma,r_G}(\vec{q})$

$$R^{\mu i}\left(\vec{q}, t_f, t\right) = \Gamma^{(3),\mu i}\left(\vec{q}, t_f, t\right) \sqrt{\frac{2E_i\Gamma_i^{(2)}\left(\vec{p}_i, t_f - t\right)}{\Gamma_i^{(2)}\left(\vec{p}_i, t\right)\Gamma_i^{(2)}\left(\vec{p}_i, t_f\right)}} \times \sqrt{\frac{2E_f\Gamma_f^{(2)}\left(\vec{p}_f, t\right)}{\Gamma_f^{(2)}\left(\vec{p}_i, t_f - t\right)\Gamma_i^{(2)}\left(\vec{p}_i, t_f\right)}} \tag{11}$$

形状因子

- 根据多级分解公式可以得到 Q^2依赖的形状因子 $M(Q^2)$或 $V(Q^2) = \frac{M_G + M_{J/\psi}}{2} M(Q^2)$。通过外推到 $Q^2 = 0$得到在壳的 $V(Q^2)$



流重整化系数

- 在计算中，我们采用的是连续情形下的守恒流 $j^\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$，并不对应于格点上作用量的守恒流，需要计算其重整化系数

$$Z_V^{(\mu)}(t) = \frac{p^\mu}{E(\vec{p})} \frac{\frac{1}{2}\Gamma^{(2)}_{\eta_c}(\vec{p}; t_f = \frac{n_t}{2})}{\Gamma^{(3),\mu}(\vec{p}, \vec{p}, \frac{n_t}{2}, t)} \tag{12}$$

流重整化系数

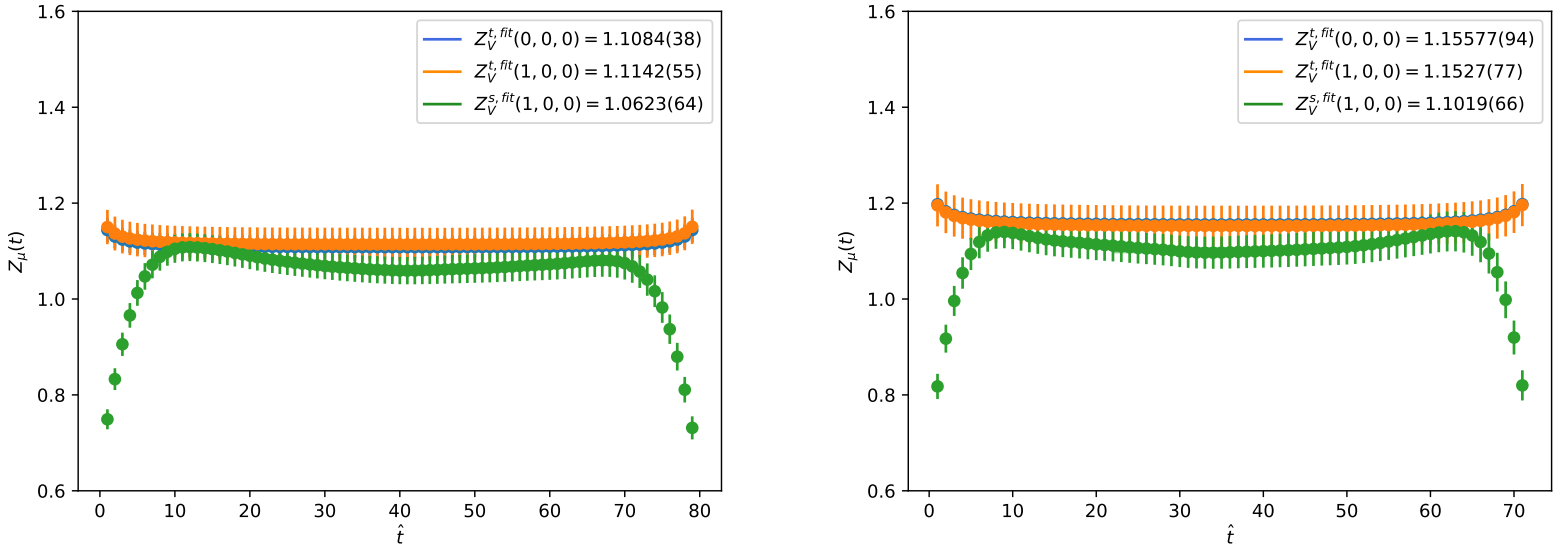
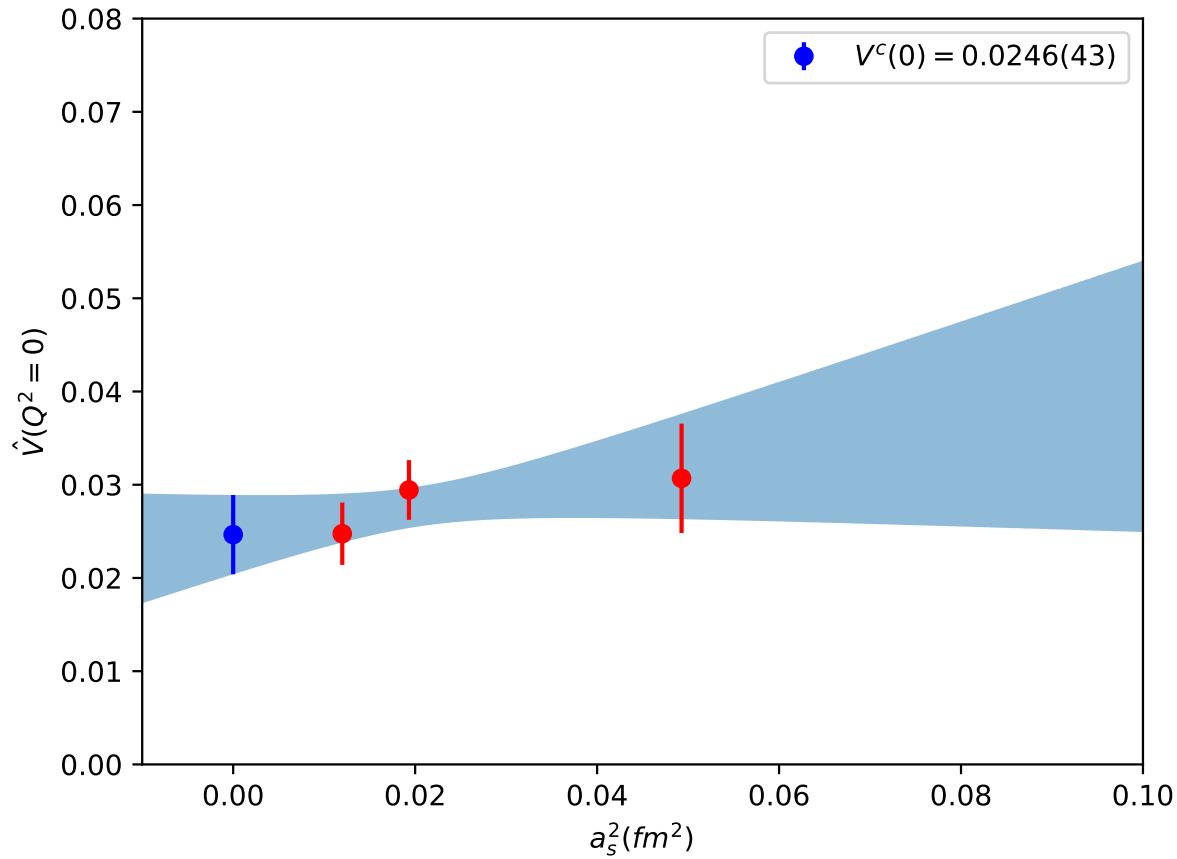


Figure: $\beta = 3.0$及 $\beta = 2.8$格子上的 Z_V

连续外推

- 通过在不同大小的格子上进行模拟计算，最终需要外推到连续极限



最终的结果

- 最终给出在壳形状因子

$$\hat{V}(0)^{cont.} = 0.0246(43) \tag{13}$$

- 相应的衰变宽度及分支比

$$\Gamma(J/\psi \to \gamma G_{0^{-+}}) = 0.0215(74)\,keV \tag{14}$$

$$Br(J/\psi \to \gamma G_{0^{-+}}) = 2.31(80) \times 10^{-4} \tag{15}$$

讨论

- 与标量及张量胶球相比，赝标量胶球的在 J/ψ辐射衰变过程中的产率相对较低。
- 扣除掉相空间的影响，J/ψ耦合到末态 $\gamma G_{0^{-+}}$并不比 $\gamma H_{0^{-+}}$大。
- BESIII 发现的 $X(2120), X(2370), X(2500)$等粒子值得进一步关注。

总结与展望

- 我们首次在淬火近似下的格点 QCD 上计算了 J/ψ辐射衰变到赝标量胶球的过程。
- 赝标量胶球在 J/ψ辐射衰变过程并没有显著的增强，需要理论上给出更多的判断依据。
- 需要实验、唯象、格点三方面的共同努力。
- 正在开展关于胶球性质的进一步研究，如 BS 波函数、辐射衰变等。

谢谢！

- 胶球在 QCD 下是否具有明确的定义？
- 胶球的质量分解或许可以提供一些依据。
- 淬火近似虽然偏离的真实物理，但同样可以为我们提供理解强子谱的重要物理信息。