



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

为什么要做耦合道计算

吴佳俊

2020.10.28



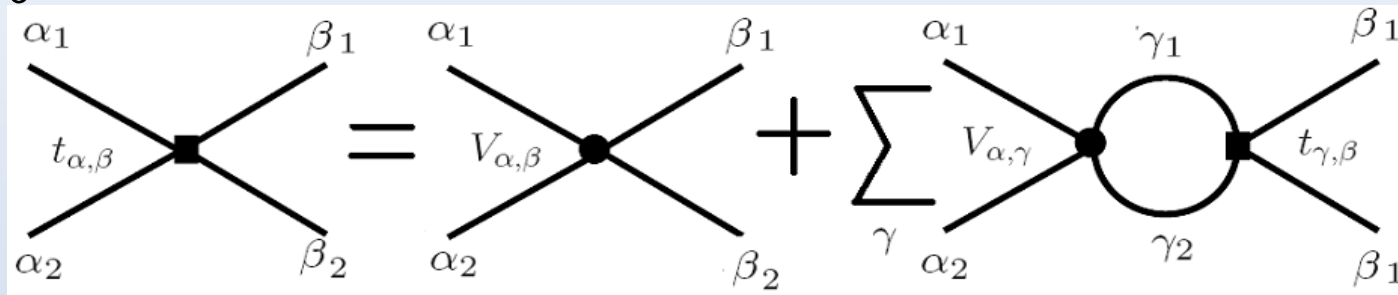
目录

- 什么是耦合道计算？ What
- 为什么要做耦合道计算？ Why
- 怎么来做耦合道计算（3体）？ How

A. Matsuyama, T. Sato and T. S. Lee,
Phys. Rept. 439, 193 (2007)
[arXiv:nucl-th/0608051]

什么是耦合道计算

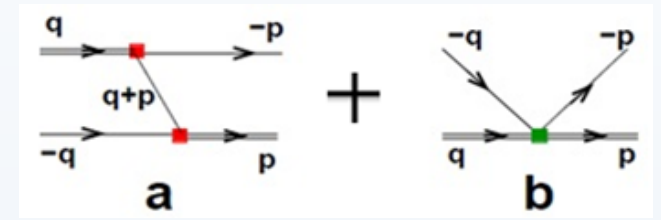
- 耦合道模型，就是指在基本的相互作用的假定下，把所有可约图都进行计算，这些可约图的效应可以认为是重散射的过程。



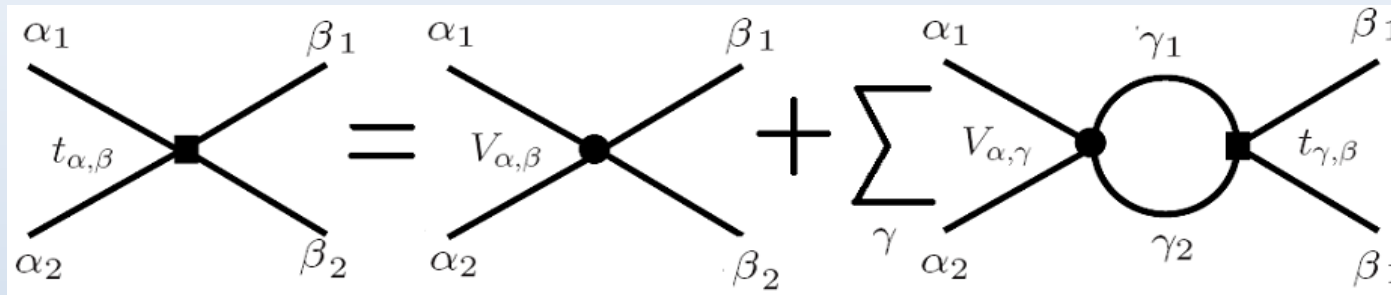
$$T = V + VGT$$



什么是耦合道计算



- 耦合道模型，就是指在基本相互作用的假定下，把所有可约图都进行计算，这些可约图的效应可以认为是重散射过程。



$$T=V+VGT$$

三体也是如此，只是相互作用有 V_{12} ， V_{23} ， V_{13} 三种，而 G 是一个三体的传播子。更加特殊的是，三体里有 z diagram，这个过程真正体现的三体的特殊性。



为什么要做耦合道计算

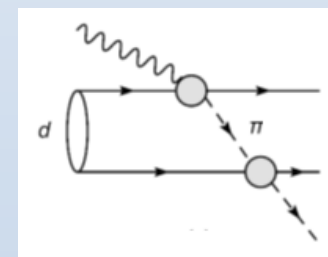
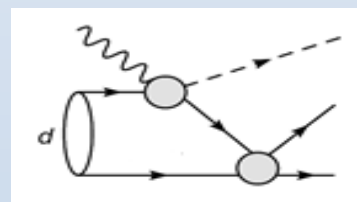
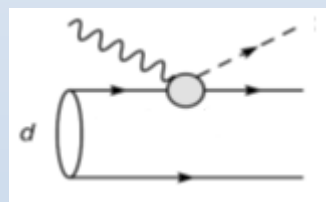
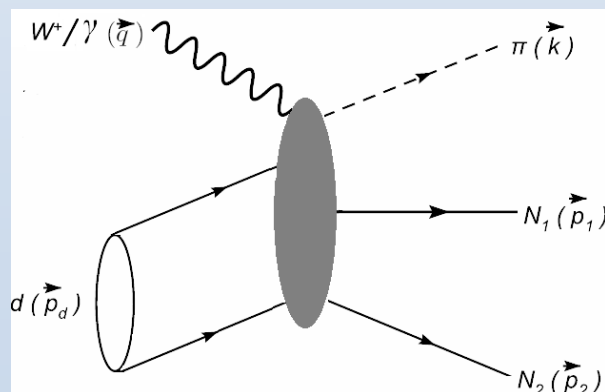
- **非微扰的基本要求。**其实一般用共振态或者其他方式通过几个树图阶的贡献有时候能够成功的解释实验数据，在我看来实际上这是某种巧合，或者是把更复杂的内容藏在了共振态相关的参数中，比如耦合常数，截断参数等等。
- 关键的问题是在没有计算圈图计算时，你永远不知道圈图的贡献是否显著。而且对我们真正去理解物理反应的过程带了困扰。而且单独计算高圈的贡献非常困难。
- 而耦合道方法是提供了一劳永逸的方案。从另一个方面看，

$$\frac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + \dots$$



为什么要做耦合道计算

- **为了理论的完整性。**所谓的完整性就是么正性的要求，或者就是几率的守恒。实际上这仍然是依赖于模型的搭建，或者说就是channel的选择，当channel选定以后，应用耦合道方法就把所有相关的效应都考虑了。
- 这种理论完整性的巨大意义是，在你搭建完这一套模型以后，所有的参数和信息都是可以固定下来的，在其他地方进行应用，于是有一定的预言作用。
- 比如我在计算 $\gamma d \rightarrow p n \pi$ 的过程里，我应用搭建好的两体体系耦合道模型，可以把这个过程在一圈图的基础上进行完整计算。



每一个原点都是完整的两体散射的振幅，从这些振幅出发的计算为在3体末态衰变中提供了一个完全的相互作用。



为什么要做耦合道计算

- **连接了不同的过程。**实际上，耦合道的模型真正把不同的耦合道之间紧密的联系起来了，最大程度的简化了未知参数。可以对不同末态，甚至不同物理过程纳入统一的计算框架，在最少的参数下来拟合实验数据得到一个明确的模型。
- 只用树图的贡献显然是不能联系两个不同末态的结果。实验数据之间在理论上就是相互独立的，但是耦合道模型实际上是充分考虑了不同过程的关联。
- 这种关联的背后是强子物理的复杂性的体现，有时候即使拟合好了实验的结果，可能并不一定是背后的真实物理。



为什么要做耦合道计算

- **圈图阶贡献的特殊性。**圈图的计算实际上是非微扰效应的体现，所以很多由圈图的贡献带来的特殊效应，在我们这个耦合道模型中可以自动包括。
- 圈图的奇异性。比如三角奇异性，其实就是三体么正性过程中的一阶圈图的效应
- 对同位旋破坏等等特殊情况的效果。在之前的例子中可以看到，同位旋破坏的原因是带电和中性的K介子的质量不同，这个效应可以自动的在耦合道模型中体现出来。



怎么做耦合道计算（3体）

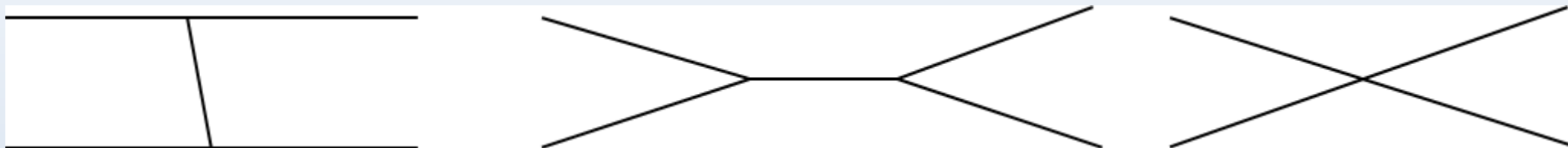
关键的一个问题是什么是3体系统。



怎么做耦合道计算（3体）

关键的一个问题是什么是3体系统。

那么首先看什么是一个2体系统，我们来看这几个图，



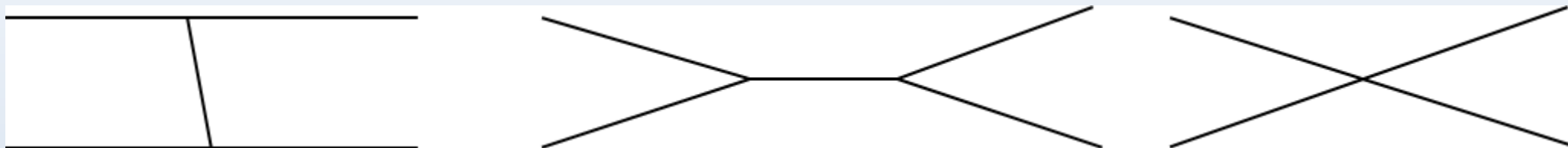
所以第一个图是 t , u 道的表现，实际上严格意义上说这个图里已经隐含了3体的信息，所以在严格的两体系统里面，我们可以不考虑第一个图。



怎么做耦合道计算（3体）

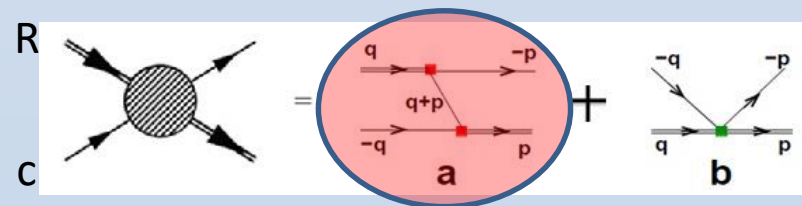
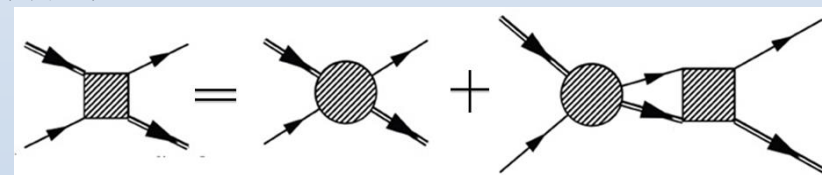
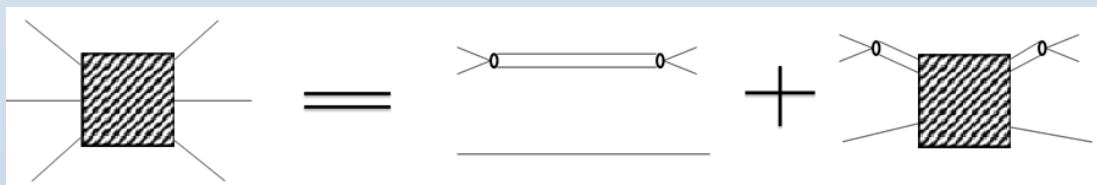
关键的一个问题是什么是3体系统。

那么首先看什么是一个2体系统，我们来看这几个图，



所以第一个图是t, u道的表现，实际上严格意义上说这个图里已经隐含了3体的信息，所以在严格的两体系统里面，我们可以不考虑第一个图。

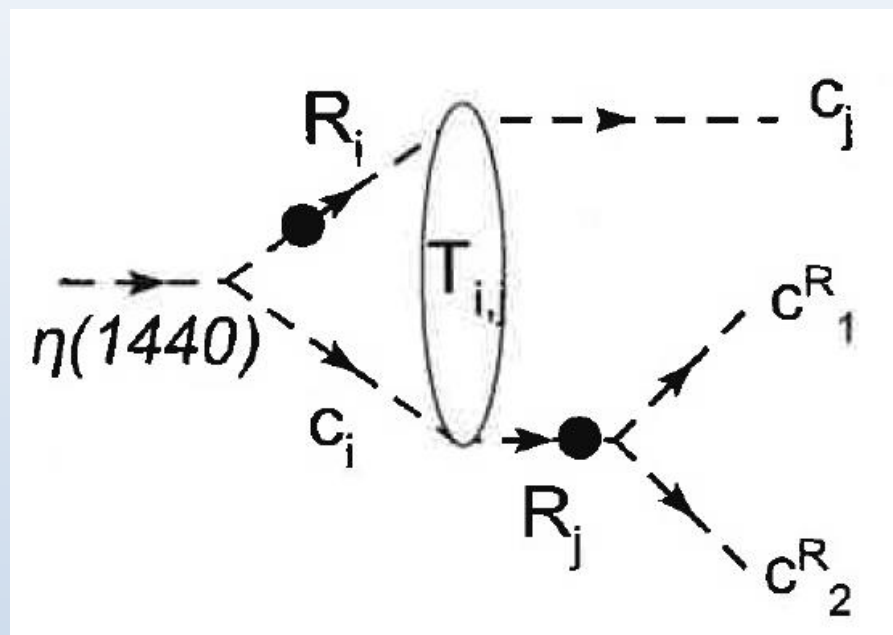
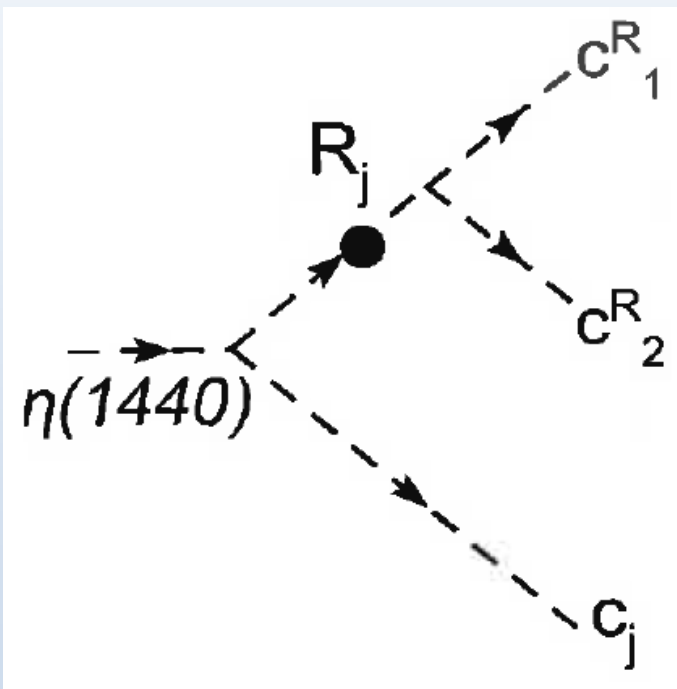
同样3体系统里面也有这个问题，所以我们这样来构架3体的体系。





怎么做耦合道计算（3体）

$$\eta(1405/1475) \rightarrow K \bar{K} \pi, \eta \pi \pi, \text{ and } \pi \pi \pi$$



关键点就是如何
选择 **Rc** 耦合道

求解T和R是关键问题大
致分成两步来进行

1. 两体过程,

$$c_i c_j \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow c'_i c'_j$$

2. 准两体过程,

$$\mathcal{R} c \rightarrow \mathcal{R}' c'$$

怎么做耦合道计算（3体）

$\eta(1405/1475) \rightarrow \bar{K}K\pi, \pi\pi\eta, \text{ and } \pi\pi\pi$

关键点就是如何选择 **Rc** 耦合道
 $I=0$ & $J^{PC}=0^{-+}$

怎么做耦合道计算（3体）

$\eta(1405/1475) \rightarrow \bar{K}K\pi$, $\pi\pi\eta$, and $\pi\pi\pi$

charge	channel	Resonance
0	$\pi^0\pi^0$	ρ^0, f_0, f_2
	$\pi^+\pi^-$	ρ^0, f_0, f_2
	$K^0\bar{K}^0$	$\rho^0, f_0, f_2, a_0, a_2$
	K^+K^-	$\rho^0, f_0, f_2, a_0, a_2$
	$\pi^0\eta$	a_0^0, a_2^0
+	$\pi^+\pi^0$	ρ^+
	$K^+\bar{K}^0$	ρ^+, a_0^+, a_2^+
	$\pi^+\eta$	a_0^+, a_2^+
-	$\pi^-\pi^0$	ρ^-
	$K^-\bar{K}^0$	ρ^-, a_0^-, a_2^-
	$\pi^-\eta$	a_0^-, a_2^-

关键点就是如何选择 **Rc** 耦合道
 $I=0$ & $J^{PC}=0^{-+}$

$f_0\pi$, $a_0\pi$, $f_0\eta$, $\bar{K}^*K$

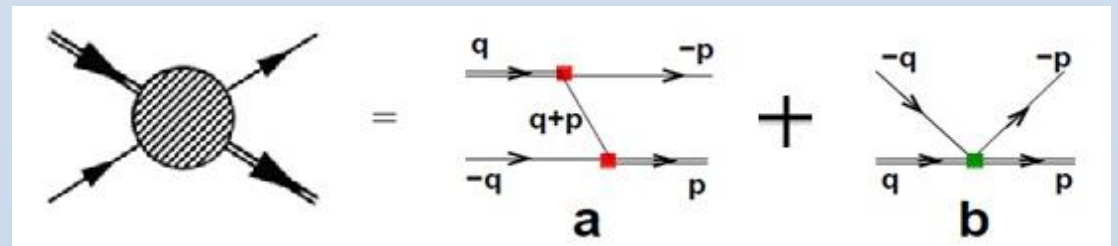
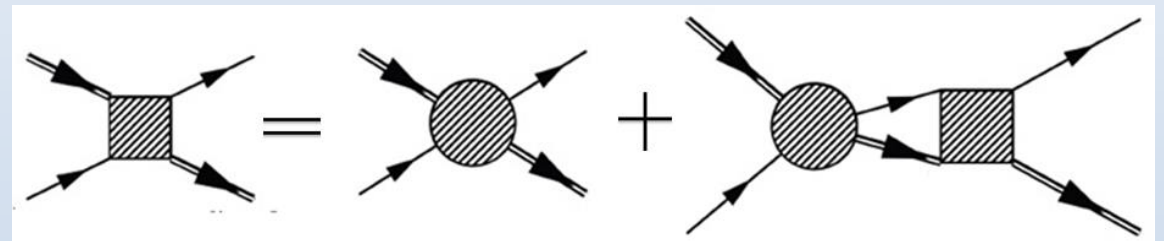
怎么做耦合道计算 (3体)

$\eta(1405/1475) \rightarrow \bar{K}K\pi$, $\pi\pi\eta$, and $\pi\pi\pi$

charge	channel	Resonance
0	$\pi^0\pi^0$	ρ^0, f_0, f_2
	$\pi^+\pi^-$	ρ^0, f_0, f_2
	$K^0\bar{K}^0$	$\rho^0, f_0, f_2, a_0, a_2$
	K^+K^-	$\rho^0, f_0, f_2, a_0, a_2$
	$\pi^0\eta$	a_0^0, a_2^0
+	$\pi^+\pi^0$	ρ^+
	$K^+\bar{K}^0$	ρ^+, a_0^+, a_2^+
	$\pi^+\eta$	a_0^+, a_2^+
-	$\pi^-\pi^0$	ρ^-
	$K^-\bar{K}^0$	ρ^-, a_0^-, a_2^-
	$\pi^-\eta$	a_0^-, a_2^-

关键点就是如何选择 **Rc** 耦合道
 $I=0$ & $J^{PC}=0^{-+}$

$f_0\pi$, $a_0\pi$, $f_0\eta$, $\bar{K}^*K$



怎么做耦合道计算（3体）

$$\eta(1405/1475) \rightarrow \bar{K}K\pi, \pi\pi\eta, \text{ and } \pi\pi\pi$$

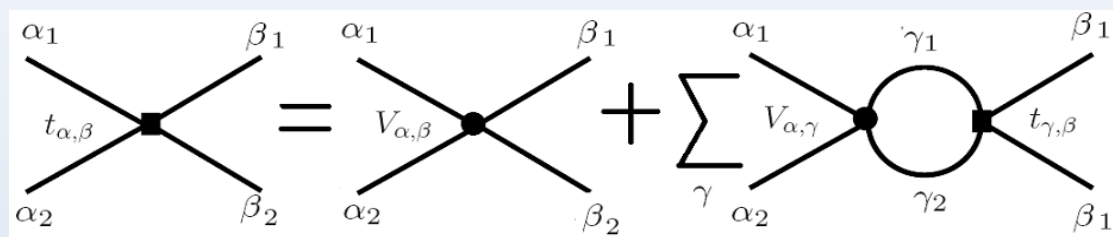
求解T和R是关键问题大致分成两步来进行

1. 两体过程, $c_i c_j \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow c'_i c'_j$
2. 准两体过程, $\mathcal{R} c \rightarrow \mathcal{R}' c'$

怎么做耦合道计算 (3体)

$$\eta(1405/1475) \rightarrow \bar{K}K\pi, \pi\pi\eta, \text{ and } \pi\pi\pi$$

1. 两体过程, $c_i c_j \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow c'_i c'_j$



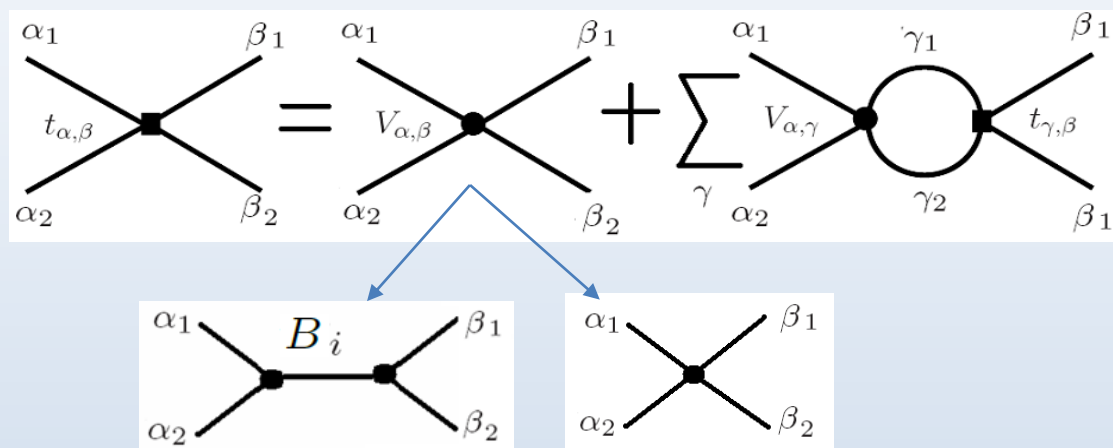
求解T和R是关键问题大致分成两步来进行

1. 两体过程, $c_i c_j \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow c'_i c'_j$
2. 准两体过程, $\mathcal{R} c \rightarrow \mathcal{R}' c'$

怎么做耦合道计算 (3体)

$$\eta(1405/1475) \rightarrow \bar{K}K\pi, \pi\pi\eta, \text{ and } \pi\pi\pi$$

1. 两体过程, $c_i c_j \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow c'_i c'_j$



求解T和R是关键问题大致分成两步来进行

1. 两体过程, $c_i c_j \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow c'_i c'_j$
2. 准两体过程, $\mathcal{R} c \rightarrow \mathcal{R}' c'$

相互作用形式

$$v_{a'b',ab}^{LI}(q', q) = w_{a'b'}^{LI}(q') h_{a'b',ab}^{LI} w_{ab}^{LI}(q)$$

$$w_{ab}^{LI}(q) = \frac{1}{\sqrt{E_a(q)E_b(q)}} \left[\frac{1}{1 + (q/b_{ab}^{LI})^2} \right]^{2+L/2} \left(\frac{q}{m_\pi} \right)^L$$

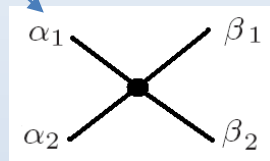
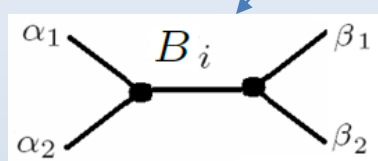
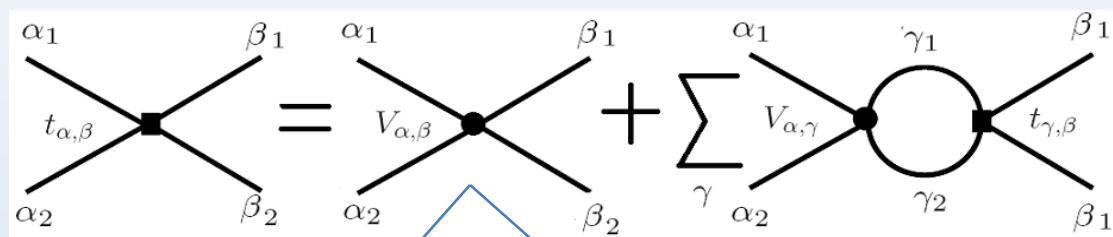
$$\tilde{f}_{ab,R}^{LI}(q) = g_{ab,R} \frac{m_\pi}{\sqrt{m_R E_a(q) E_b(q)}} \left[\frac{1}{1 + (q/c_{ab,R})^2} \right]^{1+(L/2)} \left(\frac{q}{m_\pi} \right)^L$$



怎么做耦合道计算 (3体)

$$\eta(1405/1475) \rightarrow \bar{K}K\pi, \pi\pi\eta, \text{ and } \pi\pi\pi$$

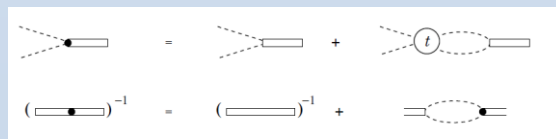
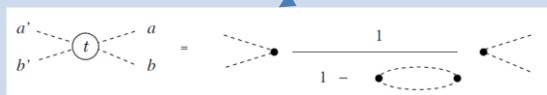
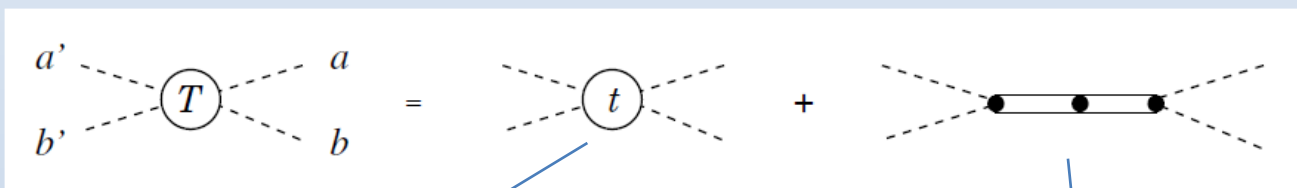
1. 两体过程, $c_i c_j \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow c'_i c'_j$



求解T和R是关键问题大致分成两步来进行

1. 两体过程, $c_i c_j \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow c'_i c'_j$
2. 准两体过程, $\mathcal{R} c \rightarrow \mathcal{R}' c'$

相互作用形式



$$v_{a'b',ab}^{LI}(q', q) = w_{a'b'}^{LI}(q') h_{a'b',ab}^{LI} w_{ab}^{LI}(q)$$

$$w_{ab}^{LI}(q) = \frac{1}{\sqrt{E_a(q)E_b(q)}} \left[\frac{1}{1 + (q/b_{ab}^{LI})^2} \right]^{2+L/2} \left(\frac{q}{m_\pi} \right)^L$$

$$\tilde{f}_{ab,R}^{LI}(q) = g_{ab,R} \frac{m_\pi}{\sqrt{m_R E_a(q) E_b(q)}} \left[\frac{1}{1 + (q/c_{ab,R})^2} \right]^{1+(L/2)} \left(\frac{q}{m_\pi} \right)^L$$

怎么做耦合道计算（3体）

$\eta(1405/1475) \rightarrow \bar{K}K\pi, \pi\pi\eta, \text{ and } \pi\pi\pi$

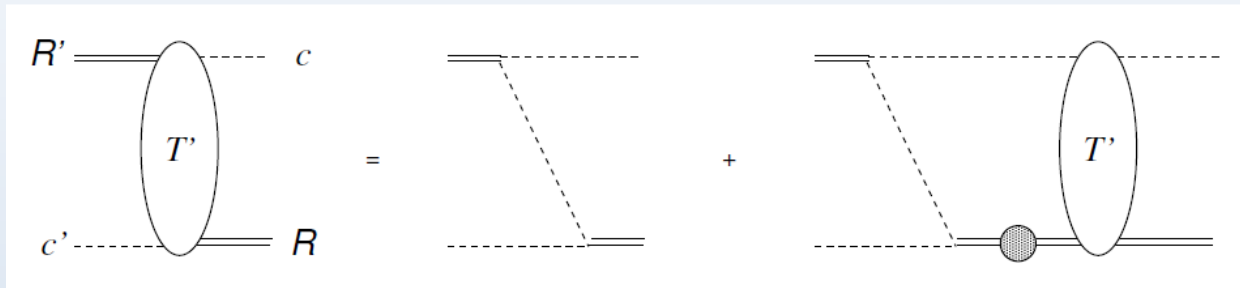
求解T和R是关键问题大致分成两步来进行

1. 两体过程, $c_i c_j \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow c'_i c'_j$
2. 准两体过程, $\mathcal{R} c \rightarrow \mathcal{R}' c'$

怎么做耦合道计算 (3体)

$$\eta(1405/1475) \rightarrow \bar{K}K\pi, \pi\pi\eta, \text{ and } \pi\pi\pi$$

2. 准两体过程, $\mathcal{R}c \rightarrow \mathcal{R}'c'$



求解T和R是关键问题大致分成两步来进行

1. 两体过程, $c_i c_j \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow c'_i c'_j$
2. 准两体过程, $\mathcal{R}c \rightarrow \mathcal{R}'c'$

$$T_{(c'\mathcal{R}')_{l'}, (c\mathcal{R})_l}^{JP}(p', p; E) = Z_{(c'\mathcal{R}')_{l'}, (c\mathcal{R})_l}^{\bar{c}, JP}(p', p; E) + \sum_{c'', \mathcal{R}'', \mathcal{R}''', l''} \int_0^\infty p''^2 dp'' Z_{(c'\mathcal{R}')_{l'}, (c''\mathcal{R}''')_{l''}}^{\bar{c}', JP}(p', p''; E) G_{c''\mathcal{R}''', c''\mathcal{R}''}(p'', E) T_{(c''\mathcal{R}'')_{l''}, (c\mathcal{R})_l}^{JP}(p'', p; E)$$

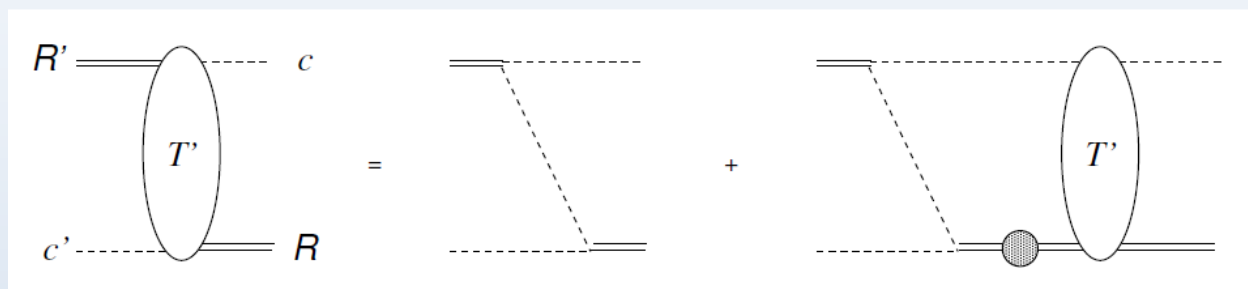
$$\mathbf{T} = \mathbf{Z} + \mathbf{ZGT}$$



怎么做耦合道计算 (3体)

$$\eta(1405/1475) \rightarrow \bar{K}K\pi, \pi\pi\eta, \text{ and } \pi\pi\pi$$

2. 准两体过程, $\mathcal{R}c \rightarrow \mathcal{R}'c'$



求解T和R是关键问题大致分成两步来进行

1. 两体过程, $c_i c_j \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow c'_i c'_j$

2. 准两体过程, $\mathcal{R}c \rightarrow \mathcal{R}'c'$

$$T_{(c'\mathcal{R}')_{l'}, (c\mathcal{R})_l}^{JP}(p', p; E) = Z_{(c'\mathcal{R}')_{l'}, (c\mathcal{R})_l}^{\bar{c}, JP}(p', p; E) + \sum_{c'', \mathcal{R}'', \mathcal{R}''', l''} \int_0^\infty p''^2 dp'' Z_{(c'\mathcal{R}')_{l'}, (c''\mathcal{R}'')_{l''}}^{\bar{c}, JP}(p', p''; E) G_{c''\mathcal{R}''', c''\mathcal{R}''}(p'', E) T_{(c''\mathcal{R}'')_{l''}, (c\mathcal{R})_l}^{JP}(p'', p; E)$$

$$T = Z + ZGT$$

$$G_{c''\mathcal{R}''', c''\mathcal{R}''}(p'', E)$$

$$\begin{aligned} [G^{-1}(p, E)]_{cR', cR} &= [E - \mathcal{E}_c(p) - E_R(p)]\delta_{R', R} - \Sigma_{R', R}^{LI}(p, E - \mathcal{E}_c(p)), & (\mathcal{R}, \mathcal{R}') &= (R, R') \\ [G^{-1}(p, E)]_{cR', cR} &= -\Sigma_{r'_{a'b'}, R}^{LI}(p, E - \mathcal{E}_c(p)), & (\mathcal{R}, \mathcal{R}') &= (R, r'_{a'b'}) \\ [G^{-1}(p, E)]_{cR', cR} &= -\Sigma_{R', r_{ab}}^{LI}(p, E - \mathcal{E}_c(p)), & (\mathcal{R}, \mathcal{R}') &= (r_{ab}, R') \\ [G^{-1}(p, E)]_{cR', cR} &= \delta_{r_{ab}, r'_{a'b'}} - \Sigma_{r'_{a'b'}, r_{ab}}^{LI}(p, E - \mathcal{E}_c(p)), & (\mathcal{R}, \mathcal{R}') &= (r_{ab}, r'_{a'b'}) \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}_x(p) = \sqrt{p^2 + m_x^2}$$

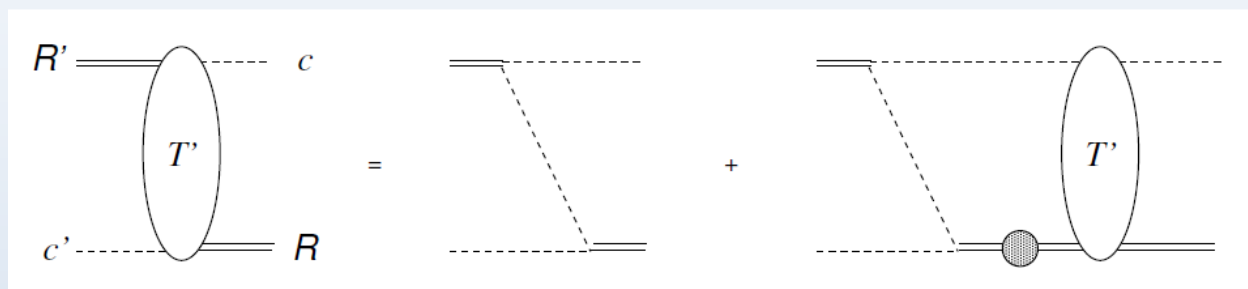
$$\begin{aligned} \Sigma_{R', R}^{LI}(p, E) &= \sum_{ab} \sqrt{\frac{m_{R'} m_R}{E_{R'}(p) E_R(p)}} \int_0^\infty q^2 dq \frac{M_{ab}(q)}{\sqrt{M_{ab}^2(q) + p^2}} \frac{f_{R', ab}^{LI}(q) f_{ab, R}^{LI}(q)}{E - \sqrt{M_{ab}^2(q) + p^2} + i\epsilon} \\ \Sigma_{r'_{a'b'}, R}^{LI}(p, E) &= \sum_{ab} \sqrt{\frac{m_R}{E_R(p)}} \int_0^\infty q^2 dq \frac{M_{ab}(q)}{\sqrt{M_{ab}^2(q) + p^2}} \frac{h_{a'b', ab}^{LI}(q) f_{ab, R}^{LI}(q)}{E - \sqrt{M_{ab}^2(q) + p^2} + i\epsilon}, \\ \Sigma_{R', r_{ab}}^{LI}(p, E) &= \sqrt{\frac{m_{R'}}{E_{R'}(p)}} \int_0^\infty q^2 dq \frac{M_{ab}(q)}{\sqrt{M_{ab}^2(q) + p^2}} \frac{f_{R', ab}^{LI}(q) w_{ab}^{LI}(q)}{E - \sqrt{M_{ab}^2(q) + p^2} + i\epsilon}, \\ \Sigma_{r'_{a'b'}, r_{ab}}^{LI}(p, E) &= \int_0^\infty q^2 dq \frac{M_{ab}(q)}{\sqrt{M_{ab}^2(q) + p^2}} \frac{h_{a'b', ab}^{LI}(q) [w_{ab}^{LI}(q)]^2}{E - \sqrt{M_{ab}^2(q) + p^2} + i\epsilon}, \end{aligned}$$



怎么做耦合道计算 (3体)

$$\eta(1405/1475) \rightarrow \bar{K}K\pi, \pi\pi\eta, \text{ and } \pi\pi\pi$$

2. 准两体过程, $\mathcal{R}c \rightarrow \mathcal{R}'c'$



求解T和R是关键问题大致分成两步来进行

1. 两体过程, $c_i c_j \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow c'_i c'_j$

2. 准两体过程, $\mathcal{R}c \rightarrow \mathcal{R}'c'$

$$T_{(c'\mathcal{R}')_{l'}, (c\mathcal{R})_l}^{JP}(p', p; E) = Z_{(c'\mathcal{R}')_{l'}, (c\mathcal{R})_l}^{\bar{c}, JP}(p', p; E) + \sum_{c'', \mathcal{R}'', \mathcal{R}''', l''} \int_0^\infty p''^2 dp'' Z_{(c'\mathcal{R}')_{l'}, (c''\mathcal{R}''')_{l''}}^{\bar{c}, JP}(p', p''; E) G_{c''\mathcal{R}''', c''\mathcal{R}''}(p'', E) T_{(c''\mathcal{R}'')_{l''}, (c\mathcal{R})_l}^{JP}(p'', p; E)$$

$$T = Z + ZGT$$

$$Z_{(c'\mathcal{R}')_{l'}, (c''\mathcal{R}''')_{l''}}^{\bar{c}, JP}(p', p''; E)$$

$$Z_{(c'\mathcal{R}')_{l'}, (c\mathcal{R})_l}^{c'', JP}(p_{c'}, p_c) = (-1)^{s_{R'}} \sqrt{(2s_{R'} + 1)(2s_R + 1)(2l' + 1)(2l + 1)}$$

$$(-1)^{l+l'+s_R+s_{R'}} = 1$$

from the parity conservation.

$$\times \sum_{l_a, l_b, L', L'', j} (2j + 1)(2L' + 1)(2L'' + 1) \sqrt{\frac{(2s_{R'} + 1)!(2s_R + 1)!}{(2l_a)!(2s_{R'} - 2l_a)!(2l_b)!(2s_R - 2l_b)!}}$$

$$\times \begin{pmatrix} l' & l_a & L' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l & l_b & L'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_R - l_b & j & L' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{R'} - l_a & j & L'' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} l' & l_a & L' \\ s_{R'} - l_a & j & s_{R'} \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} l & l_b & L'' \\ s_R - l_b & j & s_R \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} L'' & s_R - l_b & j \\ L' & s_{R'} - l_a & j \end{matrix} \right\} F_j^{l_a, l_b},$$

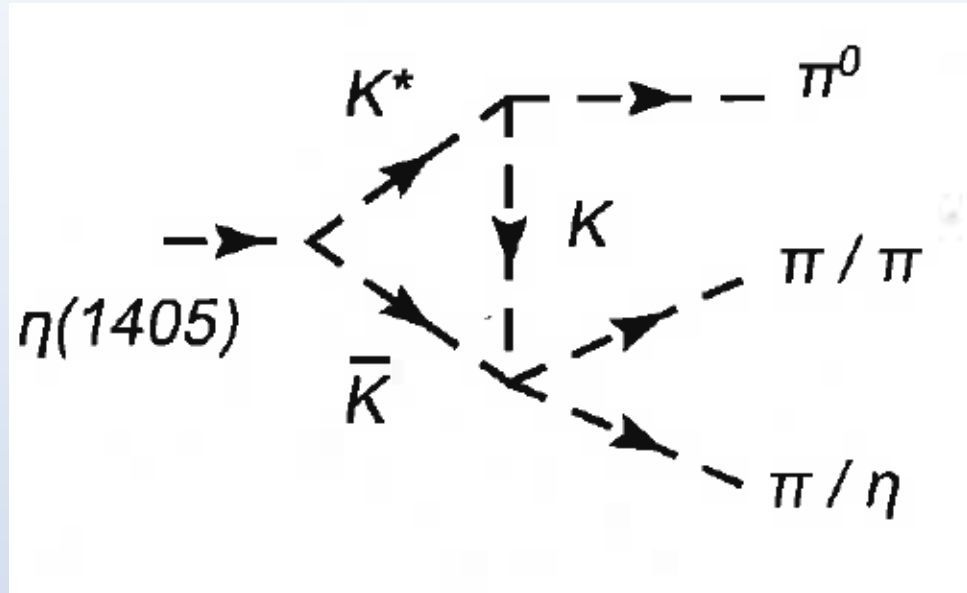
$$F_j^{l_a, l_b} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \frac{BP_j(x)}{E - \mathcal{E}_c(p_c) - \mathcal{E}_{c'}(p_{c'}) - \mathcal{E}_{c''}(p_{c''}) + i\epsilon}$$

$P_j(x)$ is the Legendre function of the degree j

$$B = J(p_c, p_{c'}, q_{c'}) \tilde{f}_{cc', R'}^{s_{R'} t_{R'}}(q_{c'}) J(p_{c'}, p_{c''}, q_c) \tilde{f}_{R, c' c''}^{s_R t_R}(q_c) \\ \times (\lambda_{c'} p_{c'})^{l_a} (\kappa_{c'} p_c)^{s_{R'} - l_a} (\lambda_c p_{c'})^{s_R - l_b} (\kappa_c p_c)^{l_b} (q_c)^{-s_R} (q_{c'})^{-s_{R'}}$$

怎么做耦合道计算 (3体)

$\eta(1405/1475) \rightarrow \bar{K}K\pi$, $\pi\pi\eta$, and $\pi\pi\pi$



$f_0\pi$, $a_0\pi$, $f_0\eta$, $\bar{K}^*K$

	$f_0\pi^0$	$a_0\pi^0$	$a_0^+\pi^-$	$a_0^-\pi^+$	$f_0\eta$	$K^{*0}\bar{K}^0$	$K^{*+}K^-$	$\bar{K}^{*0}K^0$	$K^{*+}K^+$
$f_0\pi^0$	π^0	●	●	●	●	K^0	K^+	$\bar{K}^0$	K^-
$a_0\pi^0$	●	η	●	●	π^0	K^0	K^+	$\bar{K}^0$	K^-
$a_0^+\pi^-$	●	●	●	η	π^+	K^+	●	●	$\bar{K}^0$
$a_0^-\pi^+$	●	●	η	●	π^-	●	K^0	K^-	●
$f_0\eta$	●	π^0	π^+	π^-	●	●	●	●	●
$K^{*0}\bar{K}^0$	K^0	K^0	K^+	●	●	●	●	π^0	π^-
$K^{*+}K^-$	K^+	K^+	●	K^0	●	●	●	π^+	π^0
$\bar{K}^{*0}K^0$	$\bar{K}^0$	$\bar{K}^0$	●	K^-	●	π^0	π^+	●	●
$K^{*-}K^+$	K^-	K^-	$\bar{K}^0$	●	●	π^-	π^0	●	●

谢谢！