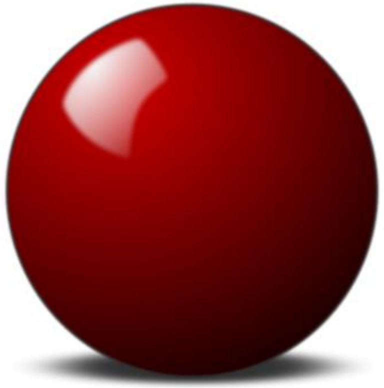
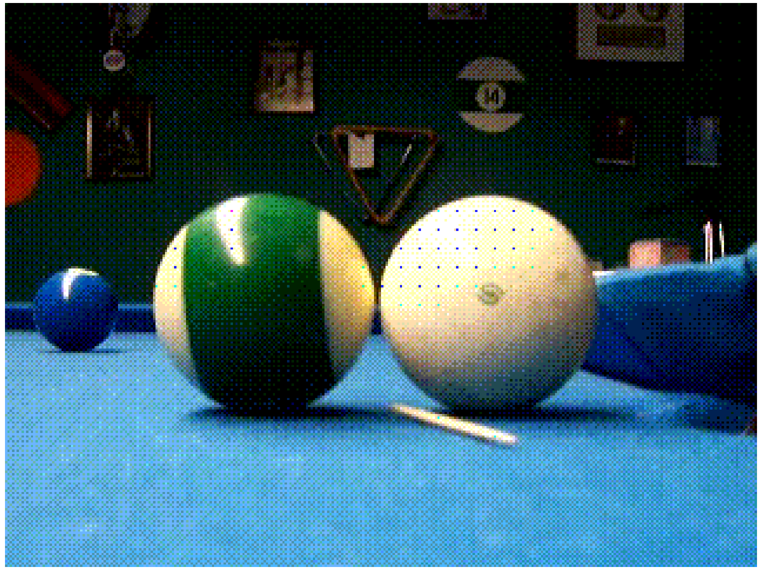
第2讲 运动规律

牛顿方程

惯性系 $m\vec{a}=\vec{F}$

非惯性系 $m\vec{a}'=\vec{F}'$ $\quad\quad \vec{F}'=\vec{F}+\vec{F}_{\text{惯性力}}$

$$m\vec{a}'=\vec{F}-m\vec{a}_0-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$$

平移惯性力 $\vec{F}_i=-m\vec{a}_0$

惯性离心力 $\vec{F}_c=-m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)=m\omega^2\vec{r}'\ \text{if}\ \vec{\omega}\perp\vec{r}'$

科里奥利力 $\vec{F}_{\mathrm{Cor}}=-2m\vec{\omega}\times\vec{v}'$

横向惯性力 $-m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'$

质点系 $M\vec{a}_C$ = 质点系所受的合力

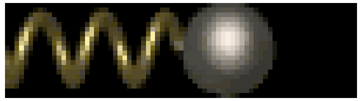
二体问题 $\mu\vec{a}=\vec{F}$

2.2 相互作用力

2.2.1 常见力

重力 $$mg_h=\frac{GM_{地}m}{(R+h)^2}\approx\frac{GM_{地}m}{R^2}\left(1-\frac{2h}{R}\right)$$

弹性力 $$F=-kx$$



摩擦力 $$f=\mu N$$

阻力 $$\vec{f}=-\gamma\vec{v}$$

基本相互作用

强相互作用 30
弱相互作用 0.006
短程力

电磁相互作用 1
引力相互作用 10^{-36}
长程力

正负电荷

质量

The basic problem of philosophy seems to be to discover the forces of nature from the phenomena of motions and then to demonstrate the other phenomena from these forces.

——Isaac Newton

两个质子相距1Å时

$$\frac{\text{库仑力}}{\text{万有引力}} = 1.2 \times 10^{36}$$

$$\frac{\text{库仑力}}{\text{重力}} = 1.4 \times 10^{18}$$

电磁相互作用决定着原子、分子和更复杂的物质形式的结构，以及光的存在。

电磁相互作用有多种表现，通常我们引入各种唯象力分别描述它们：弹性力，张力，生物力，支持力，摩擦力，阻力，粘滞力，表面张力，流体压强，浮力，……

我们生活在一个有重力的电磁世界中

力学的理论体系

惯性系S　$\boxed{m\vec{a}=\vec{F}}$

非惯性系S'　$\boxed{m\vec{a}'=\vec{F}'}$　$\vec{F}'=\vec{F}+\vec{F}_{\text{惯性力}}$

$\vec{F}dt$

动量定理

动量守恒定律

$\vec{F}\cdot d\vec{r}$

动能定理

机械能守恒定律

能量守恒定律

$\vec{r}\times\vec{F}$

角动量定理

角动量守恒定律

利用牛顿定律的六步解题法

① 隔离物体

② 画每个物体的受力图

③ 建立坐标系

④ 写运动方程

⑤ 写约束方程

⑥ 求解

5.1 质点系

5.1.1 质心 质心运动定理

质点系的运动

每个质点的质量、位矢和受力： m_i, $\vec{r}_i$, $\vec{F}_i$

质点系的总质量 $m = \sum_i m_i$

质点系所受合力

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i m_i \vec{a}_i = \frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) = m\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}\right)$$

质点系的质心 (center of mass)

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}$$

质心速度 $\vec{v}_c = \dfrac{d\vec{r}_c}{dt}$ 质心加速度 $\vec{a}_c = \dfrac{d\vec{v}_c}{dt}$

质心动量等于质点系的总动量 $m\vec{v}_c = \sum_i m_i \vec{v}_i$

质心动能 $E_{kc} = \dfrac{1}{2} m v_c^2$

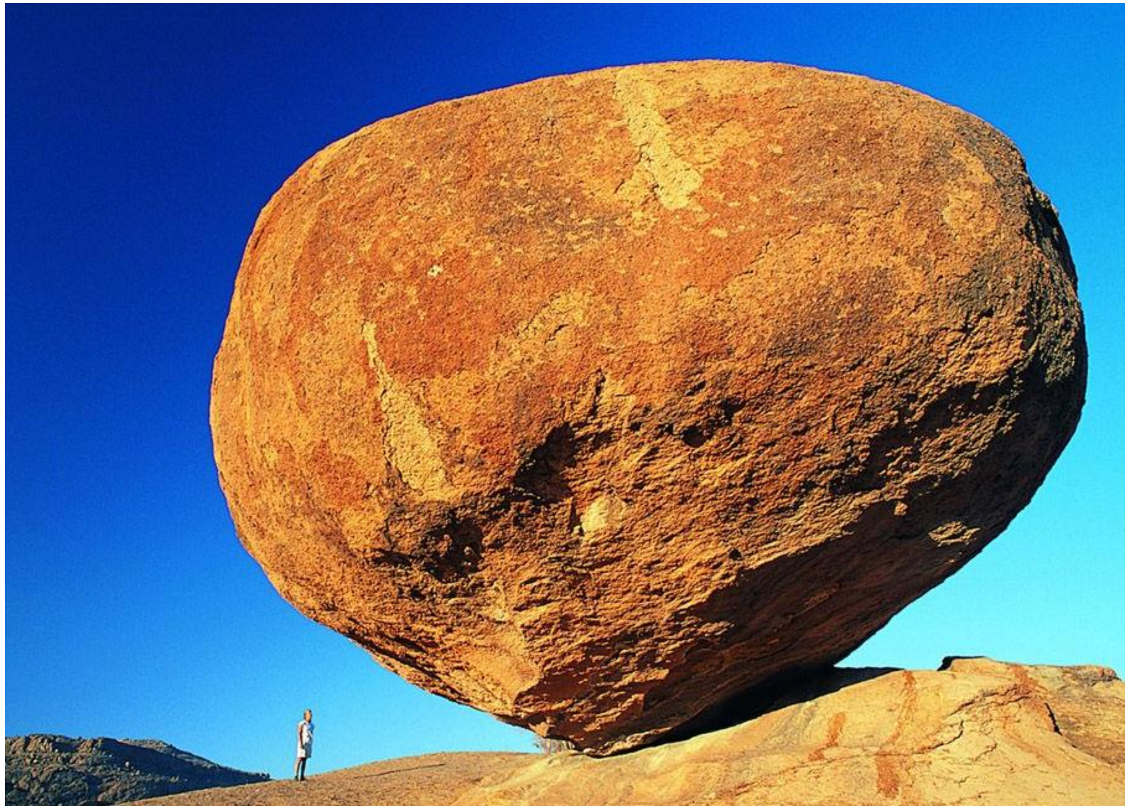
质心角动量 $\vec{L}_c = \vec{r}_c \times m\vec{v}_c$

质心运动定理 $\vec{F}_{合外} = m\vec{a}_c$

质点系的质心加速度由合外力确定，与内力无关。

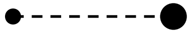
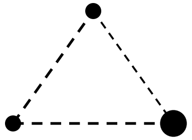
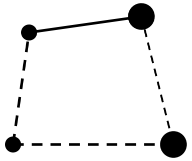
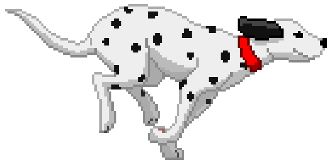
牛顿定律的独特性质：如果它在某一小尺度范围内是正确的，
那么在大尺度范围内也将是正确的。

特殊的质点系——刚体

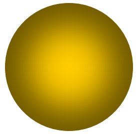


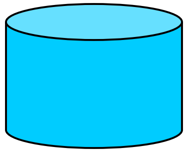
质心的性质

①质心在整个物体的包络内

②物体质量分布若有某种对称性，质心就位于对称的位置。

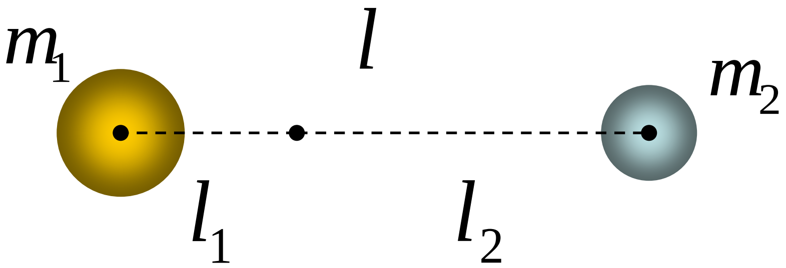




③几个物体的质心满足质心组合关系

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m} = \frac{m_A \vec{r}_A + m_B \vec{r}_B + m_C \vec{r}_C + \cdots}{m}$$

例 两个质点的质心



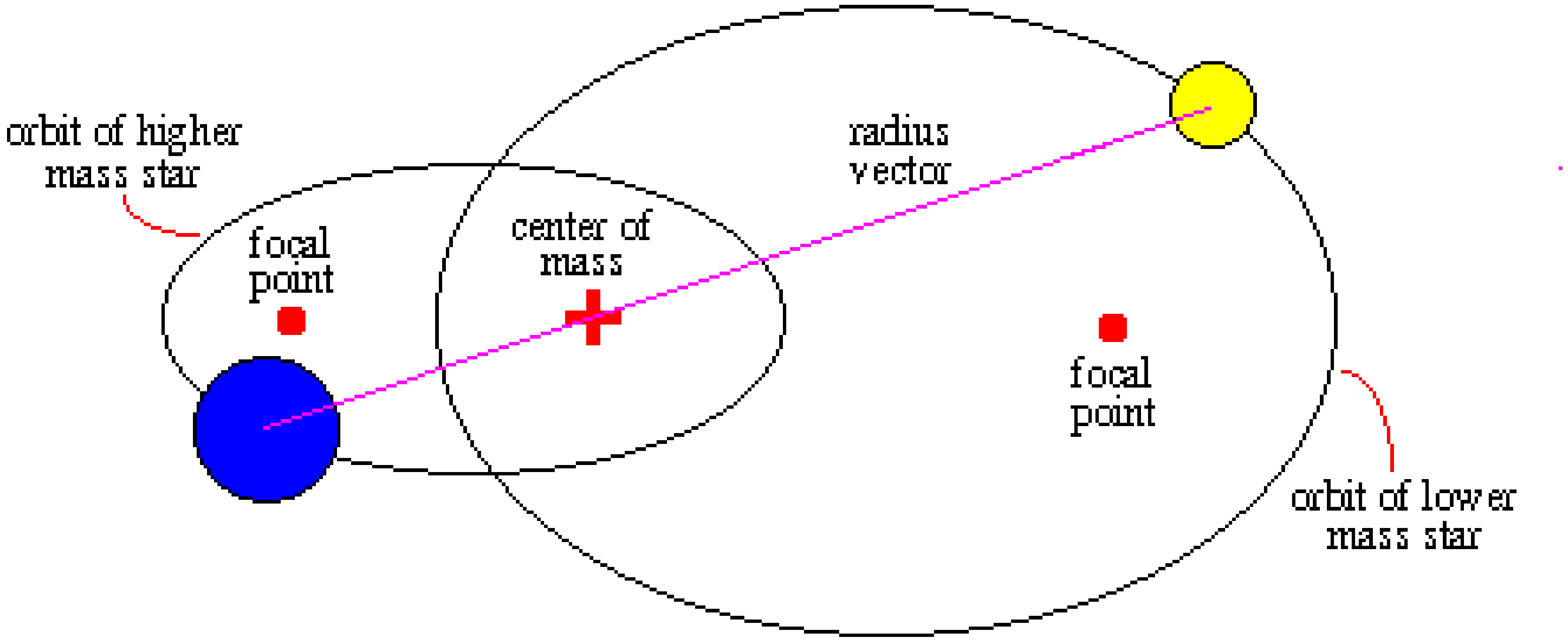
质心位置满足杠杆关系 $m_1 l_1 = m_2 l_2$， $l_1 + l_2 = l$

$$l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l = \frac{\mu}{m_1} l$$

$$l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l = \frac{\mu}{m_2} l$$

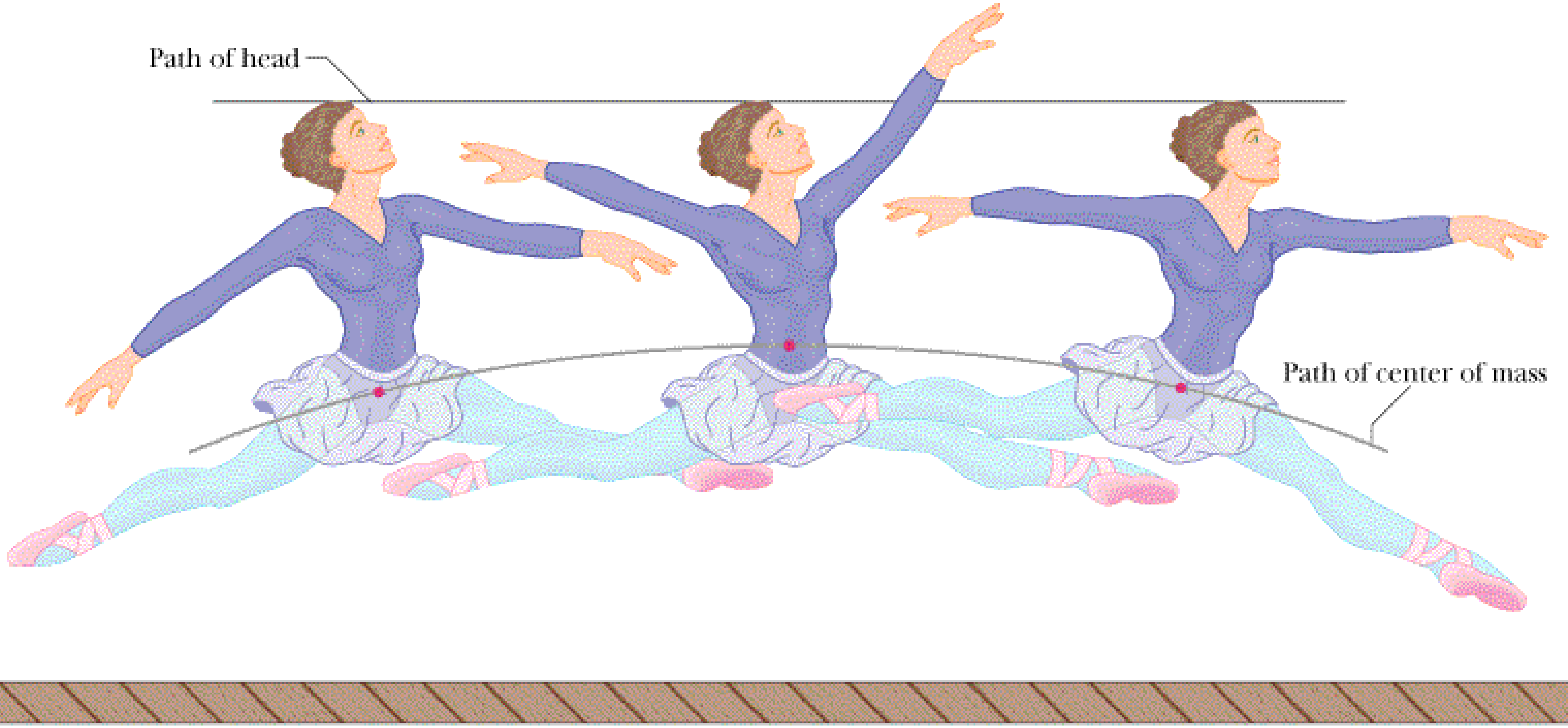
其中 $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Binary Star Orbit



烟花爆竹

大踢腿 A grand jeté



5.1.2 质点系动力学量的分解

质心参考系：随质心一起运动的平动参考系，简称质心系。

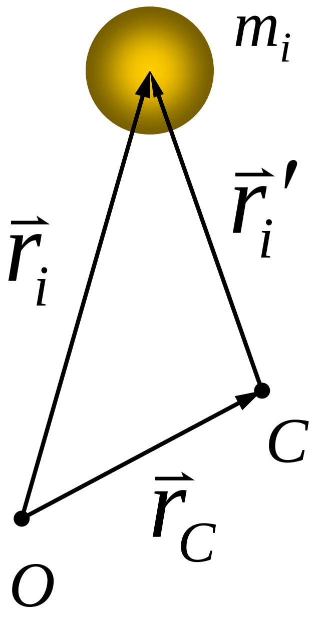
在质心系中质心静止　　$\vec{r}_c = $常矢量

$$\vec{v}_c = 0$$

质心系中的运动图象

各质点从质心四面散开，或向质心八方汇聚。
质心成为一个运动中心，运动时时刻刻是“各向同性的”。

在任一参考系中
质点系的动量、动能和角动量与质心运动的关系



质点系的动量

质点系中各质点 m_i 相对质心的运动

$$(\vec{r}_i{}',\ \vec{v}_i{}')$$

质点系的动量等于质心的动量 $\vec{p} = \vec{p}_c$

质点系相对质心的动量总是为零 $\vec{p}\,' = \sum_i m_i \vec{v}_i{}' = 0$

质点系的动能

$$E_k=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum_i \frac{1}{2}m_i \vec{v}_i\cdot\vec{v}_i \qquad \vec{v}_i=\vec{v}_c+\vec{v}_i'$$

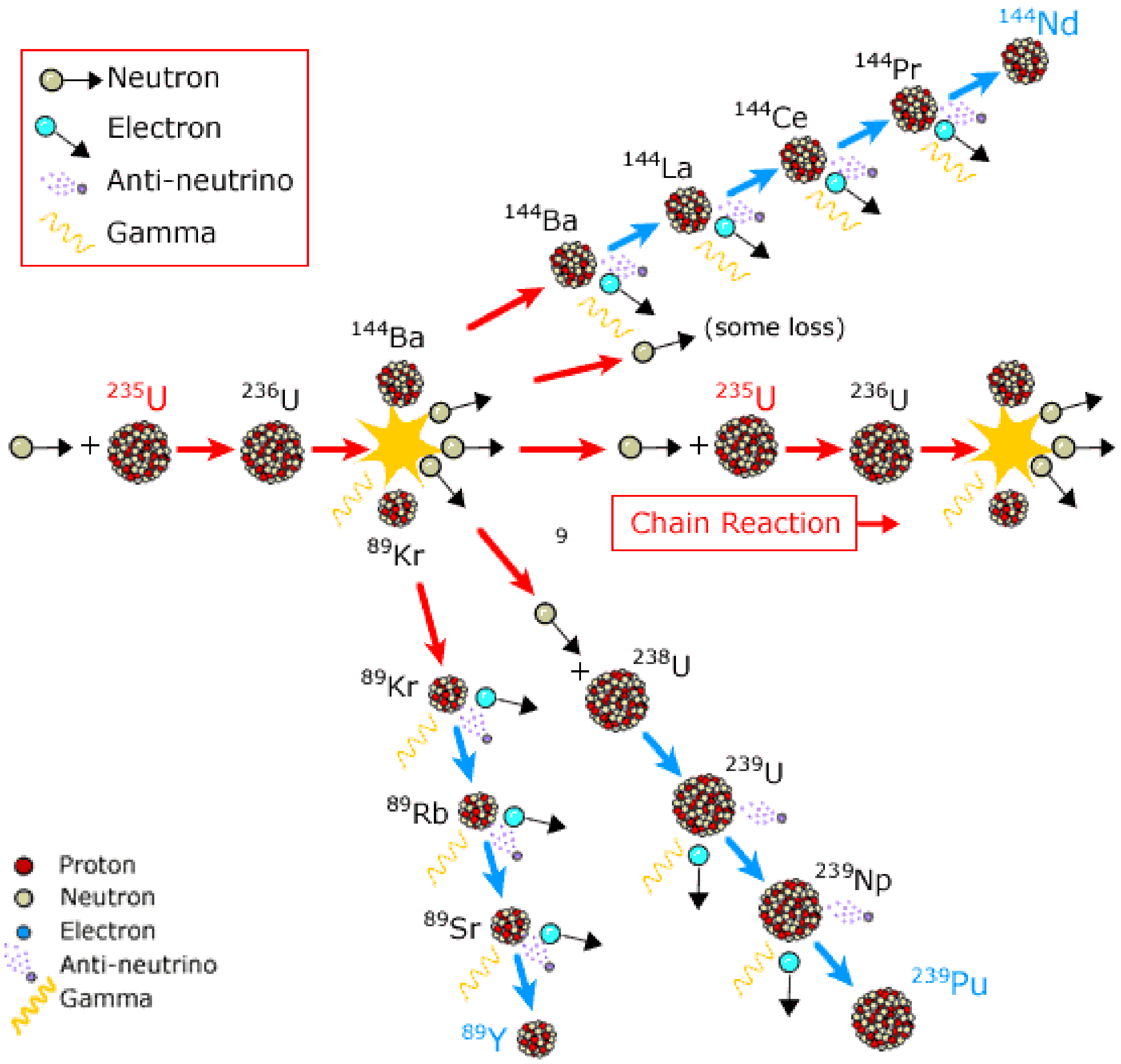
$$E_k=\sum_i \frac{1}{2}m_i \vec{v}_c\cdot\vec{v}_c+\sum_i m_i \vec{v}_c\cdot\vec{v}_i'+\sum_i \frac{1}{2}m_i \vec{v}_i'\cdot\vec{v}_i'$$

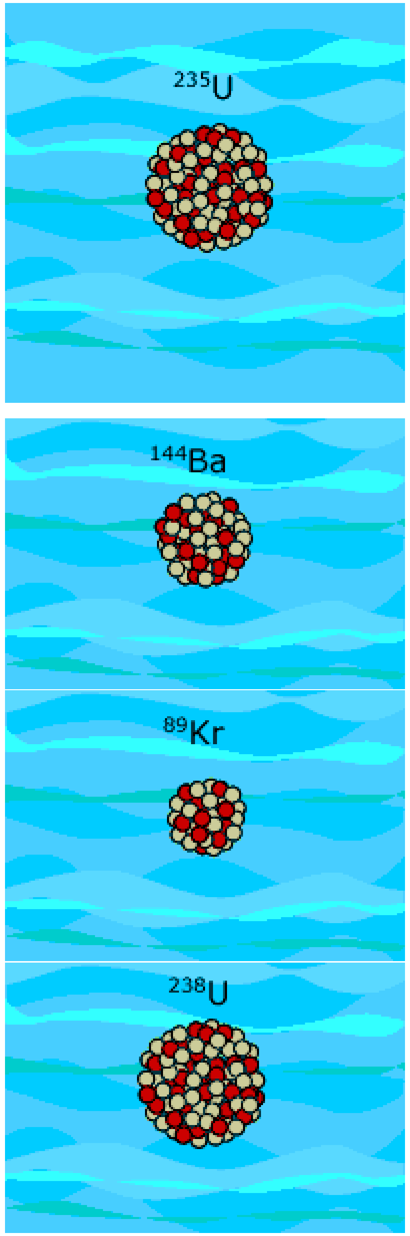
$$=\frac{1}{2}mv_c^2+\vec{v}_c\cdot\left(\sum_i m_i\vec{v}_i'\right)+\sum_i \frac{1}{2}m_i\vec{v}_i'^2$$

$$E_k=E_{kc}+E_k',\qquad E_{kc}=\frac{1}{2}mv_c^2,\ \text{资用能}E_k'=\sum_i \frac{1}{2}m_i\vec{v}_i'^2$$

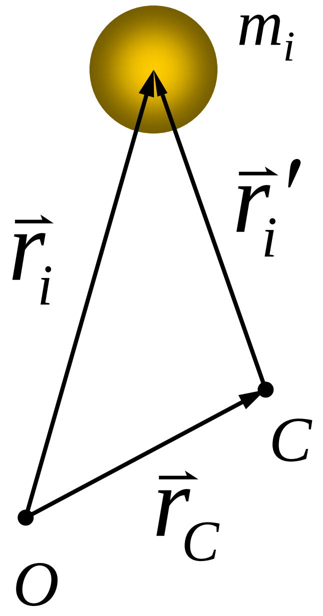
柯尼希(König)定理：质点系的动能可分解成质心动能与质点系相对质心的动能之和

核反应中的资用能


Neutron
Electron
Anti-neutrino
Gamma
^{144}Nd
^{144}Pr
^{144}Ce
^{144}La
^{144}Ba
(some loss)
^{144}Ba
^{235}U
^{236}U
^{235}U
^{236}U
^{89}Kr
9
Chain Reaction
^{89}Kr
^{238}U
^{239}U
^{89}Rb
^{239}Np
^{89}Sr
^{239}Pu
^{89}Y
Proton
Neutron
Electron
Anti-neutrino
Gamma


^{235}U
^{144}Ba
^{89}Kr
^{238}U

质点系的角动量 $\vec{L}=\sum_i \vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$



其中 $\vec{r}_i=\vec{r}_c+\vec{r}_i',\ \vec{v}_i=\vec{v}_c+\vec{v}_i'$

$$\vec{L}=\vec{r}_c\times\left(\sum_i m_i\right)\vec{v}_c+\vec{r}_c\times\left(\sum_i m_i\vec{v}_i'\right)$$

$$+\left(\sum_i m_i\vec{r}_i'\right)\times\vec{v}_c+\sum_i\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i'$$

$$\vec{L}=\vec{L}_c+\vec{L}',\qquad \vec{L}_c=\vec{r}_c\times m\vec{v}_c,\ \vec{L}'=\sum_i\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i'$$

质点系的角动量
可分解成质心角动量与质点系相对质心的角动量之和

同一参考点　　　　质心为参考点

5.1.3 质心参考系

质心系一般是非惯性系，引入平移惯性力 $-m_i\vec{a}_c$

质心系中每一个质点受真实力和平移惯性力作用

平移惯性力与重力相似
大小正比于质点质量，正比于质心加速度
方向沿着质心加速度的反向

质心系中质点系的动量恒为零，质点系的动量定理不必考虑。

在质心系中
质点系的动能定理和角动量定理

质心系中质点系动能定理

质心系中质点系动能定理的微分形式

$$dW_{内}+dW_{外}+dW_{惯}=dE_k$$

$$dW_{惯}=\sum_i\left(-m_i\vec{a}_c\cdot d\vec{r}_i\right)=-\vec{a}_c\cdot d\sum_i\left(m_i\vec{r}_i\right)=-\vec{a}_c\cdot d\left(m\vec{r}_c\right)=0$$

质心系中质心位置矢量为常量 $d\vec{r}_c=0$

$$dW_{惯}=0$$

质心系中质点系动能定理 $\boxed{dW_{内}+dW_{外}=dE_k}$

与惯性系完全相同，机械能定理也相同

质心系中质点系角动量定理

质心系中质点系角动量定理 $\vec{M}_{外}+\vec{M}_{惯}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}$

$$\vec{M}_{惯}=\sum_i \vec{r}_i\times(-m_i\vec{a}_c)=\left(\sum_i m_i\vec{r}_i\right)\times(-\vec{a}_c)=\vec{r}_c\times(-m\vec{a}_c)$$

选质心为参考点 $\vec{r}_c=0\Rightarrow\vec{M}_{惯}=0$

质心系中质点系角动量定理 $\boxed{\vec{M}_{外}=\dfrac{d\vec{L}}{dt}}$

与惯性系完全相同

小结

质点系的运动 = 质心的运动 + 相对质心的运动

质点系的动能、角动量可分解成质心的与相对质心的两部分之和

质心的运动

代表了质点系整体的运动

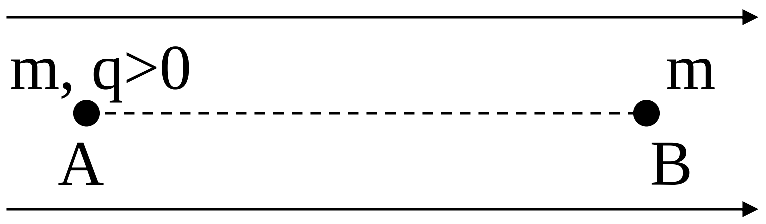
质点系所受合力确定质心的运动：质心运动定理

相对质心的运动

质心系中质点系动能定理

质心系中质点系角动量定理

例 带电q的小球A从静止开始在匀强电场E中运动，与前方相距l的不带电静止小球B发生弹性碰撞。求从开始到发生k次碰撞电场对小球A所做的功。



分析碰撞过程

弹性碰撞　　A相对B的运动　　质心运动

第一次碰撞用时　$a = qE/m \Rightarrow t_1 = \sqrt{\dfrac{2l}{a}} = \sqrt{\dfrac{2ml}{qE}}$

第k次碰撞用时　$t_k = 2kt_1 - t_1$

{A，B}系统的质心加速度 $a_c = \dfrac{qE}{2m}$

在t_k时间内质心位移 $s_c = \dfrac{1}{2} a_c t_k^2$

A球的位移 $s_A = s_c + \dfrac{1}{2} l$

电场力对A所做的功 $W = (qE)s_A = (2k^2 - 2k + 1)qEl$

例 线性引力

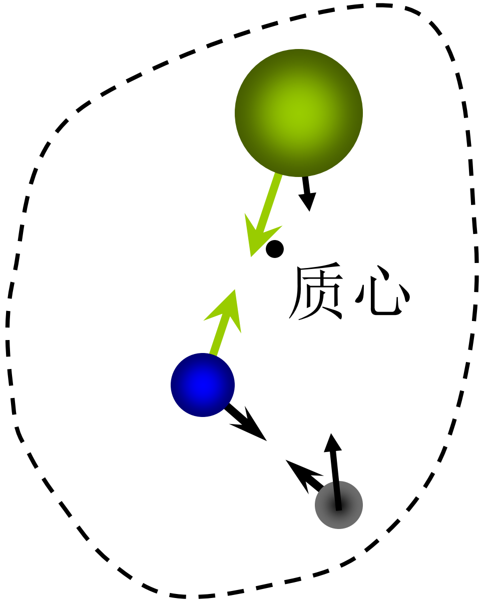
假设质点间的万有引力是线性的：$F = G^* m_1 m_2 r$，其中G^*为假想的引力常量，r 为两质点的间距。不考虑碰撞的可能性，试导出多质点引力系统各质点的运动轨道和周期。

质心系是惯性系，以质心为坐标原点：$\vec{r}_C = 0$

第 i 个质点 $(m_1, \vec{r}_i, \ddot{\vec{r}}_i)$

质点系总质量 m

动力学方程组 $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} G^* m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)$



$$m_i\ddot{\vec{r}}_i=\sum_{j\neq i}G*m_im_j(\vec{r}_j-\vec{r}_i)=\sum_{j}G*m_im_j(\vec{r}_j-\vec{r}_i)$$

$$=G*m_i\left(\sum_j m_j\vec{r}_j\right)-G*m_i\left(\sum_j m_j\right)\vec{r}_i$$

$$=G*m_im\vec{r}_C-G*m_im\vec{r}_i$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\ddot{\vec{r}}_i=-G*m\vec{r}_i}$$

方程表明，第 i 个质点所受合引力等效于受系统质心的引力。
方程组可分离变量，多体问题转化为单体问题。

第 i 个质点的初始运动状态确定一个平面第 i 个质点只能在此平面内运动

动力学方程可分解为： $\ddot{x}_i=-G^*mx_i$，$\ddot{y}_i=-G^*my_i$

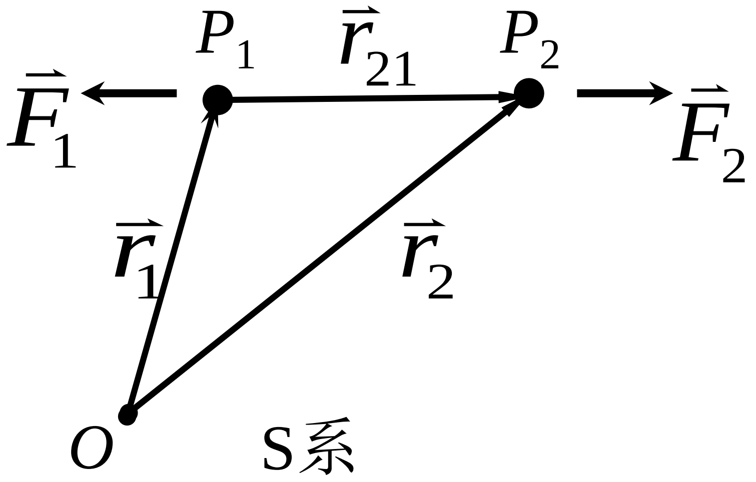
每个方程的解都是简谐运动，角频率都是 $\omega=\sqrt{G^*m}$

合成的轨道是一个以质心为中心的椭圆，运动周期为

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{G^*m}}$$

一对作用力与反作用力作功之和

$$
\begin{aligned}
dW &= \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 \\
&= (-\vec{F}_2) \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 \\
&= \vec{F}_2 \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) \\
&= \vec{F}_2 \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_{21}
\end{aligned}
$$



在所有相对平动的参考系中，
两个质点之间的一对作用力与反作用力作功之和都相同

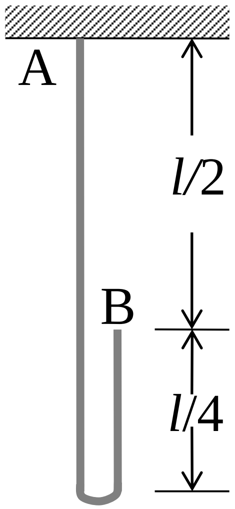
在所有惯性系中，一对作用力和反作用力作功之和都相同。

若相互作用力是径向力，在任意参考系中，
两个质点之间的一对作用力与反作用力作功之和都相同

力学三大约束之绳约束

受不可伸长的轻绳约束的两点，间距不大于绳长。
两点所受的作用力只可能是沿绳方向的拉力，
即，两点所受冲量，大小相等，方向沿绳，指向对方。

例 长l、质量线密度为λ的匀质软绳，开始时两端A和B一起悬挂在固定点上。使B端脱离悬挂点自由下落，当如图所示，B端下落高度为 $l/2$ 时，使A脱离悬挂点，问此后经过多长时间绳子完全伸直？（提示：可在质心系中分析）



在质心系中，B端相对质心速度不变

B端的速度 $v_B = \sqrt{gl}$

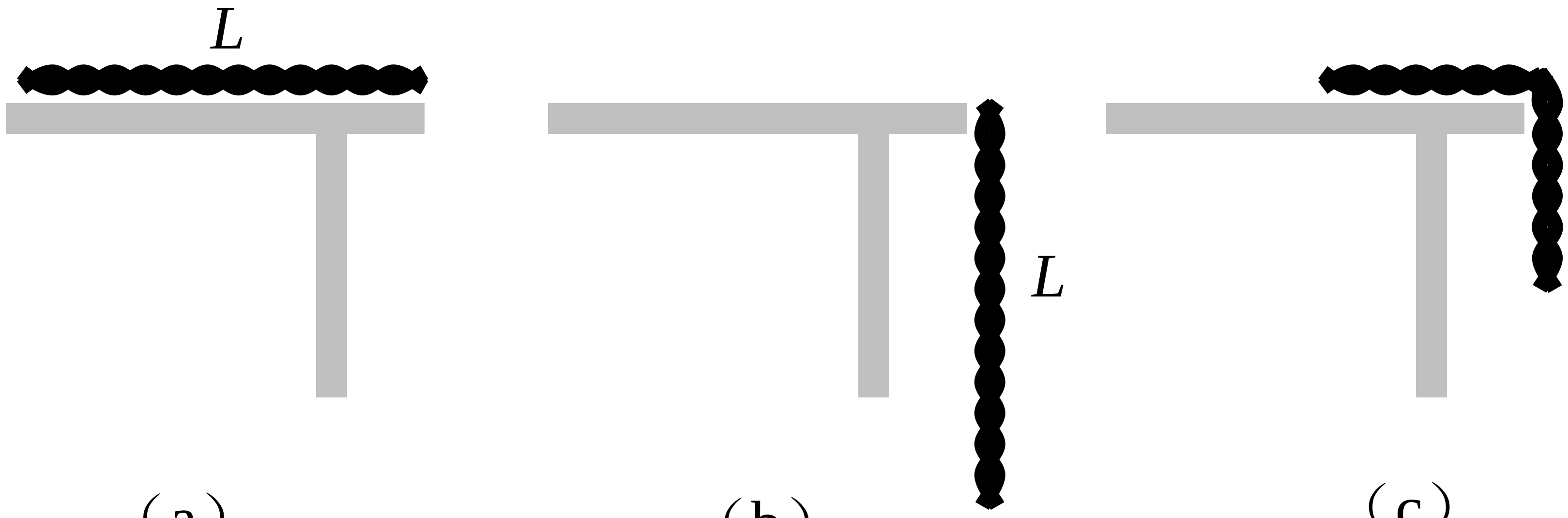
质心速度 $v_C = \dfrac{1}{4}\sqrt{gl}$

质心离A点的位置 $r_A = \dfrac{7}{16} l$

B端相对质心的距离 $r_{BC} = \dfrac{1}{16} l$

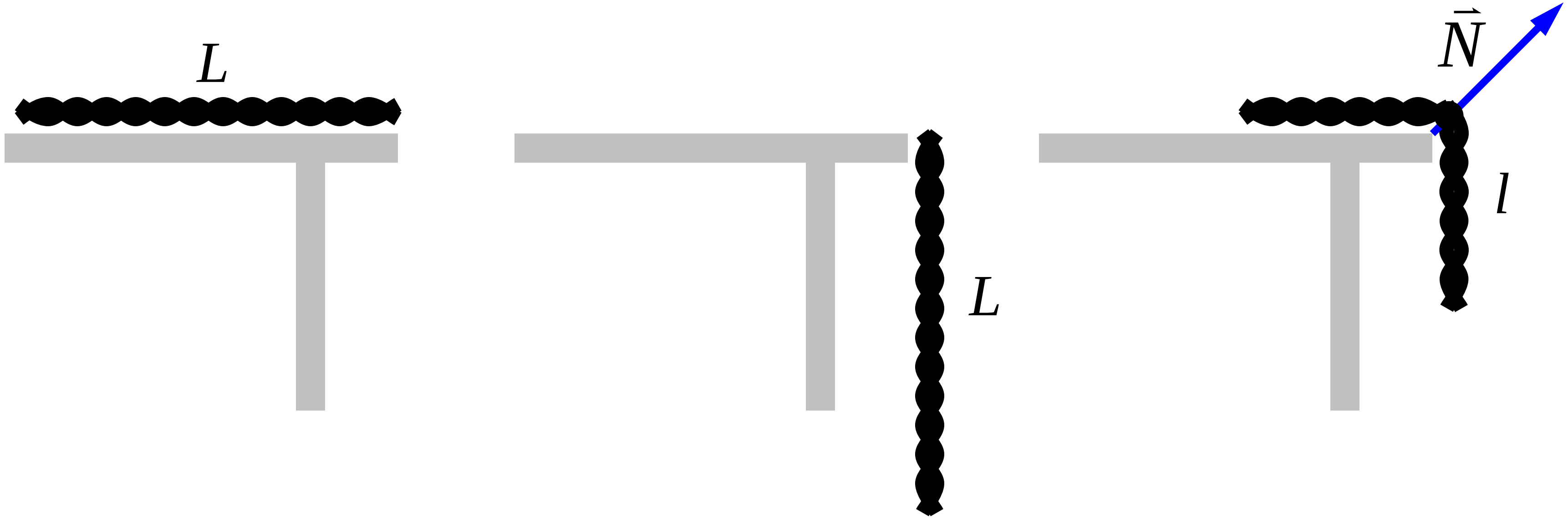
绳子伸直所用时间 $t = \dfrac{7}{12}\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

例 9　长L的匀质软绳绝大部分沿长度部分放在光滑水平桌面上，仅有很少一部分悬挂在桌面外。而后绳将从静止开始下滑。问绳能否达到图（b）状态？若否，绳滑下多长时会甩离桌边？



（a）　（b）　（c）

分析物理过程



利用机械能守恒定律 $$\frac{1}{2}(\lambda L)v^2 = (\lambda l)g\,\frac{l}{2}$$

绳的水平方向动量 $$p_x = \lambda(L-l)v = \lambda\sqrt{g/L}(L-l)l$$

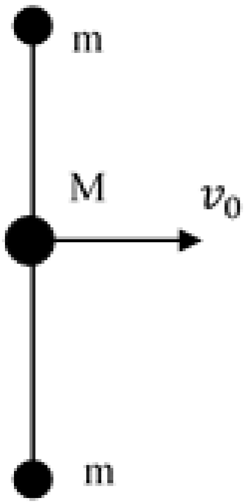
当$l = L/2$时，存在极大值

另一种方法：计算绳中张力，利用微元法确定桌角的支持力

20.（40分）如图所示，质量m的两个小球和质量M的小球用不可伸长的轻绳连在一起，三者在一条直线上，M位于中心，静止地放在光滑的桌面上。

① 初始时刻，令M沿垂直绳的方向有水平初速度v_0，质量m的两个小球相遇时的速度是多大？

② M和m之间的绳长为l，计算任意位置时绳的张力T。



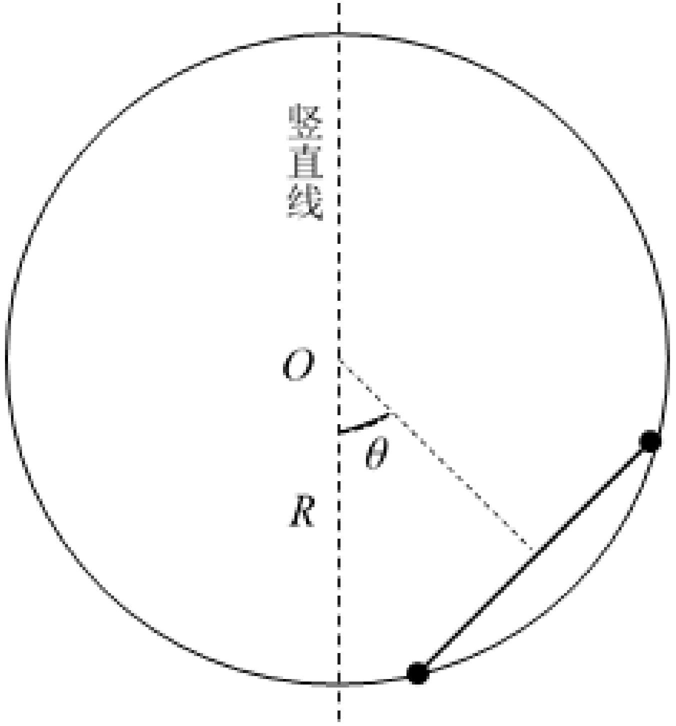
$$v = \frac{\sqrt{2M(M+m)}}{2m+M} v_0$$

$$T = \frac{1}{(1+2\alpha\sin^2\theta)^2}\frac{mv_0^2}{l}$$

18.（25分）如图所示，竖直平面内有一半径为R的光滑固定圆环，质量为m的两个小球用长R的质量可略的细杆相连，在圆环内滑动，细杆中心经过圆环底部时角速度为ω_0，细杆逆时针转动。补充知识：选两个小球和细杆为一个力学系统，系统的质心位于两个小球的中点，它的运动满足质心运动定理：系统所受的合力 = 系统的总质量 × 质心加速度。可利用这个方程分析这个系统的运动。数学补充知识：若角速度ω是θ的函数：$\omega = \omega(\theta)$，θ随时间变化，则可计算角加速度β：$\beta = \omega \mathrm{d}\omega / \mathrm{d}\theta$。

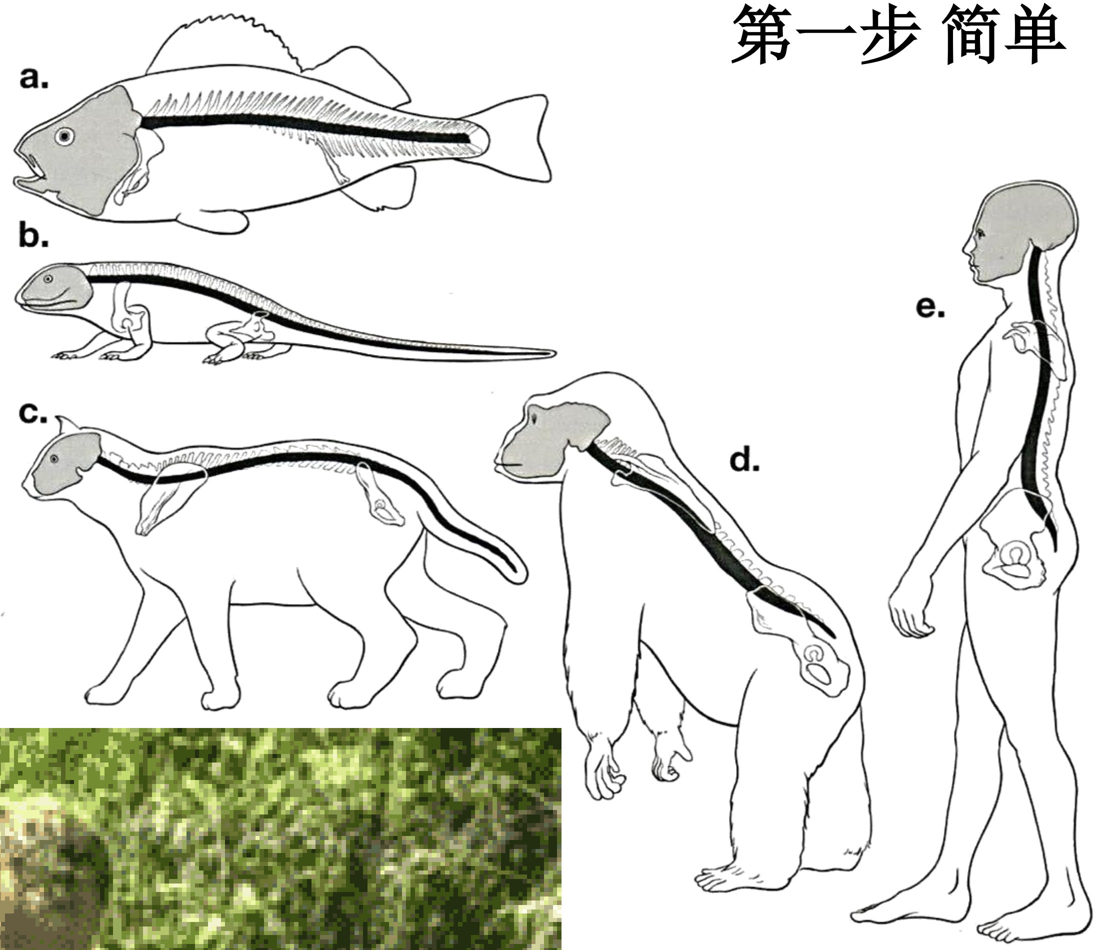
① 计算图示位置的机械能守恒方程。

② 若要求细杆通过圆环顶部，且两端始终不离开圆环，最小的角速度 ω_0 是多大？



$$\omega_0^2 \geq \sqrt{3}\frac{g}{R} + \sqrt{\frac{103}{12}}\frac{g}{R}$$

第一步 简单



a. 鱼

b. 爬行类

c. 猫

d. 大猩猩

e. 人

直立行走解放了人的手和头

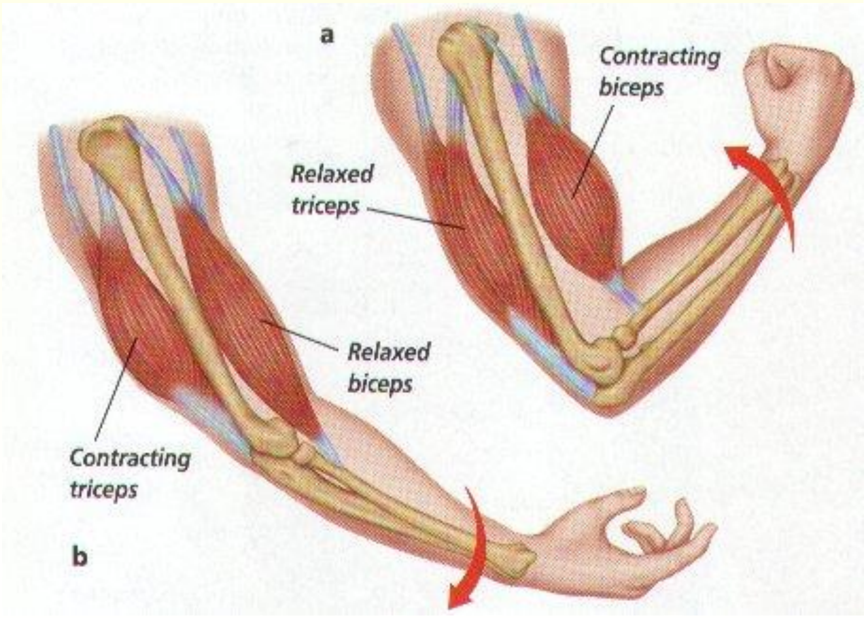
第二步 单元

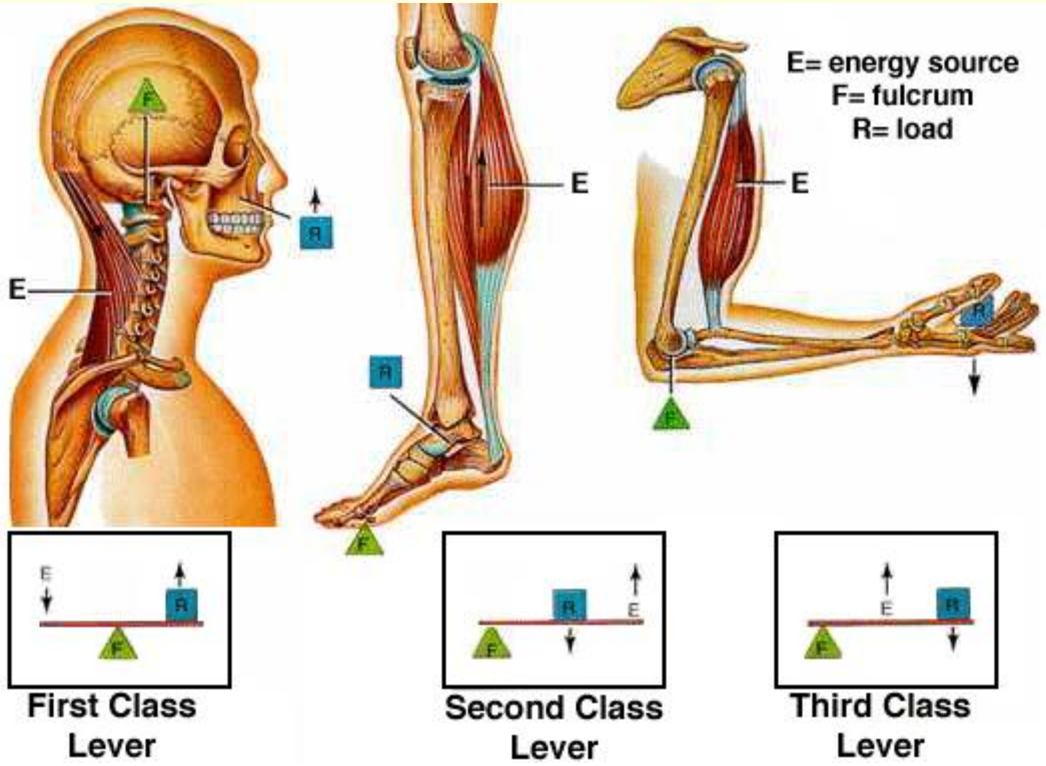
人的运动系统

组成

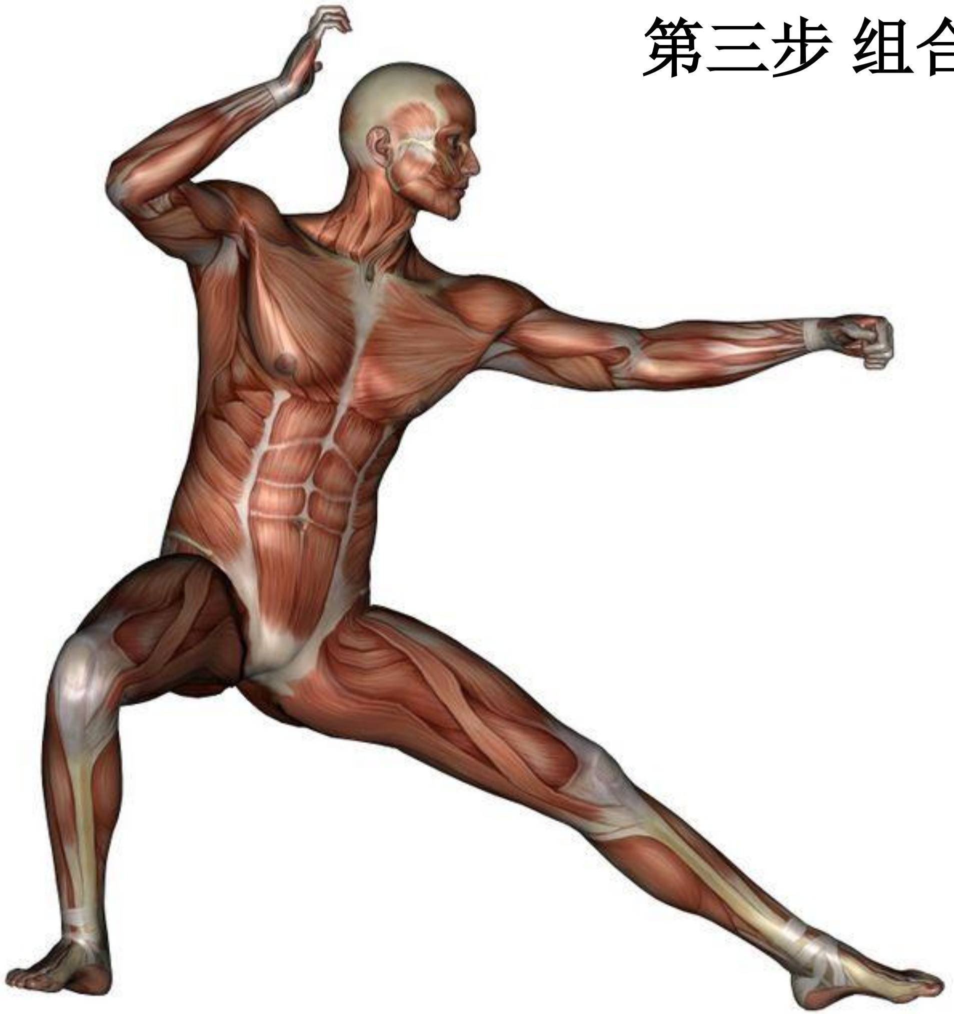
- 骨：连结形成骨骼，构成人体支架，支持体重、保护内脏，并参与运动，充当杠杆
- 关节：在运动中作为支点，起枢纽作用
- 肌肉：运动中赋予动力

功能：支持，保护和运动





第三步 组合



成人有206块骨

全身肌肉600多块，占体重的40%,每块肌都可视为一个器官

骨骼肌附着于骨，在神经系统的调控下，数块或数群肌肉有序的收缩或舒张，产生各种复杂的运动。

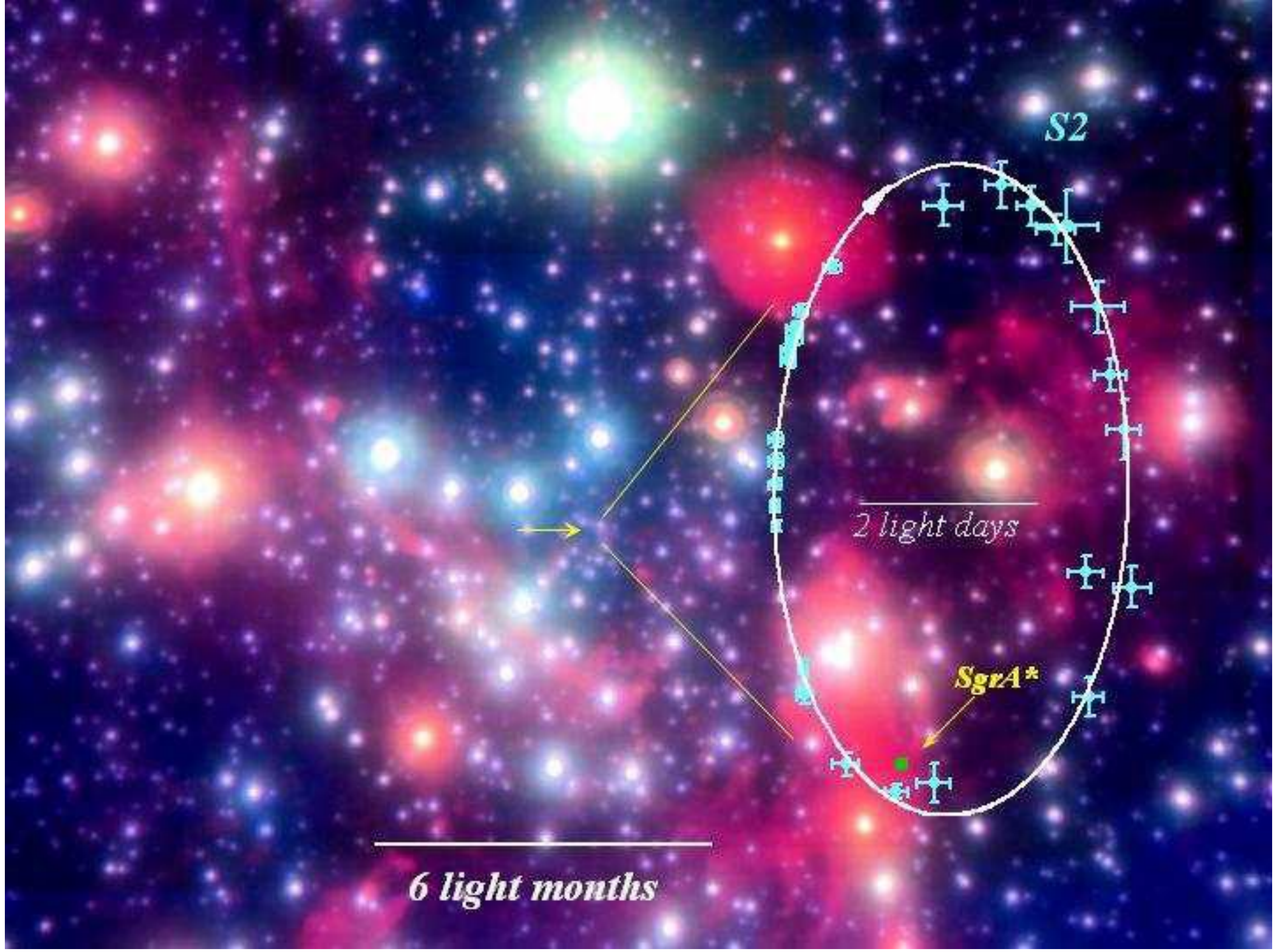


Fig. 6. False color infrared image taken by the European Southern Observatory's Very Large Telescope of the central few parsecs of the Milky Way. Superposed with a 100-times-finer scale is the orbital track of one star named S2. The orbital period of S2 is 15.8 years, and recently a complete and closed elliptical orbit has been observed. The orbit requires an unseen mass of $\approx 4 \times 10^6\, M_\odot$ at the focal position, indicated by the arrow. The focal position is coincident with the position of the compact radio source Sgr A*, as discussed in Sec. 4.2. (*Image courtesy of R. Genzel.*)