电磁学中的数学衔接问题

北京大学物理学院

王稼军

电磁学是物理素质培养的重要部分

- 在物理学中开辟了一个区别于力学、热学的重要新领域——电磁学
- 电磁学的形成和发展，使人们对电磁相互作用、物质的电磁性质、各种电磁过程等等认识有了极大的拓宽和加深
- 电磁相互作用是自然界中一种基本的相互作用，它对原子和分子的结构起着关键作用，因而很大程度上决定各种物质的物理性质和化学性质

- 电磁过程是自然界的基本过程之一，带电粒子因受电磁作用在各种特定条件下的运动，形成了电工学、电子学、等离子体物理学和磁流体力学等分支学科。
- 19世纪，*Faraday*和*Maxwell*建立的电磁场理论及其实验验证，深刻揭示了电磁作用的机制和本质，证实电磁场是区别于实物的又一种客观存在，得出光是电磁波的重要结论，完成了电、磁、光现象的理论大综合。

电磁技术的发展及应用

- 电力、电子、电讯工业的发展
- 电磁材料的研制
- 电磁测量技术的应用
- 对人类的物质生产、技术进步和社会发展带来了难以估量的广泛深刻影响。
- 电磁学是经典物理的基本组成部分之一，具有重要的历史地位与现实意义，而且与近代自然科学、技术科学到许多领域有着密切的联系。

电磁学是理工科学生必须学好的基础课

- 电磁学是经典物理的重要组成部分，也是近代物理和许多技术学科不可缺少的基础。
- 电磁理论的研究成果对科学研究、对技术进步和人类的物质文明以及社会发展带来了难以估量的广泛深刻影响。
- 这一切都说明了《电磁学》是一门物理学及其大部分理工科的基础课，它的基础性是不容置疑的。
- 因此也是物理素质培养的基本内容

电磁学的研究对象

- 电磁学的研究对象与力学、热学有何区别？

学科	对象	数学工具
力学	质点、刚体、连续介质	运动方程
热学	大量粒子构成的体系	分布（概率论）
电磁学	场： 电场、磁场 矢量场	连续分布客体 场的通量、环流（场论）
	路：恒定电路、 交流电	

- 对象的变化表示物理学的进步，要适应新的研究对象，学会新的研究方法，不能完全用熟悉的力学方法来看问题——**要学会掌握场的基本概念、处理场的基本方法**

内容

- 电磁学
  - 场
    - 静电场、导体、电介质
    - 恒磁场、磁介质
    - 电磁感应、电磁场电磁波
  - 路
    - 直流电
    - 交流电

关键的概念是“场”

- 电磁学课程首次系统地向学生介绍“场”
- 这对于多数初学者来讲，从概念到方法都是新的
- 学习和理解方面有一定的难度
- 但是今后的学习中还会遇到各种各样的场
- 对电磁场的认识将有助于学习其他场
- 通过学习电磁学，可以初步认识场，学会如何处理场的方法，对今后的学习起到事半功倍的作用

电场和磁场是矢量场

- 电磁场是矢量场，因此在教学中难免要遇处理矢量的问题
- 中学生在力学学习中应该接触过矢量，但不一定熟悉
- 电磁学教学中，会涉及到矢量的点乘、叉乘，对坐标架的投影，叠加等
- 还会涉及到数学场论的一些基本概念
- 有时处理具体问题时还要学会“合理地近似”

中学生学习电磁学时的数学困惑

- 电磁学教学中会涉及到矢量的点乘、叉乘，数学场论中的散度、旋度、梯度以及级数展开等基本概念
- 对于初学者，一下子遇到诸个新问题，新知识，不少学生感到难，抽象，不适应
- 假如在教学中注意到数学应用的衔接，结合讲物理概念时，适当交代强调，会减轻学生的畏难情绪，使他们进入良好的学习状态

需要注意中学物理与大学物理的区别

- 研究对象与数学工具的变更
  - 中学物理不用微积分
  - 大学物理需要用到微积分等
- 理论体系更为系统
  - 中学物理只讨论特殊条件下的一些问题
  - 大学物理的理论体系更为系统和普适
- 认知方法和授课方式的变更
  - 中学物理常常通过反复做题，反复练习巩固知识
  - 大学学习物理更注重对理论体系的理解，对概念的理解
- 学习不仅为了掌握知识，更重要的是掌握物理学解决问题的方法，掌握学习新知识的能力

教学资源

- 北京大学为中学生开了先修课——电磁学
- 在美国coursera平台上开的《电磁学》
  - 《电磁学上》——恒定电场，前三章
    https://www.coursera.org/learn/dianci
  - 《电磁学下》——恒磁场及时变电磁场，后五章
    https://www.coursera.org/learn/dianci-2
- 华文慕课平台
  - 《电磁学上》——恒定电场，前三章
    http://www.chinesemooc.org/mooc/4389
  - 《电磁学下》——恒磁场及时变电磁场，后五章
    http://www.chinesemooc.org/mooc/4741

2018年在中国大学Mooc上开课

- 中国大学Mooc是爱课程网站下项目
- 网址：https://www.icourse163.org/
- 可以通过百度搜索直接进入
- 中国大学MOOC(慕课)_国家精品课程在线学习平台
- 再搜索电磁学即可选择学习

电磁学中的数学衔接问题

- 矢量叠加和微元法
- 矢量场论在电磁学中的应用
- 复数在电磁学中的应用

矢量叠加及微元法

矢量叠加及合理近似
矢量叉乘
微元法求电场强度
微元法求磁感应强度

矢量叠加

电场强度矢量

- 电荷q所受的力的大小为

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^2}\begin{cases}\text{与}Q\text{激发的电场有关}\\ \text{与}q\text{的电量大小、正负有关}\end{cases}$$

- 引入试探电荷q_0：
  - 几何线度充分小——点电荷
  - 电量充分小——小到什么程度?

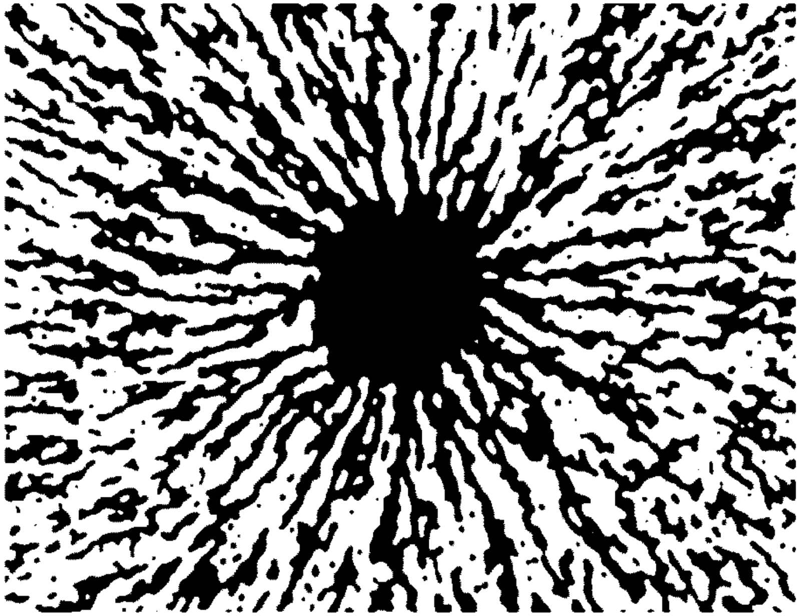
电场强度定义

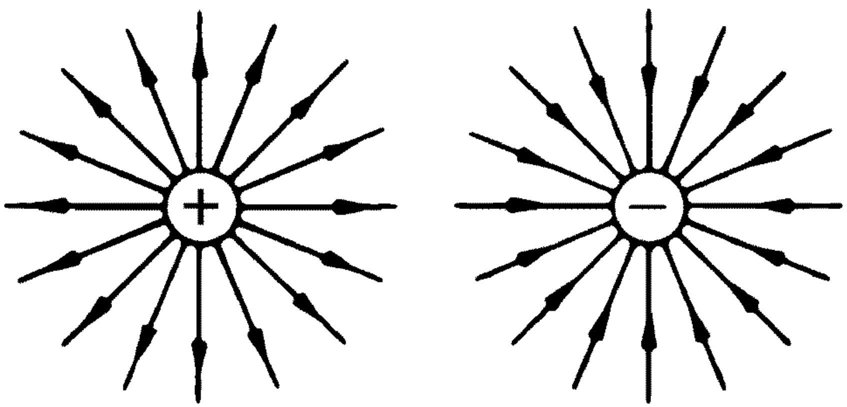
- **从F中扣除q_0可得**

$$\frac{F}{q_0}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\left\langle\begin{array}{l}\text{与Q激发的电场有关}\\ \text{与}q_0\text{无关，反映Q的电场的分布}\end{array}\right.$$

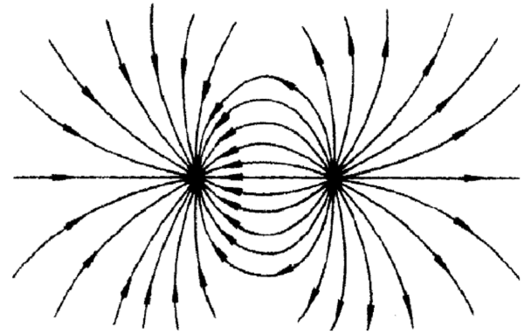
$$\vec{E}\left\langle\begin{array}{l}\text{大小：单位正电荷在电场中受到的电场力的大小}\\ \text{方向：与单位正电荷所受的力的方向一致}\end{array}\right.$$

- **单位 牛顿/库仑 NC^{-1} $[I^{-1}LMT^{-3}]$**

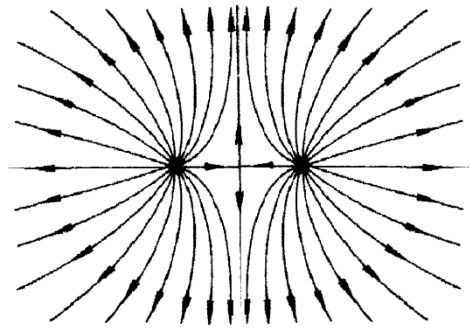




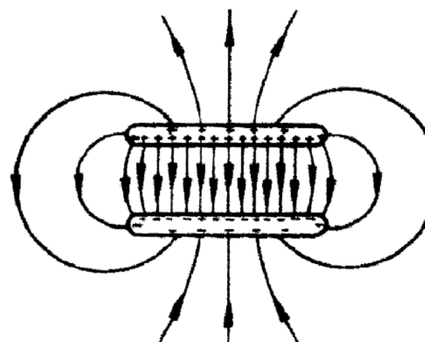
a　　　　b



a. 一对等量异号电荷



b 一对等量同号电荷



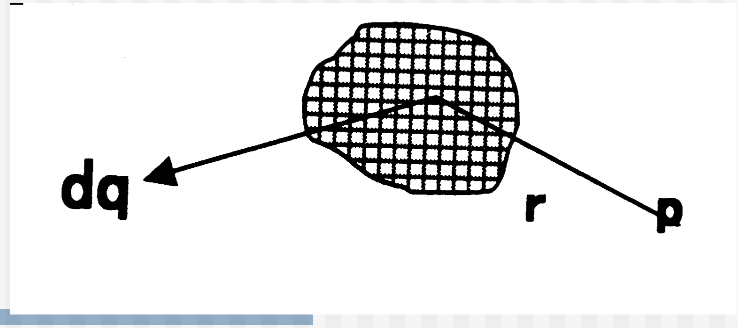
c 一对带等量异号电荷的平行板

场强叠加原理

- 实际就是力的叠加原理
  - 点电荷组在空间某点产生的电场等于各点电荷单独存在时在该点产生的场的矢量和。

$$\vec{E}=\sum_i \vec{E_i}$$

连续带电体



$$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i \Rightarrow \vec{E}=\iiint d\vec{E}$$

- 点电荷场 $$d\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E}=\iiint d\vec{E}=\iiint\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

三重积分?

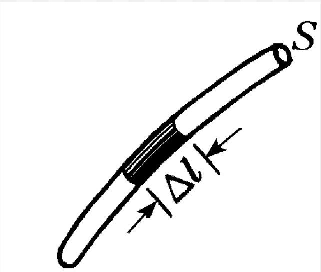
注意 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i \quad \vec{E}=\iiint d\vec{E}, \quad d\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$

- 上式求和和积分都是矢量求和与积分，具体计算时，要化成标量积分
- dq是什么？积分限如何确定？几重积分？

由带电体的电荷分布决定

体分布$dq=\rho_e dV$　　ρ_e为体电荷密度

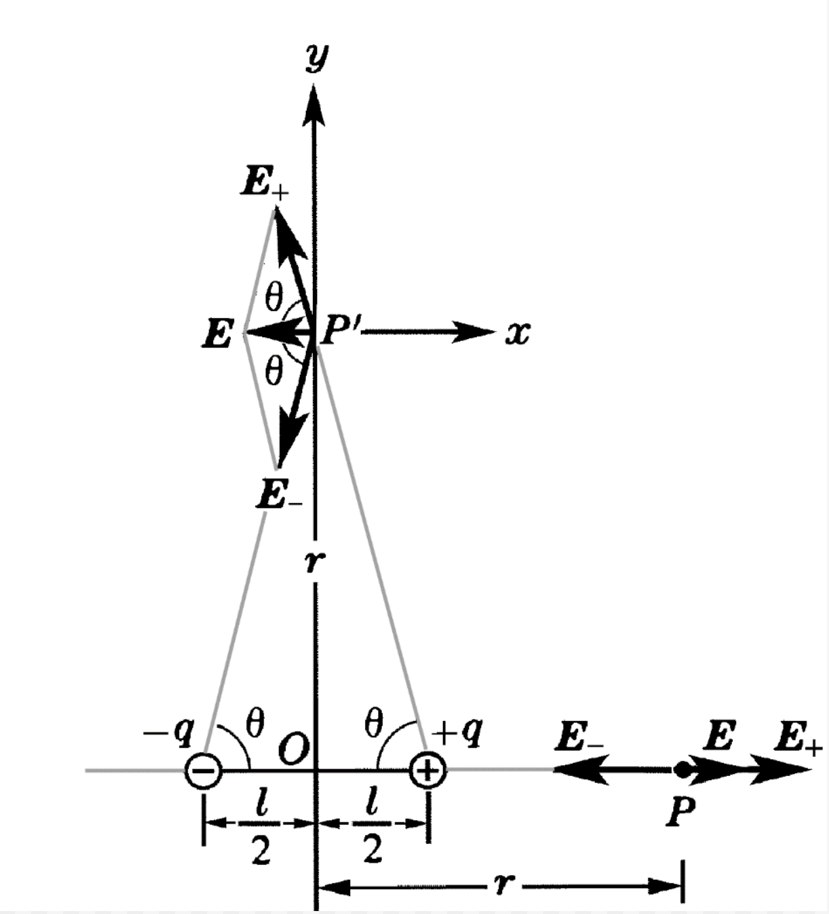
面分布$dq=\sigma_e dS$　　σ_e为面电荷密度



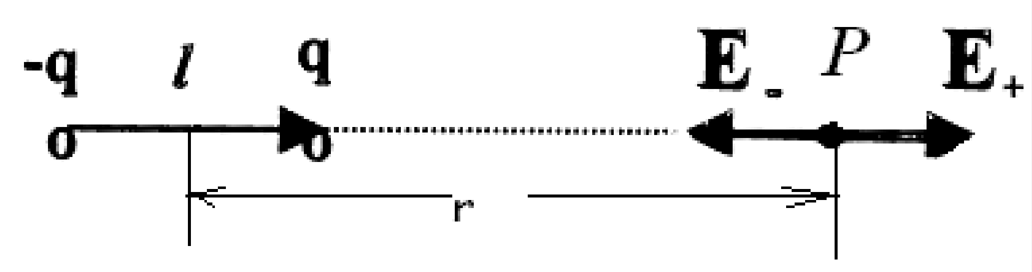
线分布$dq=\eta_e dl$　　η_e为线电荷密度

例题：

计算电偶极子臂的延长线上和中垂线上的场强分布,设 $l << r$



（1）延长线上



$$E_P = E_+ - E_-$$

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r-\frac{l}{2})^2} \rightarrow \qquad E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r+\frac{l}{2})^2} \leftarrow$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2rl}{(r^2-l^2/4)^2}\right] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2lr}{r^4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2P}{r^3}$$

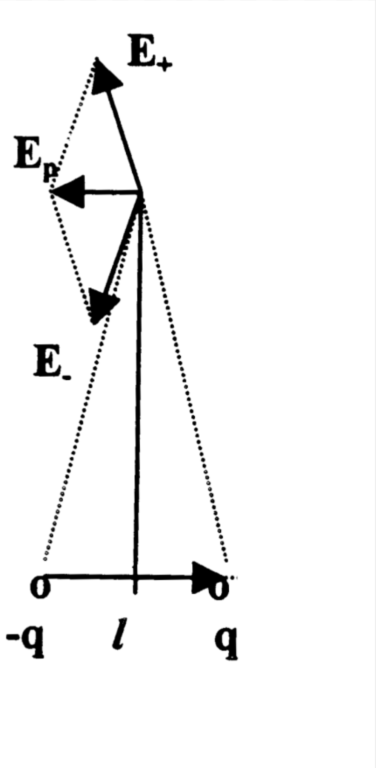
l <<r

定义 $\vec{P} = q\vec{l}$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{P}}{r^3}$$

(2)中垂面上

$$\vec{E} \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}}{r^3}$$



$$\left|\vec{E_+}\right| = \left|\vec{E_-}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2 + l^2/4}$$

y方向：分量抵消

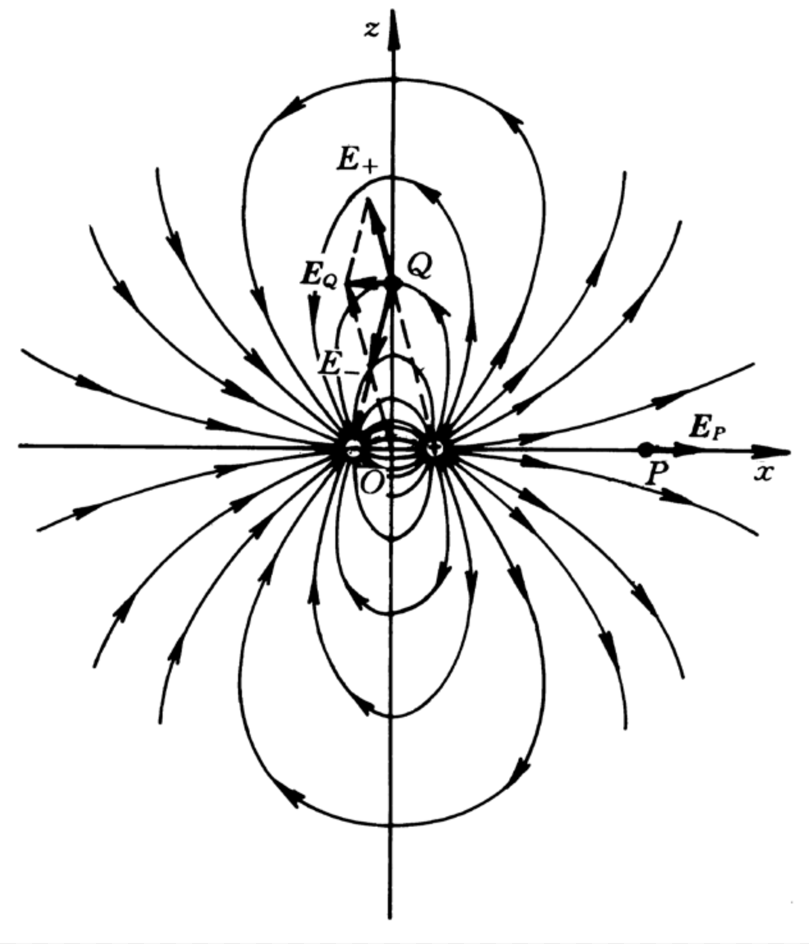
x方向：投影方向相同

$$E_{p'} = E_+\cos\theta + E_-\cos\theta, \qquad \cos\theta = \frac{l/2}{\sqrt{r^2 + l^2/4}}$$

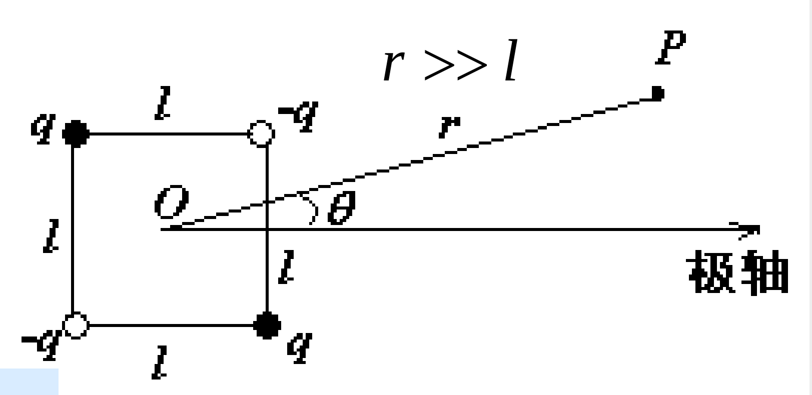
$$= 2\left|\vec{E_+}\right|\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{(r^2 + l^2/4)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{r^3(1 + l^2/4r^2)^{3/2}}$$

$$\boxed{\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P}{r^3}} \qquad (令 x = \frac{l}{2r} << 1, \quad \sqrt{(1+x^2)^3} \approx 1 + \frac{3}{2}x^2 + \cdots \approx 1)$$

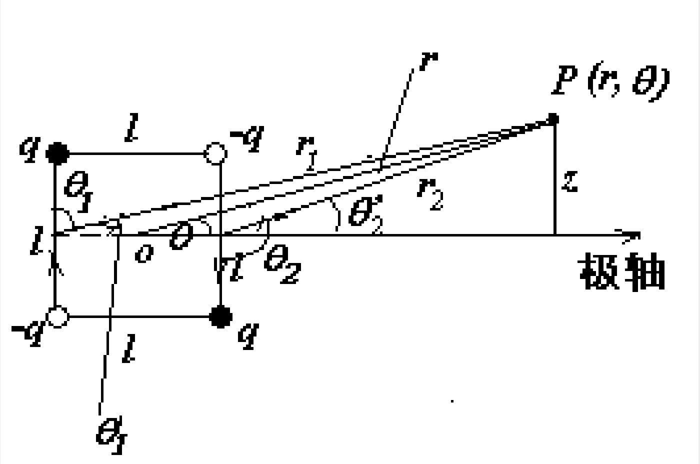
电偶极子电场线



如图电四极子证明：它在P点产生的电势为



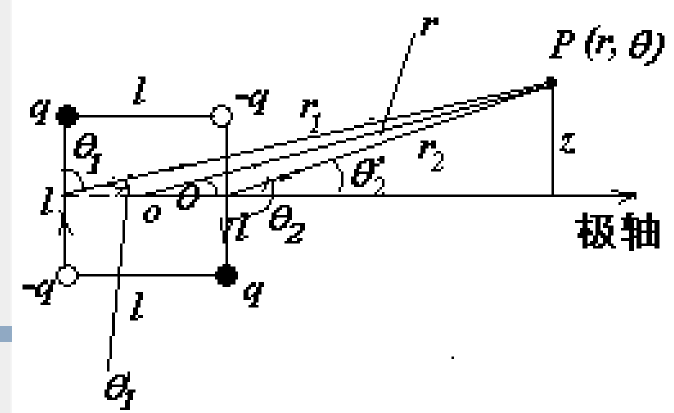
$$U=-\frac{3ql^2\sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\quad (r>>l)$$



- 求电势可以利用电偶极子的结果再叠加
- 电四极子可以看成相互反平行的电偶极子叠加
- 一个电偶极子在P点的电势表达式为

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{r}}{r^3}=\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\quad (r>>l)$$

一种做法　　因为$r>>l$　所以$\theta'_1 \approx \theta'_2 \approx \theta$



1与P相距　$r_1 = r + \frac{l}{2}\cos\theta$

2与P相距　$r_2 = r - \frac{l}{2}\cos\theta$

$$\cos\theta_1 = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta'_1) = \sin\theta'_1 \approx \sin\theta$$

$$\cos\theta_2 = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta'_2) = -\sin\theta'_2 = -\sin\theta$$

$$U_P = U_1 + U_2 = \frac{ql\cos\theta_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} + \frac{ql\cos\theta_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2} = \frac{ql\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$

$$\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \approx \left[\frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\cos\theta\right)^2} - \frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\cos\theta\right)^2}\right] \approx \frac{1 - \frac{l}{2r}\cos\theta - 1 - \frac{l}{2r}\cos\theta}{r^2\left(1 - \left(\frac{l}{2r}\cos\theta\right)^2\right)^2} = -\frac{l\cos\theta}{r^3}$$

$$U_P = U_1 + U_2 \approx \frac{ql\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) \approx -\frac{ql^2\sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

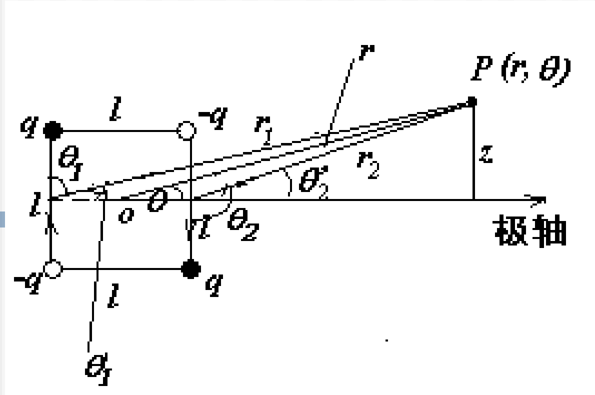
与要证明的结果不同？题错了？

分析　主要原因是：近似$\theta'_1 \approx \theta'_2 \approx \theta$不合理

对于1与r_1的夹角θ_1

$$\cos\theta_1 = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta'_1) = \sin\theta'_1 = \frac{z}{r_1}$$

对于2与r_2的夹角θ_2



$$\cos\theta_2 = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta'_2) = -\sin\theta'_2 = -\frac{z}{r_2}$$

$$\frac{z}{r} = \sin\theta$$

$$z = r\sin\theta$$

$$\cos\theta_1 = \frac{r}{r_1}\sin\theta = \frac{r\sin\theta}{r + \frac{l}{2}\cos\theta}$$

$$\cos\theta_2 = -\frac{r}{r_2}\sin\theta = -\frac{r\sin\theta}{r - \frac{l}{2}\cos\theta}$$

$$U_P = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{\cos\theta_1}{r_1^2} + \frac{\cos\theta_2}{r_2^2}) = \frac{qlr\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3})$$

如何计算?

计算

$$\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}=\frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\cos\theta\right)^3}-\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\cos\theta\right)^3}=\frac{1}{r^3\left(1+\frac{l}{2r}\cos\theta\right)^3}-\frac{1}{r^3\left(1-\frac{l}{2r}\cos\theta\right)^3}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{l}{2r}\cos\theta\right)^3-\left(1+\frac{l}{2r}\cos\theta\right)^3}{r^3\left(1-\left(\frac{l}{2r}\cos\theta\right)^2\right)^3}\approx\frac{1-\frac{3l}{2r}\cos\theta-1-\frac{3l}{2r}\cos\theta}{r^3}=-\frac{3l}{r^4}\cos\theta$$

需要做泰勒展开

$$U_P=\frac{qlr\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right)=-\frac{qlr\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3l}{r^4}\cos\theta=-\frac{3ql^2\sin\theta\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

- 合理近似，忽略高阶无穷小

与叉乘相关的公式

- **Biot和Savart通过设计实验研究电流对磁极的作用力——毕奥－萨筏尔定律**

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_1(d\vec{l}_1 \times \vec{r})}{r^3}\quad\left\langle\begin{array}{l}\text{与}Idl\text{、}\sin\theta\text{成正比，与}r^2\text{成反比}\\ d\vec{B}\perp d\vec{l}_1,\vec{r}\text{构成的平面}\end{array}\right.$$

- **安培定律**

$$d\overrightarrow{F_{12}} = k\frac{I_1 I_2 d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \hat{r}_{12})}{r^2_{12}} = I_2 d\vec{l}_2 \times d\vec{B}_1,$$

- **洛伦兹力**

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

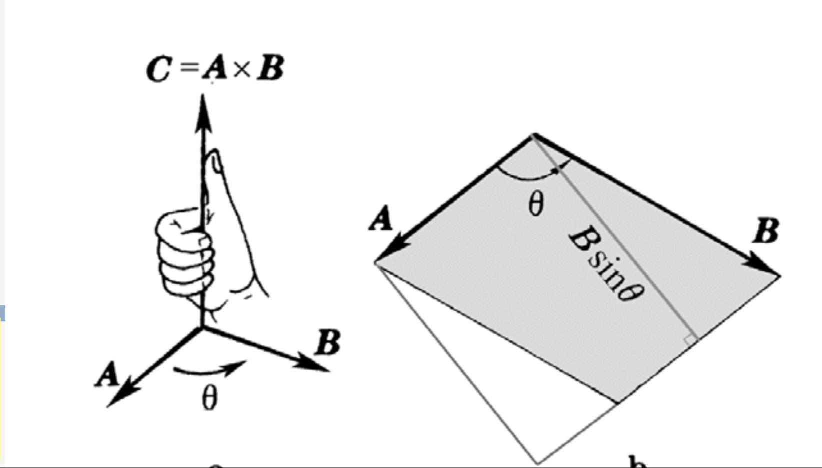
- **能流密度**

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

- **磁力矩**

$$\vec{L} = \vec{m} \times \vec{B}$$

叉乘（矢积）规则



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\theta\,\hat{k}$$

是A、B为边组成的平行四边形面积

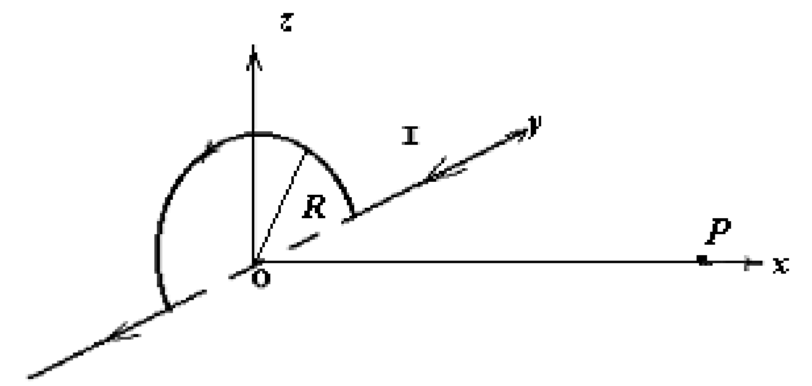
$\vec{A}$与$\vec{B}$平行或反平行，$\theta = 0$或π, $|C| = 0$

$\vec{A}$与$\vec{B}$垂直，$\theta = \pi/2$, $|C| = AB$

$\vec{A} \times \vec{A} = 0$ $\quad$ $\vec{B} \times \vec{A} = -AB\sin\theta\,\hat{k} = -\vec{C}$

中学生对叉乘不熟悉，特别要注意其方向性

求磁感应强度B



- 例一：一无穷长载流直导线，在某处弯成一个半径为R的半圆形，通以电流I，求垂直于*O*点的直线上一点*P*(*OP*=x)的磁感应强度
- 解：分三段取微元算
  - 半圆
  - 两半无限长
- 问题：
  - 可否先求出闭合圆环轴线上的场再取其二分之一?
  - 对半圆取微元求*dB*，如此投影?

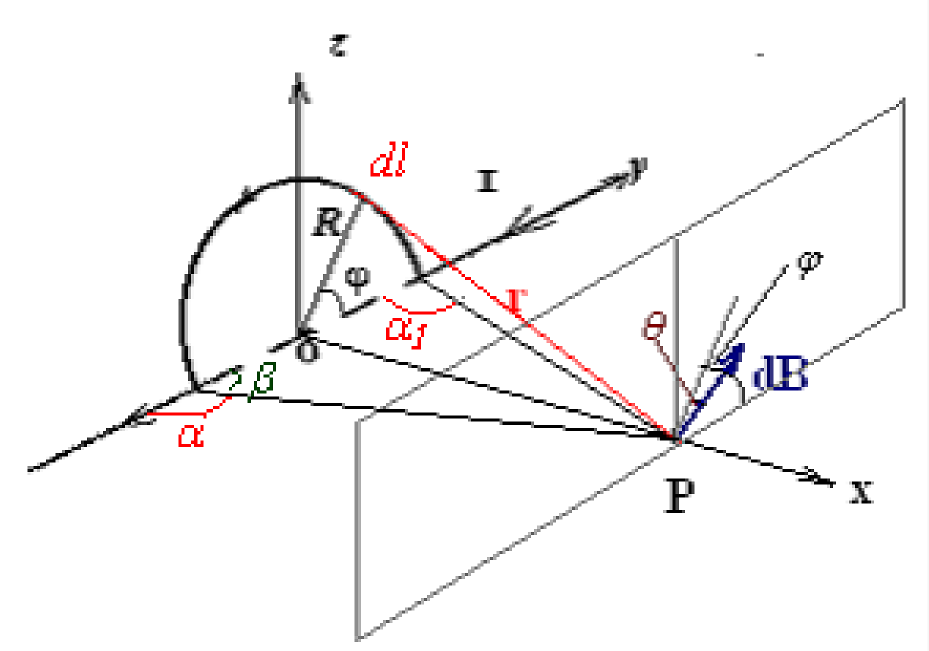
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$dB_x = dB\sin\theta,$$

$$dB_z = dB\cos\theta$$

?

结论:



- 算整个圆环后取1/2，只求了 *x*轴分量，丢掉了 *z*分量
- 如此投影没有考虑d*B*矢量性

$$dB_x = dB\sin\theta,$$
$$dB_z = dB\cos\theta$$

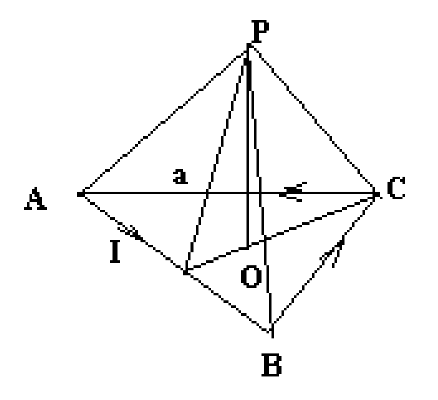
X

- 正确的做法

$$dB_x = dB\sin\theta,$$
$$dB_z = dB\cos\theta\sin\varphi$$

✓ 注意各个量的表示

例二：如图电流 *I*流过边长为*a*的等边三角形导线，求电流在此三角形为底的正四面体的顶点处P的磁感应强度*B*的大小和方向



- 解：一根有限长载流导线中线上的*B*

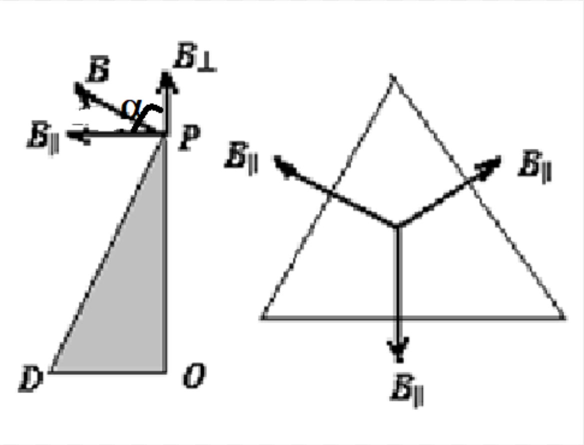
$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}[\cos\theta_1 - \cos(\pi - \theta_1)] = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cos\theta_1$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \cos\theta_1 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

- 则等边三角形三根边在P点的磁感应强度为

$$\sum B_{\parallel} = 0$$

$$B_{AB} = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{3}\pi a} = B_{BC} = B_{CA} = B_1$$ 三者方向



$$\therefore B_P = \sum_{1}^{3} B_{\perp} = 3B_{\perp} = 3B_1\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{OD}{PD} = \frac{1}{3}$$

$$B_P = 3\frac{\mu_0 I}{2\sqrt{3}\pi a}\frac{1}{3} = \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{3}\pi a} = \frac{\sqrt{3}\mu_0 I}{6\pi a}$$ 方向向上

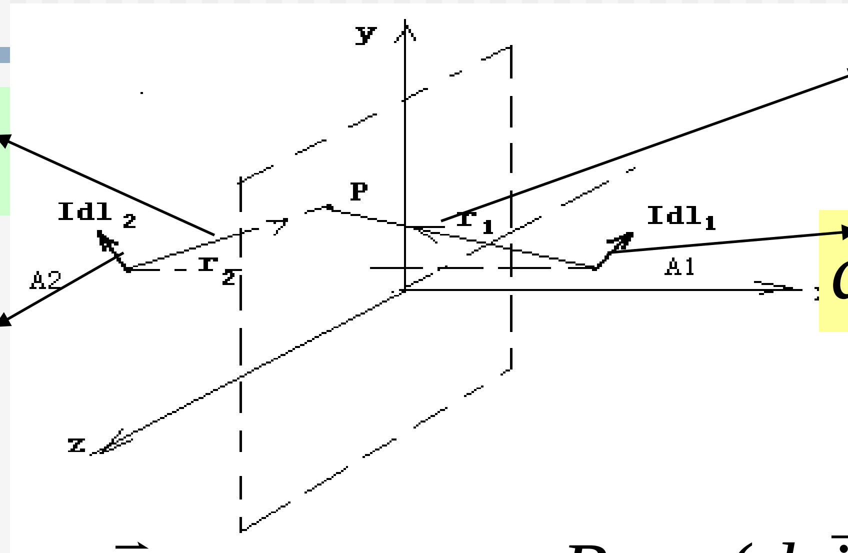
- **例三：证明当一对电流元对一平面成镜象对称时，它们在对称面上产生的合磁感应强度必沿平面的法线方向**

$\overrightarrow{A_2P}=(a,b,c)=\vec{r}_2$

$\overrightarrow{A_1P}=(-a,b,c)=\vec{r}_1$

$d\vec{l}_2=-dx\vec{i}+dy\vec{j}$

$d\vec{l}_1=dx\vec{i}+dy\vec{j}$



$$d\vec{B}_P\propto d\vec{l}_1\times\vec{r}_1+d\vec{l}_2\times\vec{r}_2$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ dx & dy & 0 \\ -a & b & c \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} i & j & k \\ -dx & dy & 0 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$=2cdy\vec{i}$$

$$B_P\propto(dx\vec{i}+dy\vec{j})\times\vec{r}_1$$

$$+(-dx\vec{i}+dy\vec{j})\times\vec{r}_2$$

$$=dx\vec{i}\times(\underbrace{\vec{r}_1-\vec{r}_2}_{-2a\vec{i}})+dy\vec{j}\times(\underbrace{\vec{r}_1+\vec{r}_2}_{2b\vec{j}+2c\vec{k}})$$

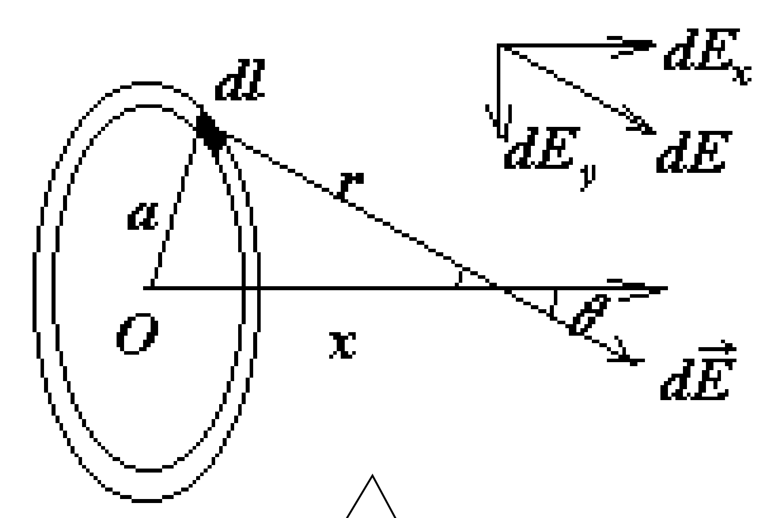
$$=2cdy\vec{i}$$

微元法

- 对连续带电体无限分割成微元，写出微元的场，将微元的场叠加求出带电体的场
- 适用于已知电荷分布求电场
- 适用于已知电流分布求磁感应强度
- 微元法步骤
  - 取微元→对称性分析→积分 →讨论

例题：微元法求电场强度

- 求均匀带电圆环轴线上的场强分布，设圆环半径为*a*，带电总量为*Q*。



电荷线密度
单位长度的电量

$$\eta = \frac{Q}{2\pi a}$$

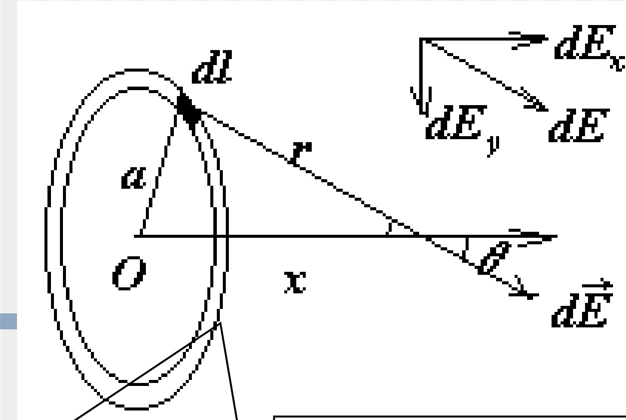
$$dq = \eta dl$$

微元

$$\left| d\vec{E} \right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\eta dl}{x^2+a^2}$$

对称性分析

- y方向投影，抵消，$E_y=0$
- x方向，同向



3.求积分

$$\vec{E}=\int d\vec{E}\Rightarrow \quad E_x=\int dE_x$$

只需要求x方向的电场

$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}},\qquad dE_x=dE\cos\theta \qquad \rightarrow$$

$$E_x=\int dE_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\eta}{(x^2+a^2)^{3/2}}\int_0^{l=2\pi a}dl=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

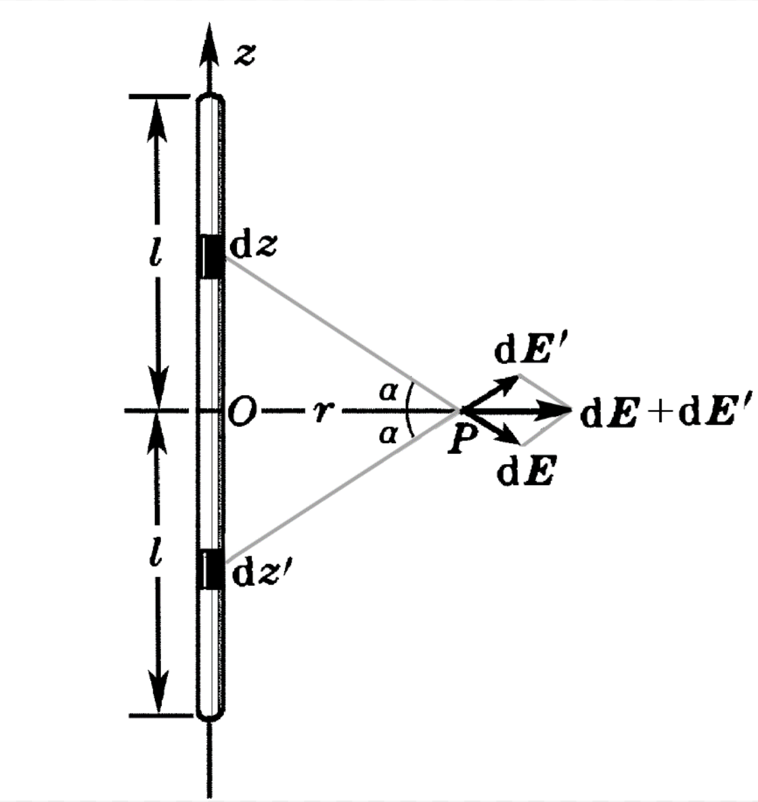
一元定积分

$$\xrightarrow{x>>a} E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{x^3(1+\frac{a^2}{x^2})^{3/2}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^2}$$

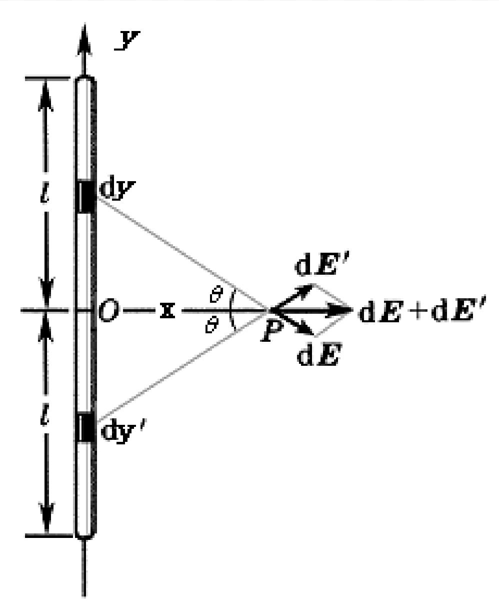
就是点电荷的电场

例题:

- 求均匀带电棒中垂面上的场强分布，设棒长为$2l$，带电总量为Q。



1.取微元



$$\left|d\vec{E}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{x^2+y^2}$$

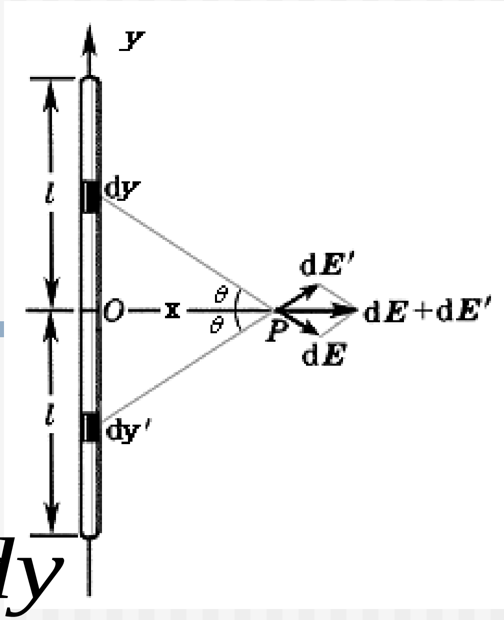
其中，$\lambda = \dfrac{Q}{2l}$ **方向如图** $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2.对称性分析

$$E_y = 0, \quad dE_x = 2dE\cos\theta = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\lambda dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

3.积分

$$dE_x = 2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\lambda dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$



$$\vec{E} = \int d\vec{E} \Rightarrow E_x = \int dE_x$$

$$E_x = \int dE_x = 2\int_0^l \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x\lambda dy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda l}{x\sqrt{x^2+l^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x\sqrt{x^2+l^2}} = E \quad \rightarrow$$

教学生学会查常用积分表

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y}{x^2\sqrt{x^2+y^2}} + C$$

4.讨论

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda l}{x\sqrt{x^2+l^2}}\to \qquad l\longrightarrow\infty$$

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda l}{x\sqrt{l^2(\frac{x^2}{l^2}+1)}}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{l^2}+1}}\xrightarrow{l\to\infty}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$$

- **即为与无限长均匀带电棒相距x处的场强**
  - **具有轴对称性，相同的x处， E相同**
- **思考：**
  - **若上题中求的不是中垂面上的场强** $E_y=0?$

若$x>>l$ $\qquad E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda l}{x^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{x^2}$

常用微分和不定积分表

$$\mathrm{d}u^n = nu^{n-1}\mathrm{d}u$$

$$\int u^m \mathrm{d}u = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C$$

$$\mathrm{d}\,ln\,u = \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = ln\,u + C$$

$$\mathrm{d}e^u = e^u \mathrm{d}u$$

$$\int e^u \mathrm{d}u = e^u + C$$

$$\mathrm{d}\cos\theta = -\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\cos\theta + C$$

$$\mathrm{d}\sin\theta = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int \cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \sin\theta + C$$

- 太多记不住，这几个公式用的多

例题：载流直导线的磁场

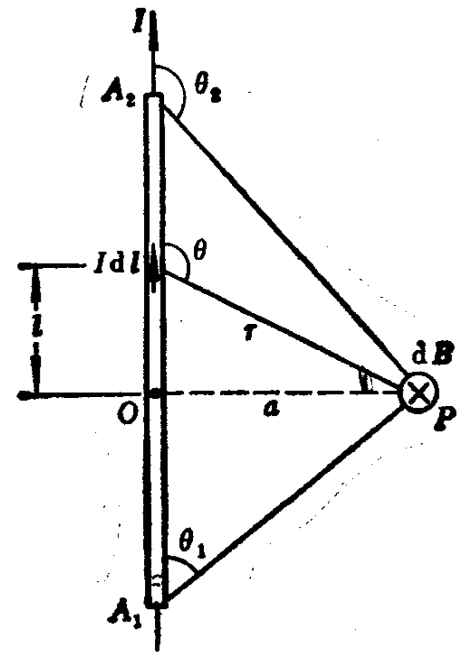


图 4-12 载流直导线的磁场

- 微元法
- 分割，取微元*Idl*
- 微元在P 点的磁感应强度

$$d\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(d\vec{l}\times\vec{r})}{r^3}\left\langle \begin{array}{l} \text{大小}: \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Idl\sin\theta}{r^2} \\ \text{方向}: \otimes \end{array}\right.$$

- 叠加

$$B = \int_{A_1}^{A_2} dB = \int_{A_1}^{A_2} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{r^2}$$

$$l = -actg\theta;$$

$$dl = \frac{a}{\sin^2\theta}d\theta$$

$$r = \frac{a}{\sin\theta}$$

■计算

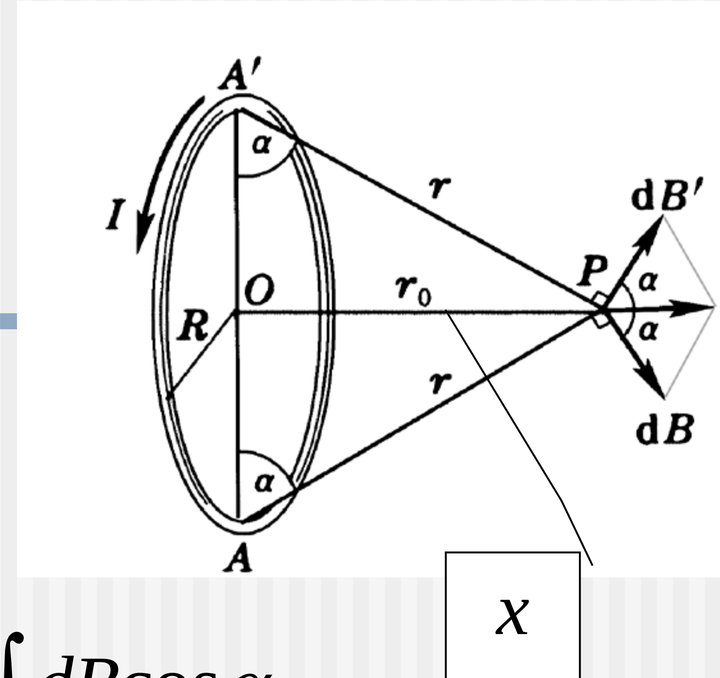
$$B=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\theta d\theta}{a}=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(-\cos\theta)\Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

无限长 $\theta_1=0,\theta_2=\pi,$ $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

半无限长 $\theta_1=0,\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$ $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}$

例题：载流圆线圈轴线上的磁场

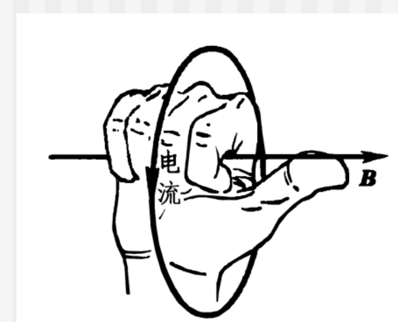


$$\mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{Idl}\ \sin\theta}{r^2} \qquad \sin\theta=0$$

- 由对称性,只有x分量不为零,即 $B_x=\int dB_x=\int dB\cos\alpha$

$$B_x=\int\frac{\mu_0 Idl}{4\pi r^2}\cos\alpha=\frac{\mu_0 IR\cdot 2\pi R}{4\pi(R^2+x^2)^{3/2}} \qquad \cos\alpha=\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

$$=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+x^2)^{3/2}}\rightarrow \quad x\rightarrow 0,\ B_x=\frac{\mu_0 I}{2R}$$



微元法小结：

- 关键是如何写出电荷微元的表达式，写出微元的电场表达式
- 利用对称性，可以将三重积分变化为一元微积分
- 微元的选取
  - 求均匀带电圆盘轴线上一点的场强?
  - 正方形带电线框中垂线上一点的场强?
  - 长方形带电板中垂线上一点的场强?

电磁学中
涉及到矢量场论的一些概念

力线、面积分、通量和散度
线积分和环流和旋度
等势面和梯度

矢量场论的一些基本概念

- 在介绍高斯定理和环路定理时，涉及到场的通量和环流的概念，其中会涉及到曲面积分、曲线积分,场的梯度、散度和旋度等
- 这些概念对于没有系统地学习数学场论的内容的同学理解和应用有一定的困难
- 可以结合电磁学教学内容以类比的方式和图像描述帮助同学建立这些概念
- 关于场论的内容可以参考《新概念物理教程》电磁学附录B

力线、通量

- 为什么要研究通量、环流？
  - 对象变导致一系列深刻的变化——不仅规律的形式，而且规律的性质发生变化

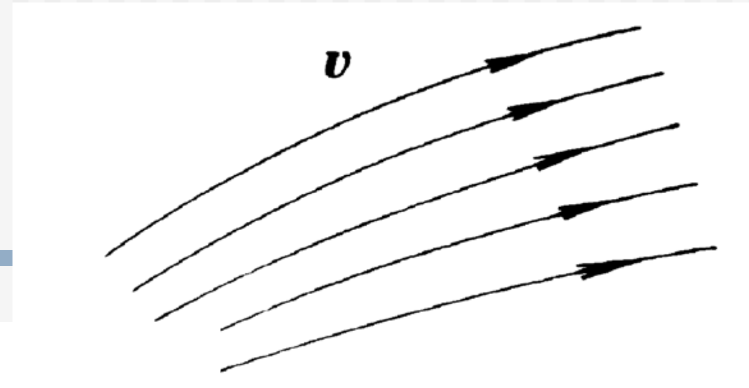
研究范畴	对象	规律	规律的性质
牛顿力学	质点、刚体、连续体	可逆	决定论
热学	大量分子构成的群体	不可逆性	非决定论
		引入熵	概率论

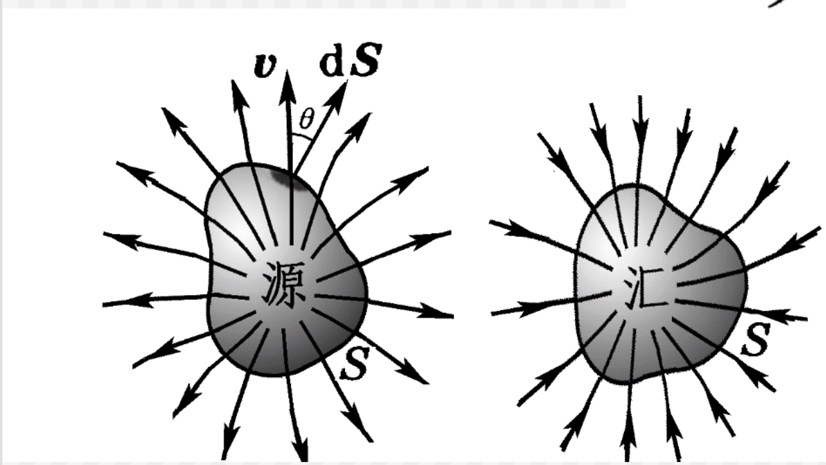
- 表明研究对象变化，规律性质发生变化，
- 会有相应的数学手段的引入
- 如牛顿研究引力的同时提出了微积分

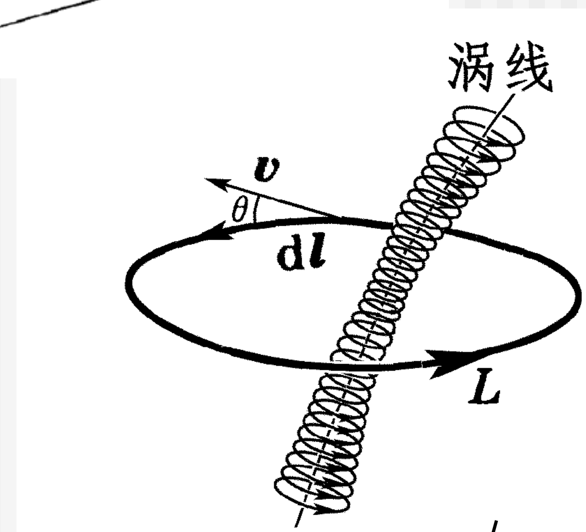
场是一定空间范围内连续分布的客体

- 温度T　　温度分布——温度场（标量场）
- 流速v　　流速分布——流速场（矢量场）
- 电荷产生的电场具有什么性质?
  - 已知电荷可以根据场强定义和叠加原理求场分布
  - 已知场分布也可求得其他带电体在其中的运动
  - 物理学家不满足于这些，各种各样的电荷的场分布五花八门，只是表面现象，其本质是什么?
  - 期望从不同的角度揭示电场的规律性
  - 经过探索通过与流体类比找到用矢量场论来描述电场
- 电流产生的磁场具有什么性质?
  - 与电场有相同的问题，需要揭示磁场的规律性

流速场





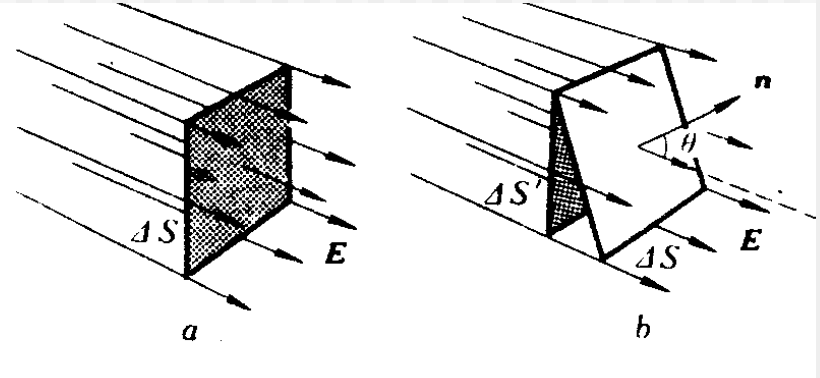


通量 $\oiint\limits_{S} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0?\left\langle \begin{matrix} >0 \\ <0 \end{matrix}\right.$

环流 $\oint\limits_{L} \boldsymbol{v}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\left\langle \begin{matrix} =0 \\ \neq 0 \end{matrix}\right.$

- 有源（或汇）、有旋、两者兼而有之

以电场为例类比



- 流线——电力线
- 流量——电通量

通过dS的通量 $d\Phi_E = EdS\cos\theta = \vec{E}\cdot d\vec{S}$

矢量点乘为标量

- 物理意义：穿过dS的电力线的根数
- 电通量与电场强度的关系？
- 定义电力线数密度：单位面积内电力线的根数

令其等于该处电场强度的大小

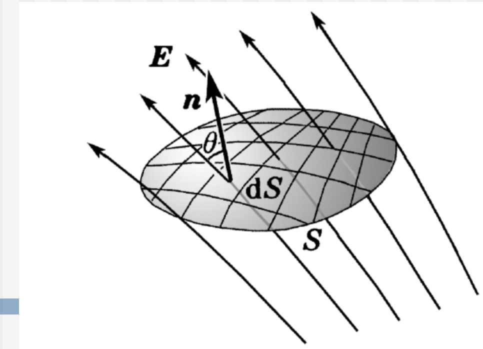
- 人为定义

$$E = \frac{dN}{dS'} \qquad dN = EdS' = \vec{E}\cdot d\vec{S} = d\Phi_E$$

$dS' \perp E$

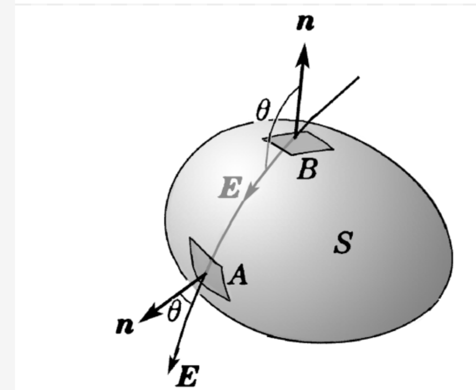
任意曲面

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



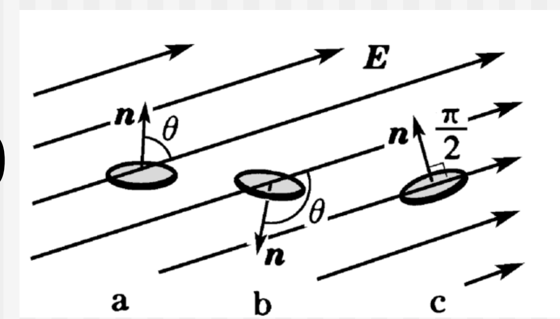
任意闭合曲面

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



- 规定：
- 取闭合面外法线方向为正，则

$$\theta < \frac{\pi}{2}, d\Phi_E > 0 \quad ; \theta > \frac{\pi}{2}, d\Phi_E < 0$$



高斯定理

Gauss面上的场强，是所有电荷产生的场

面内电量的代数和，与面外电荷无关

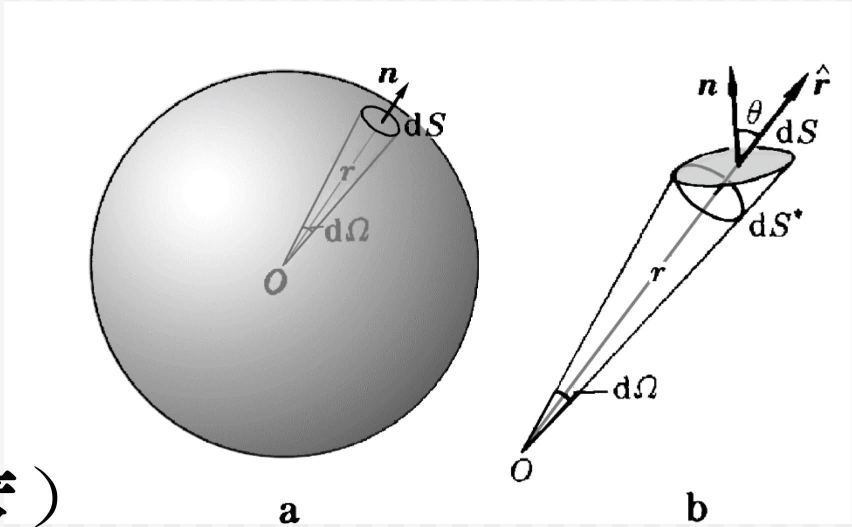
$$\Phi_E = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

通过任意闭合曲面的电通量

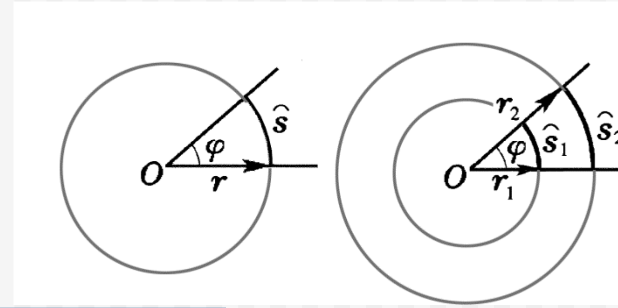
Gauss面

- 立体角定义

$$d\Omega = \frac{dS'}{r^2} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}\cdot d\boldsymbol{S}}{r^2}$$（球面度）



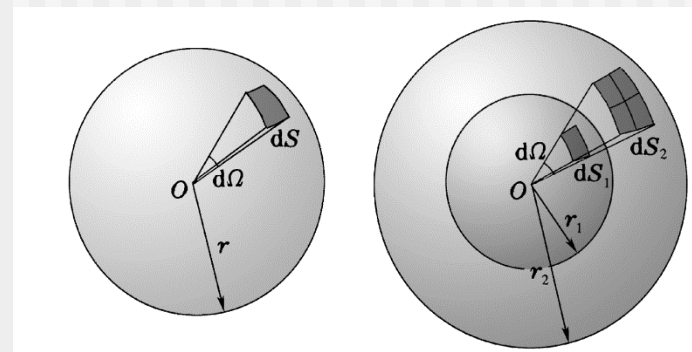
从平面角到立体角



- 平面角φ的大小可以用“弧度”来量度，如图所示

$$\varphi = \frac{\hat{S}}{r}\, rad$$

- 整个圆的周长为$2\pi r$
- 圆周角是$2\pi\ rad$



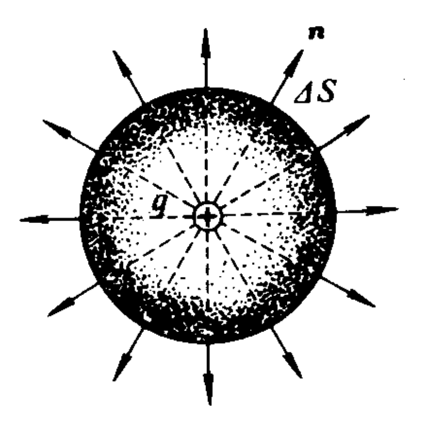
- 在球面上取一面元dS,由面元的边缘各点引直线到球心O，构成锥体，顶角是立体的，叫立体角。

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{r^2}\, sr$$

球面度

- 整个球面面积是 $4\pi r^2$
- 整个球面所张的立体角$4\pi\ sr$

证明： 从特殊到一般



- 点电荷q被任意**球面**包围

设$q>0$，场具有球对称性

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E dS = \oiint_S \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dS$$

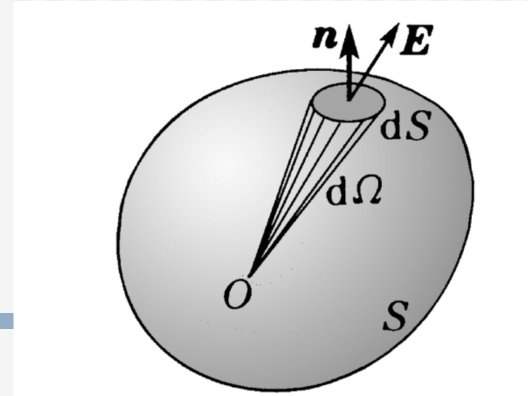
$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

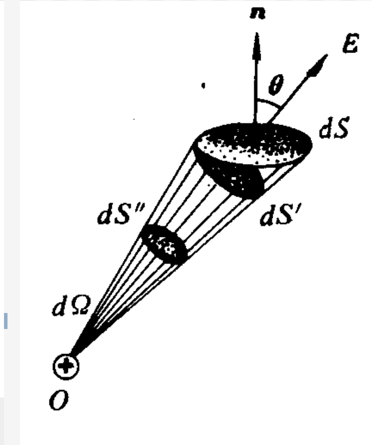
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\oiint_S dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{4\pi r^2}$$

- 一个点电荷所产生的电场，在以点电荷为中心的任意球面的电通量等于 q/ε_0

点电荷q被任意曲面包围





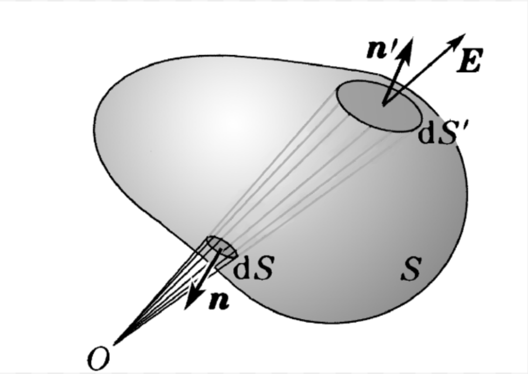
- 对整个闭合面S有

$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{S'}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\boxed{\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{S}}{r^2}} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$$

$$\Phi_E = \oiint_S d\Phi_E = \oiint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\oiint_S d\Omega}_{4\pi} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

- 包围一个点电荷的任意曲面上的电通量等于 q/ε_0
- 结果与电力平方反比律分不开 $f \propto r^{-2}$

闭合曲面不包围点电荷



- 闭合曲面不包围点电荷，dS′与dS所对的立体角

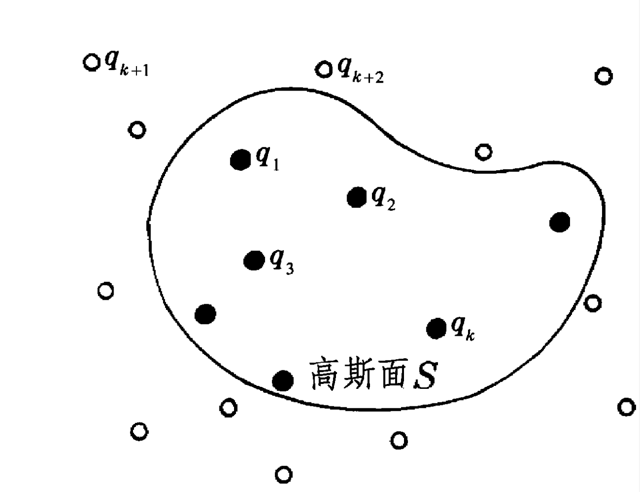
$$d\Omega' = -d\Omega$$

$$\Phi'_E = -\Phi_E$$

- 则电通量也有
- 对于闭合面S’+S，总通量为 $\Phi_E = 0$

- 结论：通过不包围点电荷的闭合曲面的电通量为零

多个点电荷被任意闭合曲面包围



- 设带电体系由*n*个点电荷组成，其中 *k*个在闭合面内，*n-k*个在闭合面外
- 由场强叠加原理，通过闭合面的总通量为

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{E}_1\cdot d\vec{S} + \cdots + \oiint_S \vec{E}_k\cdot d\vec{S}$$

$$+ \underbrace{\oiint_S \vec{E}_{k+1}\cdot d\vec{S} + \cdots + \oiint_S \vec{E}_n\cdot d\vec{S}}_{=0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$$

讨论： Gauss 定理说明

- 闭合面内的电荷决定通过闭合面的电通量,只要 S内**电荷不为零**，则通量不为零——有源
  - 正电荷 —— 喷泉形成的流速场—— 源
  - 负电荷 —— 有洞水池中的流速场——汇
- 闭合**面外的电荷**虽然对通量没有贡献，但并不意味着不影响闭合面上的电场，高斯面上的场强是空间所有带电体所产生的
- 高斯定理是静电场的一条重要的定理，有其重要的理论地位，是静电场基本方程之一 ，它是由库仑定律导出的， 反映了电力平方反比律 ，如果电力平方反比律不满足，则高斯定理也不成立。

高斯定理微分形式

- **数学场论的高斯定理**

$$\oiint_S \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}V$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- **高斯定理微分形式，有源**

静电场的环路定理　电势

- 电荷间的作用力是有心力 ——环路定理
- 讨论静电场的环流

流速场的环流 $\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \begin{cases} \neq 0 \Rightarrow \text{有旋} \\ = 0 \Rightarrow \text{无旋} \end{cases}$

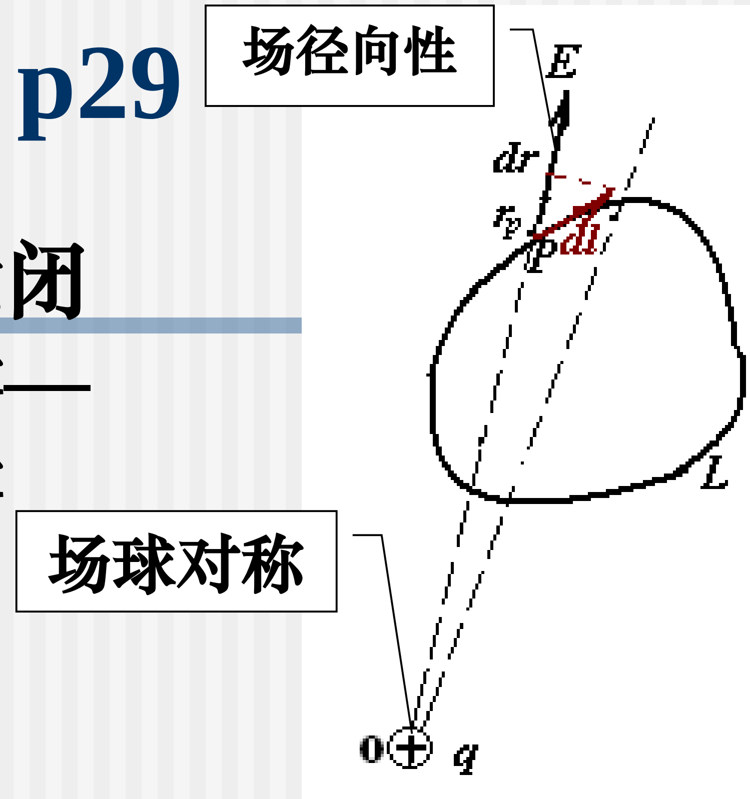
- 静电场：电力线不闭合
- 可以猜到静电场的环流为零

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

静电场的环路定理 p29

- 在静电场中，场强沿任意闭合环路的线积分恒等于零——静电场的环量处处为零

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$



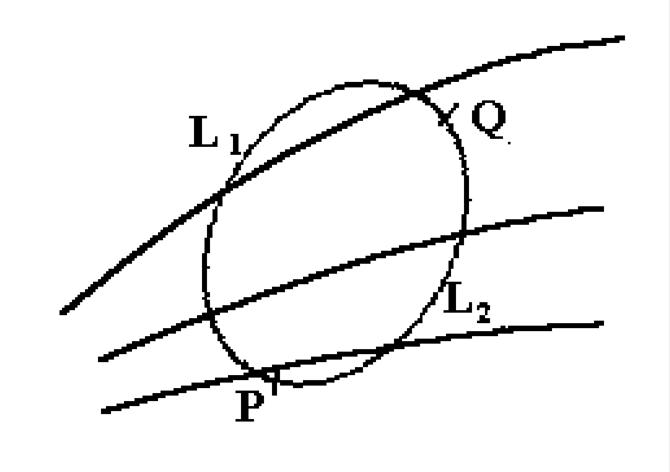
- 点电荷场

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_L \frac{\hat{r}\cdot d\vec{l}}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_L \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_p}^{r_p} = 0$$

- 推广（叠加原理）

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{E}_1\cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{E}_2\cdot d\vec{l} + \cdots = 0$$

静电场的环路定理



- 场强沿任意闭合环路的线积分恒等于零 等价于 静电场力做功只与起点终点有关，与路径无关
- 在任意电场中取一闭合回路，将试探电荷沿路径L从 p——Q——P，电场力所做的功为

$$A = \oint_L q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_{P(L_1)}^{Q} \vec{E} \cdot d\vec{l} + q_0 \int_{Q(L_2)}^{P} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$q_0 \int_{p(L_1)}^{Q} \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \int_{p(L_2)}^{Q} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

环路定理微分形式

- 数学场论斯托克斯公式

$$\oint_L \vec{A}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{A})\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{E})\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = 0$$

- 环路定理微分形式，无旋

电场强度和电势

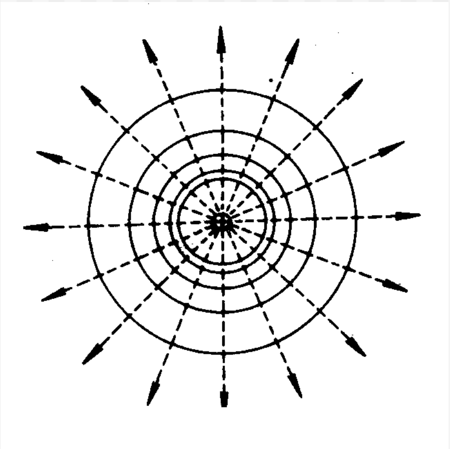
- 已知场强 → 可求电势
- 已知电势 → 可否求场强？
- 等势面
  - 等势面与电力线处处正交
  - 证明：设一试探电荷q_0沿任意一个等势面作一任意元位移*dl*电场力所做的元功

$$dA = q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 E dl \cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{l}$$

- 等势面密集处场强大，稀疏处场强小
- 证明：设：电场中任意两个相邻等势面之间的电势差为一定的值，按这一规定画出等势面图（见图），以点电荷为例，其电势为

$$U(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \quad 微分 \Rightarrow dU(r)=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}dr$$



因为相邻等势面电势差为一定值，所以有

$$dr \longrightarrow |\Delta r| \qquad , dU \longrightarrow |\Delta U|$$

定值

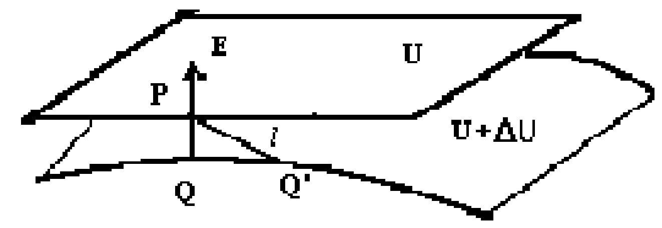
$$|\Delta r|=\frac{4\pi\varepsilon_0}{q}r^2|\Delta U| \qquad 而 \quad E\propto\frac{1}{r^2}$$

半径之差∝r^2

$|\Delta r|$越大 $\Rightarrow r^2$越大，等势面间距越大，越稀，E越小

$|\Delta r|$越小 $\Rightarrow r^2$越小，等势面间距越小，越密，E越大

电势梯度



- 场有分布，沿各方向存在不同的方向微商
- 梯度：最大的方向微商
  - 如 速度梯度 温度梯度等
- 沿Δ*l*的方向微商可以表示为 $\frac{\partial U}{\partial l}=\lim\limits_{\Delta l \longrightarrow o}\frac{\Delta U}{\Delta l}$
- 若取垂直方向，即场强方向Δ*n*，则沿该方向的方向微商为 $\frac{\partial U}{\partial n}=\lim\limits_{\Delta n \longrightarrow o}\frac{\Delta U}{\Delta n}$ 显然 $\Delta n=\Delta l\cos\theta$

有 $\frac{\partial U}{\partial n}=\frac{\partial U}{\partial l}\frac{1}{\cos\theta}$，或 $\frac{\partial U}{\partial l}=\frac{\partial U}{\partial n}\cos\theta \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial l}\leq\frac{\partial U}{\partial n}$

结论：两等势面间U沿Δn 方向的变化率比沿其他任何方向的变化率都大

- 电势梯度
  - 方向：沿电势变化最快的方向
  - 大小：$\dfrac{\partial U}{\partial n}$
- 在三微空间 $\dfrac{\partial U}{\partial n} \longrightarrow \nabla U$或$gradU$
- 电势梯度与场强的关系

$$\Delta U = \left| \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{l} \right| \approx E\Delta n \quad \Rightarrow E = \left| \lim_{\Delta n \longrightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta n} \right| = \frac{\partial U}{\partial n}$$

Δn 很小，
场强E变化不大

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} U \, (gradU) \qquad \vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

矢量微分算符

直角坐标系表示

- *E*总是沿着指向电势减少的方向——*E*与*Δn*相反
- 在数学场论中把 $\vec{\nabla} U$: 称作梯度

  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$: 称作散度

  $\vec{\nabla} \times \vec{A}$: 称作旋度
- 边讲物理概念，边交代数学概念

磁场的高斯定理

- **磁通量**
  - **任意磁场，磁通量定义为**

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

- **磁感应线的特点：**
  - **环绕电流的无头无尾的闭合线或伸向无穷远**

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$ → **磁高斯定理　无源场**

磁高斯定理的微分形式

- **利用数学的高斯定理**

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\iiint_V \nabla\cdot\vec{B}\,dV = 0$$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

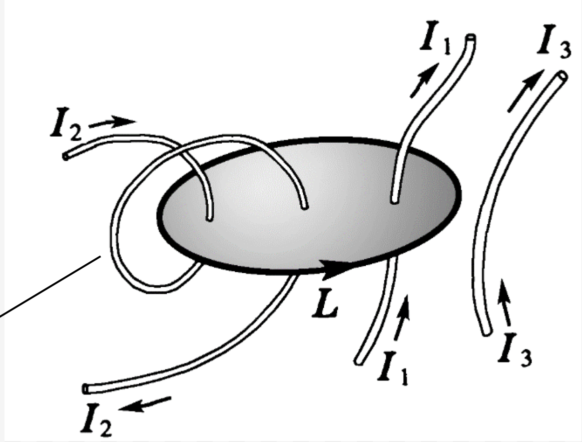
- **说明恒磁场的散度为零——无源场**

安培环路定理

- **表述：**
  - 磁感应强度沿任何闭合环路L的线积分，等于穿过这环路所有电流强度的代数和的μ_0倍

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I$$

$$\sum_{L内} I = I_1 - 2I_2$$



安培环路定理的微分形式

- 利用斯托克斯定理

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L内} I$$

$$\iint_S (\nabla\times\vec{B})\cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

微分形式

- **说明B的旋度不为零——有旋场**

场的分类及Maxwell方程组

- 按照场的通量和环流特征可以将电磁场加以分类
  - 静电场　　有散——有源场　无旋——保守场
  - 静磁场　　无散——无源场　右旋——非保守场
  - 电磁感应场 无散——无源场　左旋——非保守场
- 最后经过推广总结出电磁场的Maxwell方程组

$$\oiint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_{S内} q_0 \qquad \nabla\cdot\vec{D} = \rho_{e0}$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot \boldsymbol{d}\vec{l} = -\oiint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \boldsymbol{d}\vec{S} \qquad \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_{L内} I_0 + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \nabla\times\vec{H} = \vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

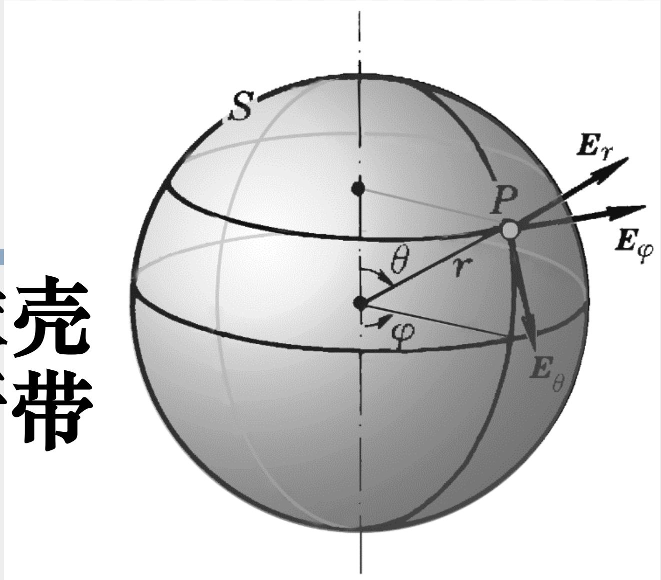
归纳

- 电磁场的性质是用场论的数学形式描述的
- 刚接触电磁学的学生往往被这些数学符号难住了
- 我们应该注意引导学生注重场论的概念的理解，特别是通过类比的方法建立电磁场力线和等势面等假想的图像，从而理解通量，环流的概念，进一步理解场的性质
- 可以看到，普物层次的电磁学仅限于利用场论的概念来讨论电场、磁场的性质，并没有要求计算复杂的三重积分或者面积分
- 在高斯定理和环路定理应用时，一般都限于讨论强对称性的电场或磁场

Gauss定理应用列举

- 定理反映了静电场的性质——有源场
- 提供求带电体周围的电场强度的方法
- 例题
  - 球对称的电场
  - 轴对称的电场
  - 无限大带电平面的电场

球对称的电场



- 例题：求均匀带正电球壳内外的场强，设球壳所带电量为Q，半径为R
- 在球坐标下分析：　$E(p) \sim E_r$，E_θ，E_φ
    - 球壳电荷均匀分布，围绕任一直径都是旋转不变——场强分布也不变，但旋转时E_θ和E_φ变——只有$E_\theta=0$和$E_\varphi=0$
    - 只有径向分量E_r不为零，r相同E_r相同——场呈球对称分布

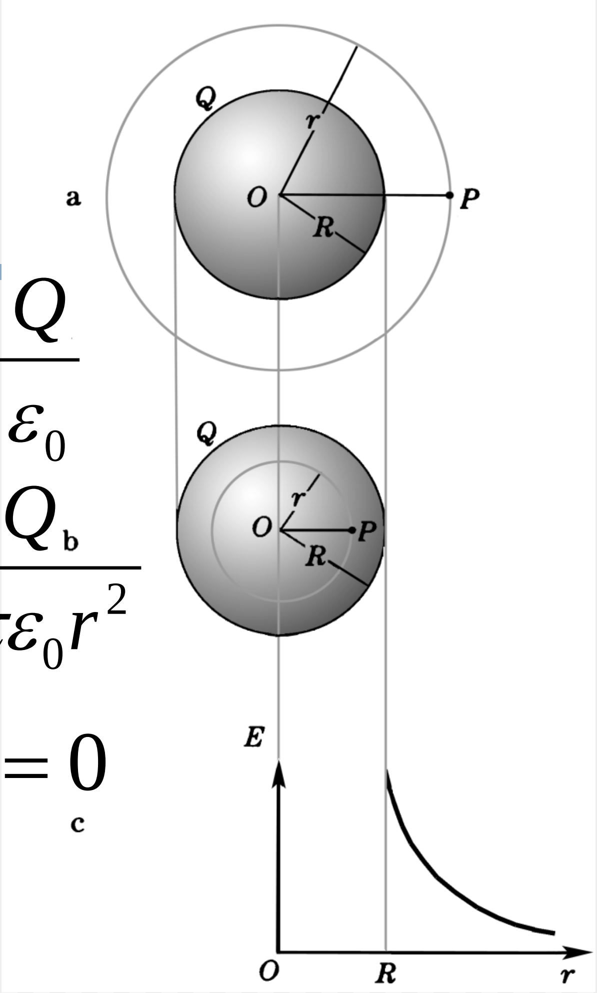
- 根据场的对称性做高斯面
- 求出通过Gauss面的通量

$$r > R \quad \Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_S EdS = E \oiint_S dS = 4\pi r^2 E \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$r < R \quad \oiint_S EdS = E \oiint_S dS = 4\pi r^2 E = 0$$

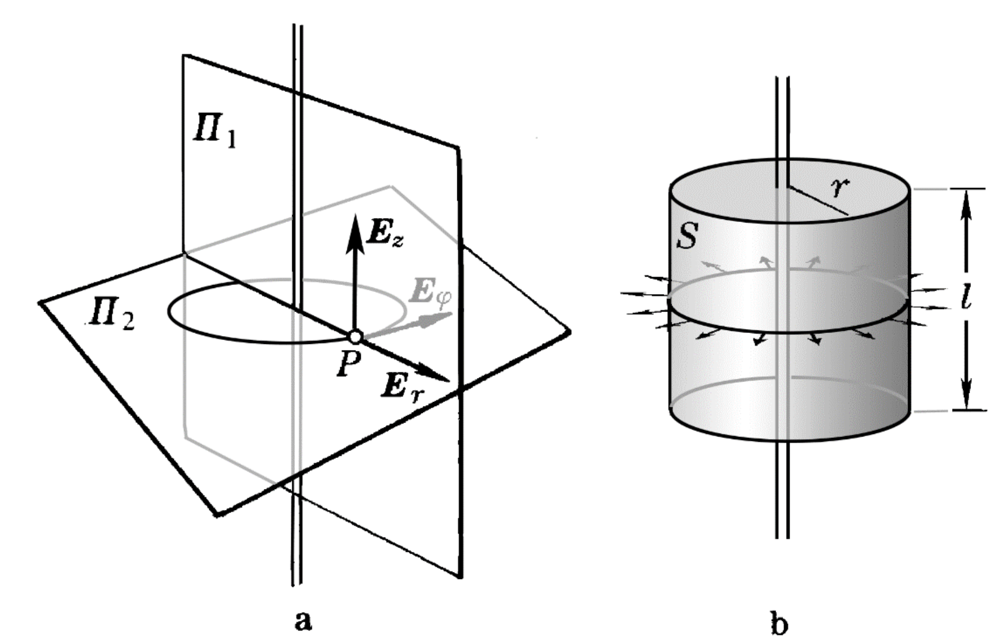
$$\Rightarrow E = 0$$



- 结论：球壳内$E=0$；球壳外 与点电荷场相同

轴对称的电场

- 例题：求无限长均匀带电棒外的场强分布
  - 在柱坐标下分析
  - 作平面Π_1和Π_2



- 柱体对Π_1镜像反射变换是不变的——场分布也不变
- 但此变换下E_φ分量反向，只有$E_\varphi = 0$
- 柱体对Π_2镜像反射变换是不变的——场分布也不变
- 但此变换下E_z分量反向，只有$E_z = 0$
- 剩下唯一不可能等于0的分量只有E_r
- 无限长圆柱体具有沿z方向的平移不变性
- ——等r处E_r相等——轴对称性

设棒上线电荷密度为+λ

- 作高斯面——以细棒为对称轴的圆柱（*l*长）
- 求出通过Gauss面的通量

$$\Phi_E = \oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

$$\iint_{上底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{下底} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{侧面} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi r l E \Rightarrow E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

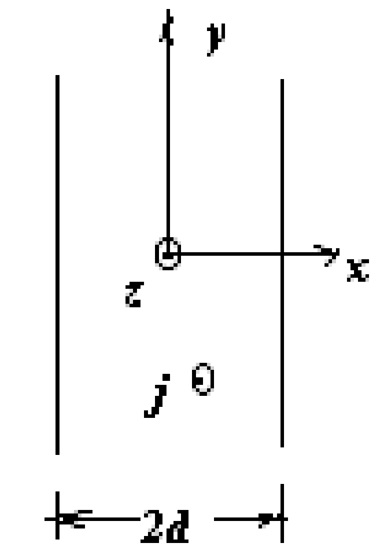
E⊥dS

E 是常数

- 用 Gauss定理可以计算具有强对称性场的场强
  - 通量要好算
  - 注意选取合适的Gauss面
- Gauss定理可以和场强叠加原理结合起来运用，计算各种球对称性、轴对称性、面对称性的场。
  - 上述三个例子的结论可以作为已知结论运用，如
  - 求两块无限大带电平面板的场分布
  - 求均匀带电球体内外的场分布
  - 求均匀带电的无限长圆柱内外场分布
  - 整体不具有对称性，但局部具有对称性的电荷分布的电场，可以分别求出场强再叠加

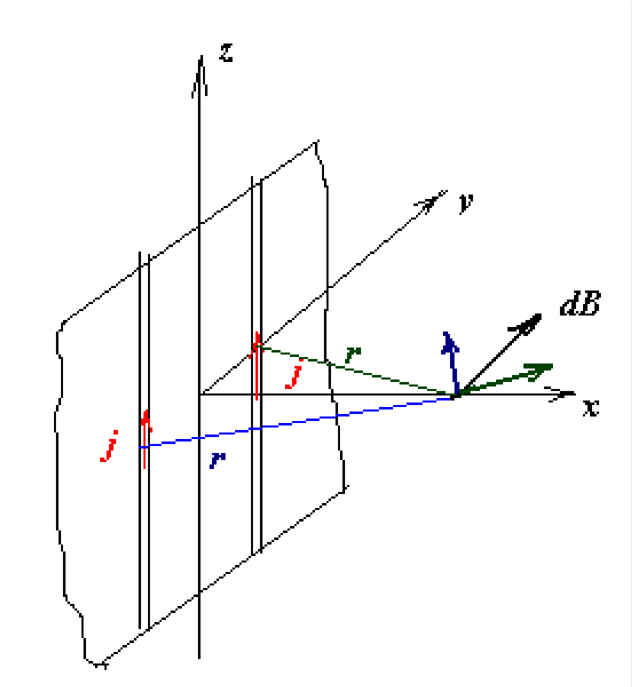
安培环路定理的应用

- 例题：如图取直角坐标系 xyz 在 $-d \le x \le d$ 的一层无穷区域内有均匀的传导电流，电流密度的方向为 z 轴的正方向，大小恒定为 j。试求区域内外各处的磁感应强度 B 的分布。



- 可以等效于一系列与Z轴平行的无限大电流平板。磁感应强度只有 y 轴分量
  - 先将平板分割成无限大载流平面
  - 讨论一块无限大载流平面产生磁场B’的对称性
  - 讨论该区域电流产生磁场的对称性
  - 利用安培环路定理算出

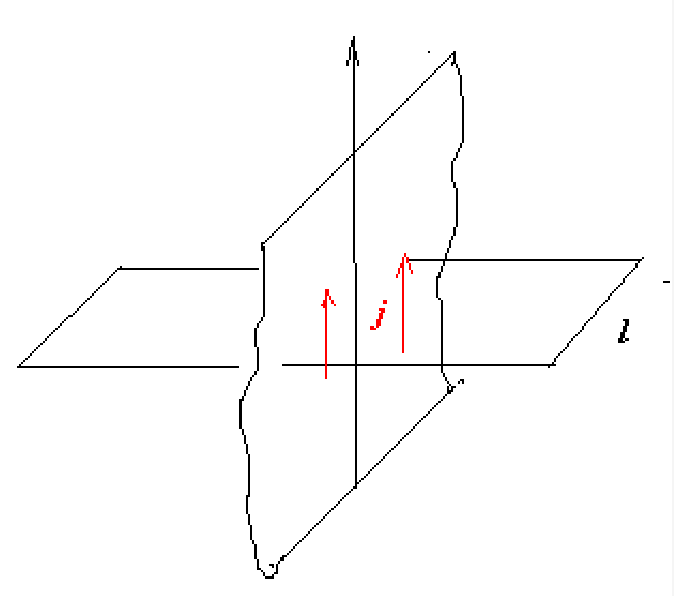
- 切一薄片沿Z轴分割成成对长直导线，叠加结果的*dB*必平行或反平行于*y*轴；
- 或者从轴矢量角度分析



- 对一块板作安培环路

$$\oint_L \vec{B}'\cdot d\vec{l} = \mu_0 jl$$

$$2lB' = \mu_0 jl \qquad \Rightarrow B' = \frac{\mu_0}{2} j$$



- **结论： *B'*与距离无关**

叠加结果：中垂面上$B=0$

$$B' = \frac{\mu_0}{2} j$$

- 作环路如图

$x < d$ $\qquad \oint_L B \cdot dl = \mu_0 jxl$

$$B = \mu_0 jx$$

$x > d$ $\qquad \oint_L B \cdot dl = \mu_0 jdl$

$$B = \mu_0 jd$$