狭义相对论

孟策 2020.08

1. 两个基本假设

☆ 简要的历史回顾

* 力学相对性原理：所有惯性系中，力学规律形式相同。

惯性 S 系 $\qquad\qquad$ 惯性 S' 系

$$\vec{F},\ m \xrightarrow{\text{测量上}} \vec{F}'=\vec{F},\ m'=m$$

$$\vec{a} \xrightarrow{\text{伽利略变换}} \vec{a}'=\vec{a}$$

$$\vec{F}=m\vec{a} \longleftrightarrow \vec{F}'=m'\vec{a}'$$

又如，$\vec{F}_{12}=-\dfrac{G m_1 m_2 \hat{\gamma}_{12}}{\gamma^2}$，$\gamma \longrightarrow \gamma'=\gamma$，

$$\therefore\ G'=G$$

* Maxwell 电磁理论，1865

$$\partial_t^2 \vec{E} - c^2\nabla^2\vec{E}=0$$

$$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

经典速度叠加原理似乎表明 Maxwell 方程仅适用于电磁场介质参考系 $\longrightarrow$ 以太(aether)系

* Michelson - Morley 实验 '1887

— 地球相对以太静止！

* Einstein '1895-1905

Maxwell 理论满足相对性原理

⇒ 真空光速不变 ⇒ 需求新的时空变换

⇒ Newton 力学需改造

☆ 两个基本假设 (Einstein '1905)

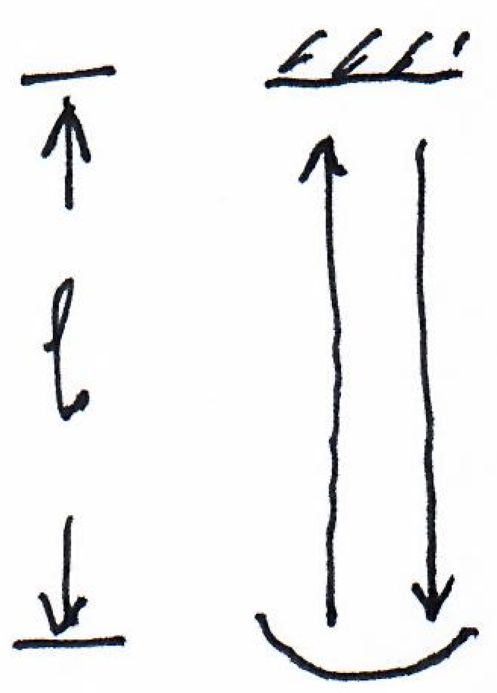
① 相对性原理

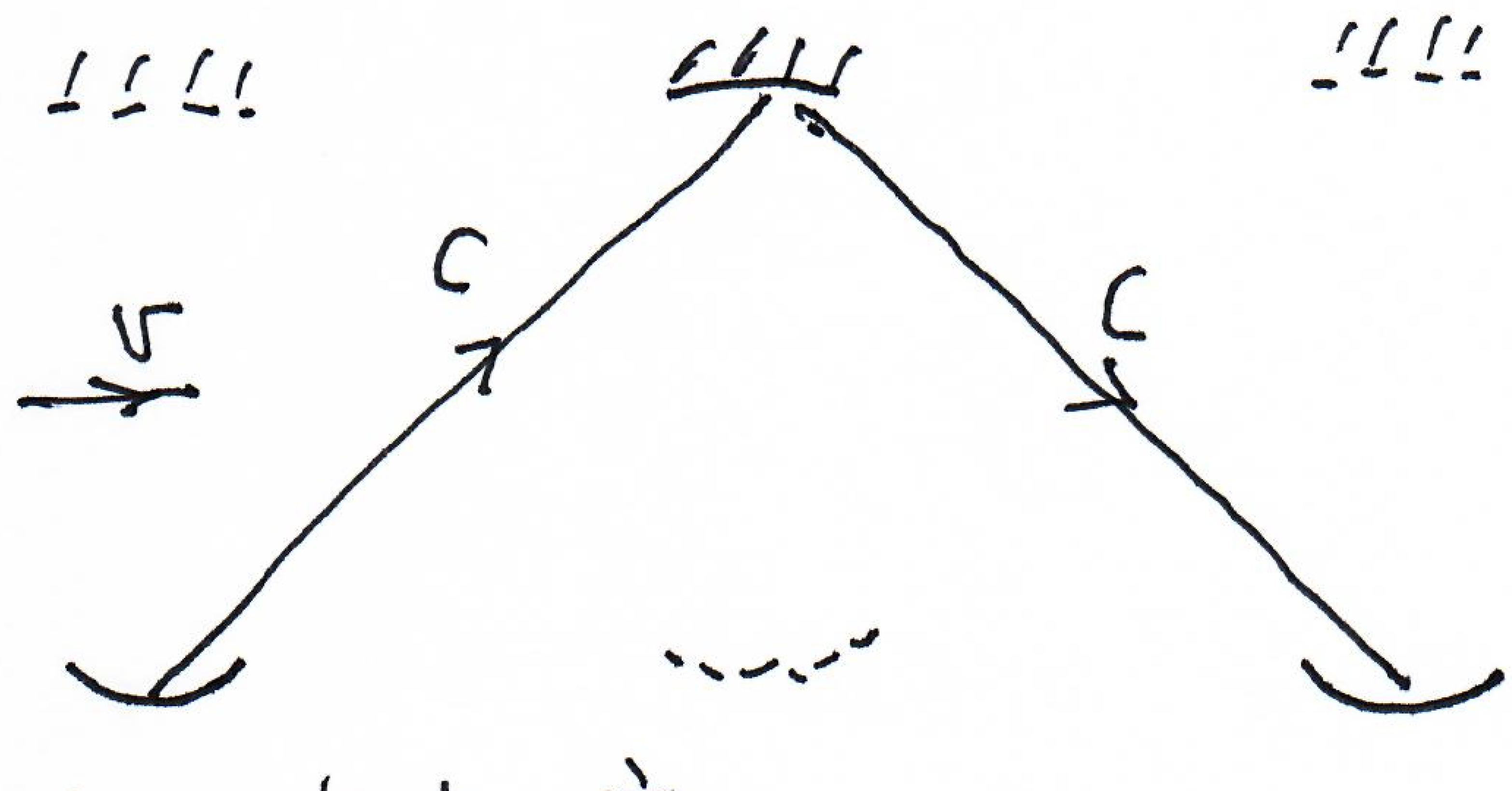
② 光速不变原理

2. 典型的相对论性时空测量效应

1). 钟慢

设计光钟(长 l) 相对惯性 S系匀速 v 运动.





S'系(随动惯性系)：发射 → 再接收

$$\begin{cases} \Delta t' = 2l/c \\ \Delta x' = 0 \end{cases}$$

S系：光速不变

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 - \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = l^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta t = \Delta t'/\sqrt{1-\beta^2}, \quad \beta = v/c \\ \Delta x = v\Delta t \neq 0 \end{cases}$$

* 取其它"物理钟"与光钟"随动"，可得相同的结果，故加上为时空测量效应，与钟的属性无关。

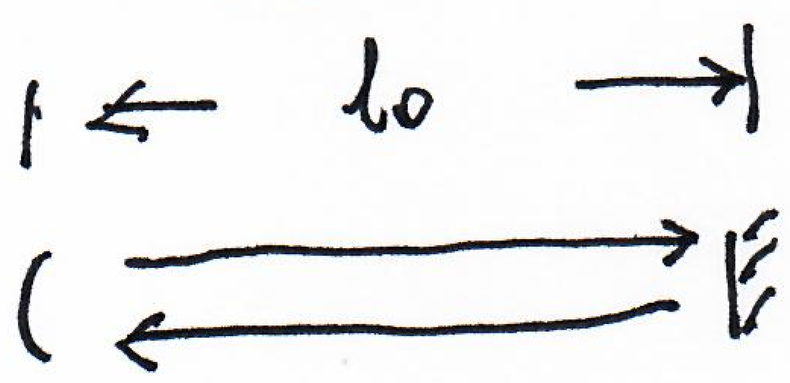
· "物理钟"：利用满足相对性原理的物理规律及过程来测量时间的装置。

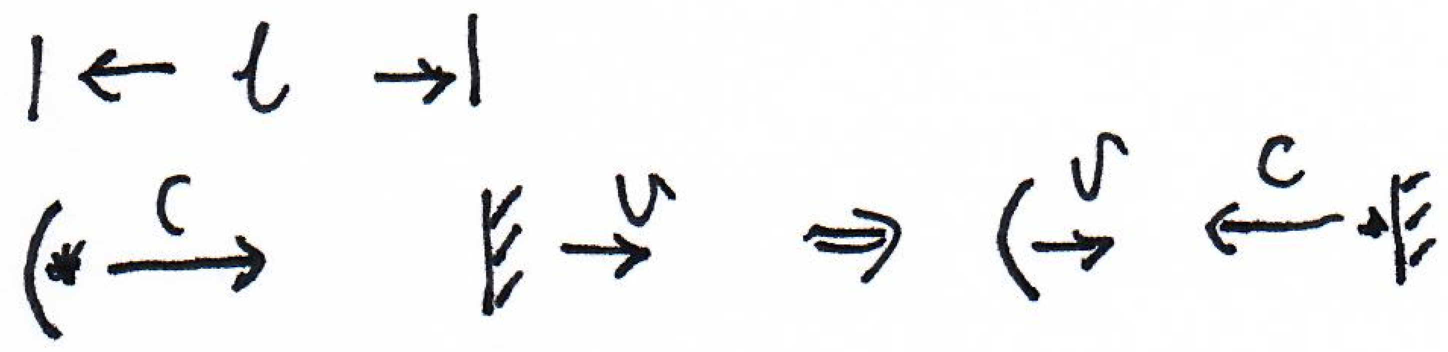
* 概括为：钟慢，时间膨胀，或"本地时长（原时）最短"

若 $\Delta x' = 0$，则 $\Delta t = \Delta t' / \sqrt{1-\beta^2}$ $(\Delta x = v\Delta t \neq 0)$

若 $\Delta x = 0$，则 $\Delta t' = \Delta t / \sqrt{1-\beta^2}$ $(\Delta x' = v\Delta t' \neq 0)$

2)、尺缩





S'系（随动惯性系）：

$$\Delta t' = 2l_0 / c$$

S系：$\Delta t = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c}\frac{1}{1-\beta^2}$

$$\Delta t = \Delta t' / \sqrt{1-\beta^2}$$

$$\therefore \quad l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$$

* 测量"动长"l 需要S系同时标定动尺两端位置。

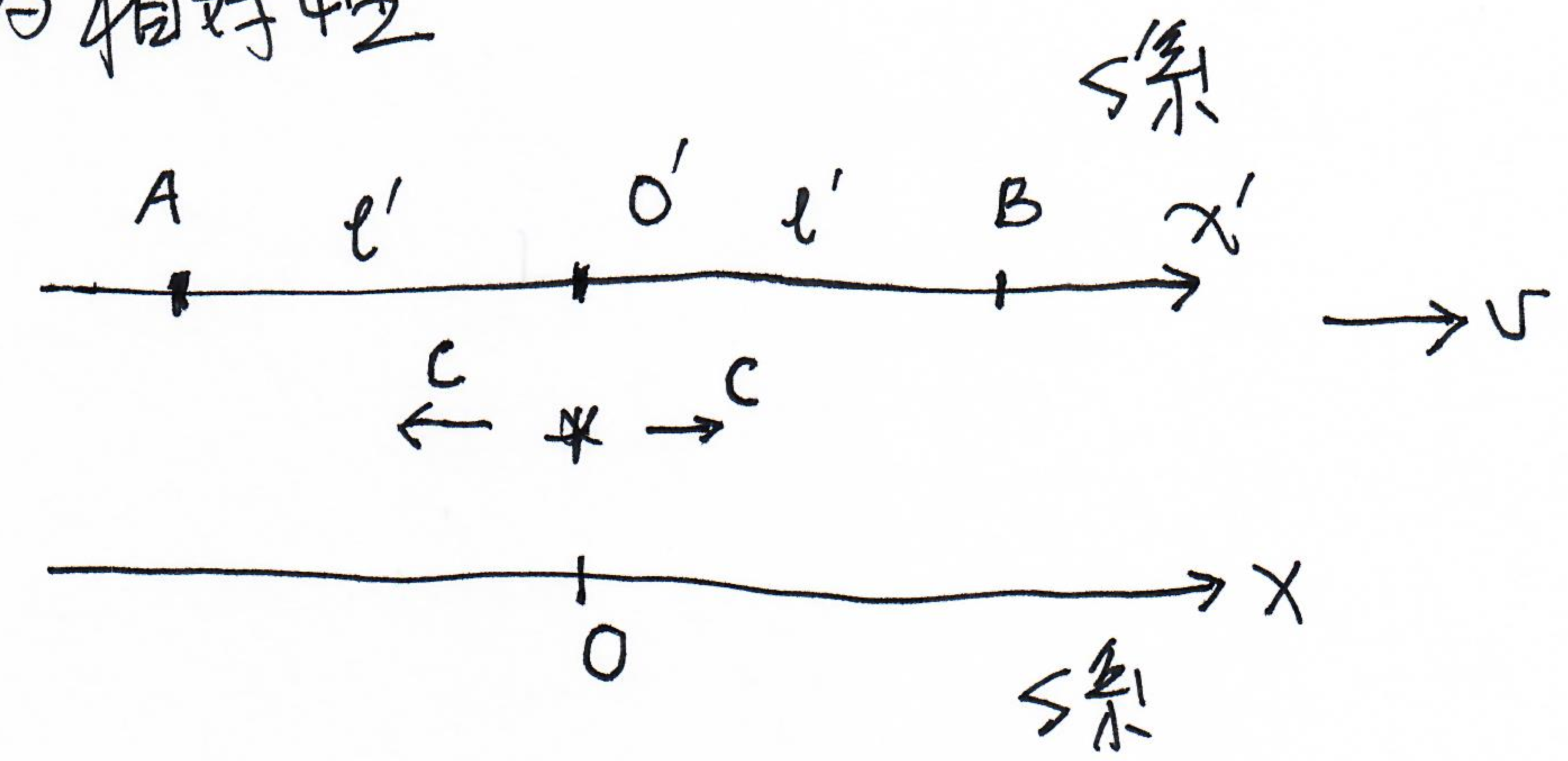
故对于两事件：

若 $\Delta t = 0$，则 $\Delta x = \Delta x'\sqrt{1-\beta^2}$ $(\Delta t' \neq 0)$

若 $\Delta t' = 0$，则 $\Delta x' = \Delta x\sqrt{1-\beta^2}$ $(\Delta t \neq 0)$

* 垂直方向(y, z)无尺缩

3) 同时的相对性



当 OO' 相遇时，校准原点时钟 $t'_{O'} = t_O = 0$

* 利用光速不变原理校准 S'系各处时钟

$$t'_A = t'_B = l'/c$$

$$\Delta t'_{AB} = 0$$

S系：
$$t_A = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, l'}{c+v} = \frac{l'}{c}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$

$$t_B = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\, l'}{c-v} = \frac{l'}{c}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$$\therefore \Delta t_{AB} = t_A - t_B = -\frac{\frac{v}{c^2}2l'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\frac{v}{c^2}\cdot\Delta x'_{AB}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

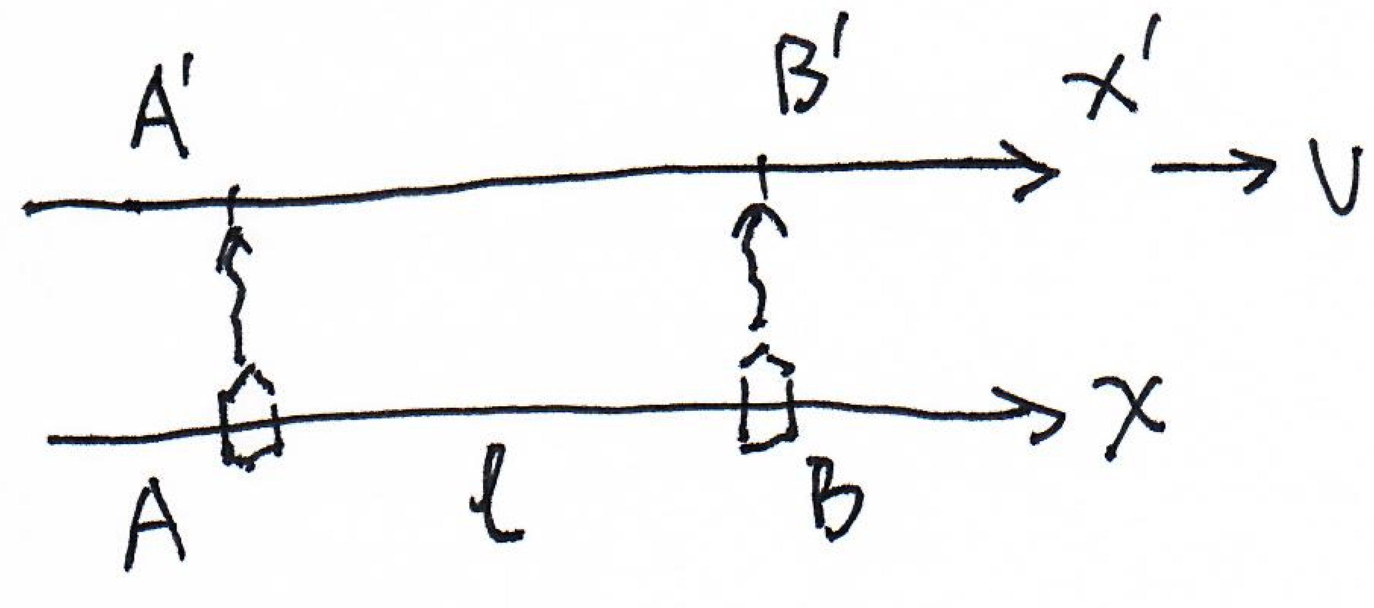
概括为，两事件

若 $\Delta t' = 0$， 则 $\Delta t = \frac{\frac{v}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{v}{c^2}\Delta x$

若 $\Delta t = 0$， 则 $\Delta t' = -\frac{\frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{v}{c^2}\Delta x'$

⟹ 例：尺缩的相对性

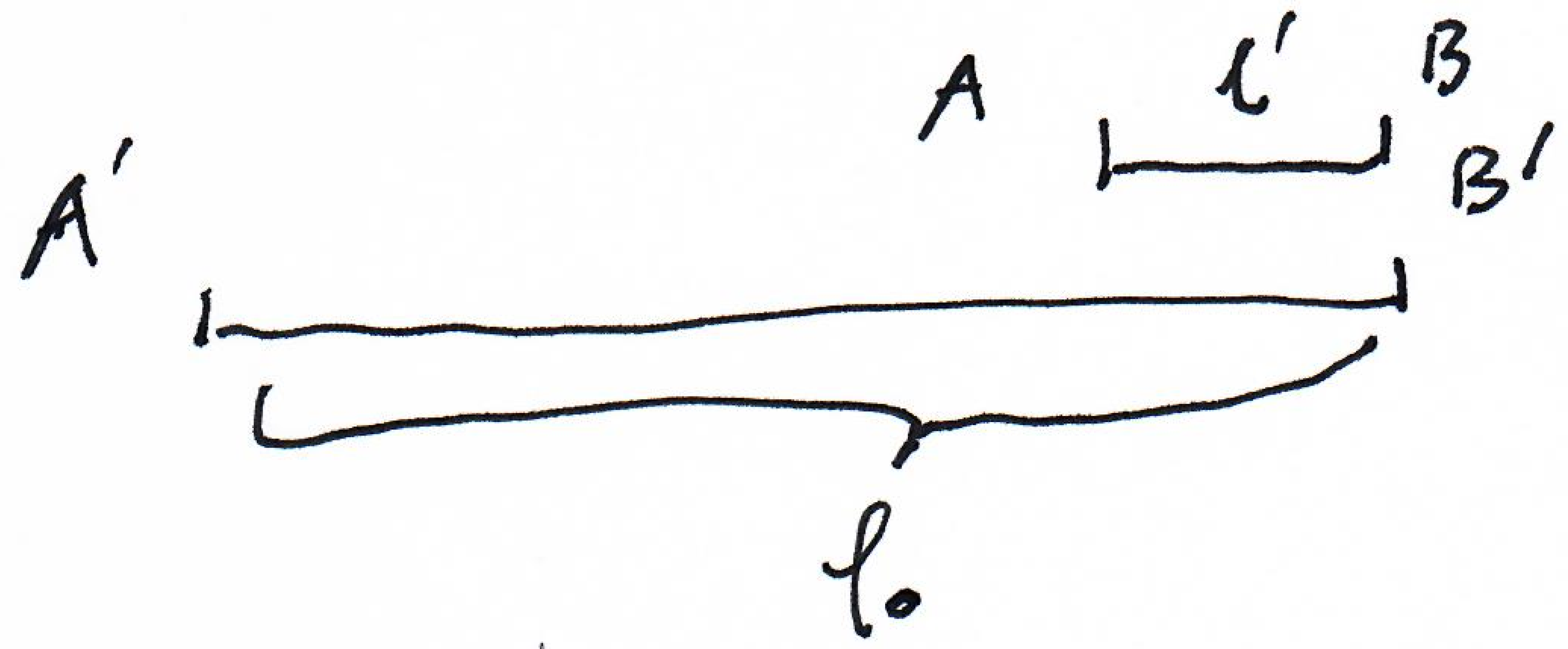
S系相距 l 的两激光器 A、B 同时发光，在 x' 轴上留下刻痕 A'、B'，



则 $l = \sqrt{1-\beta^2}\, l_0$

S'系：B先A后

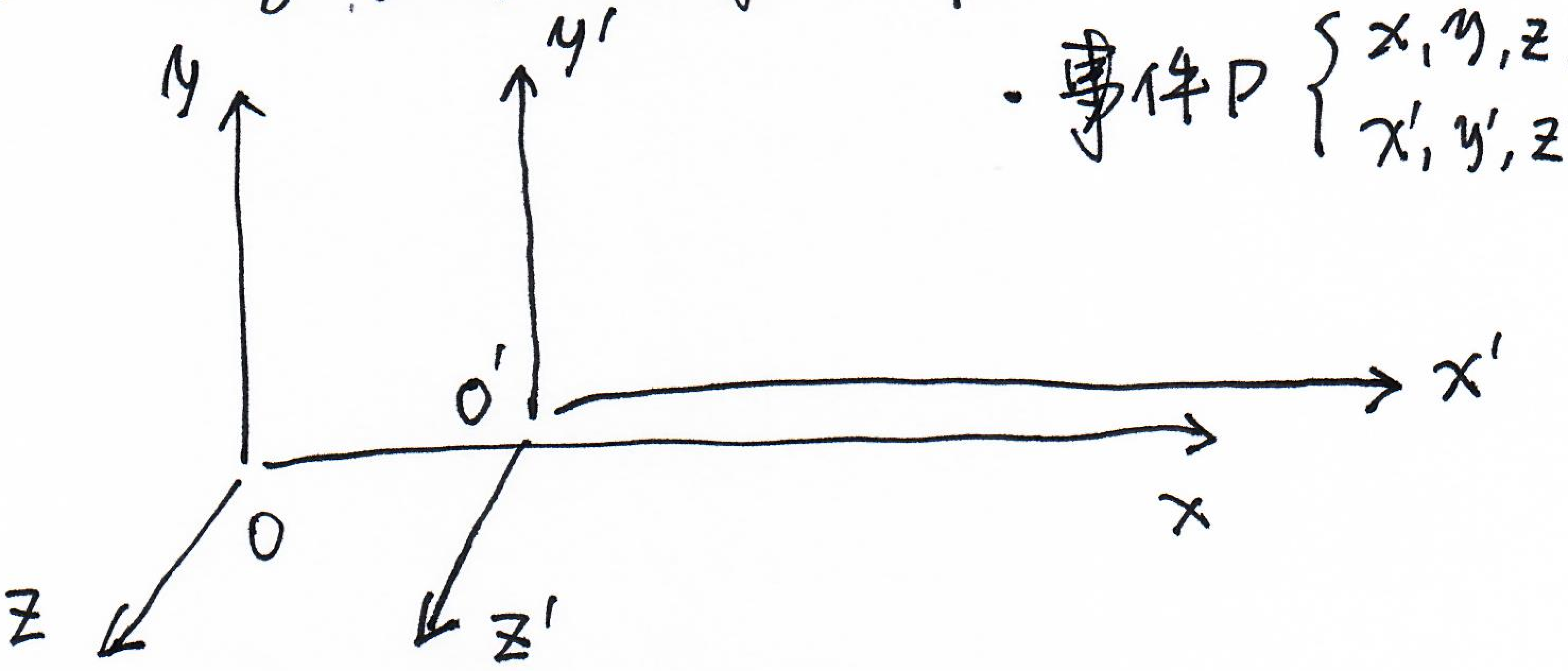
$|\Delta t'| = \frac{v}{c^2} l_0$



$\therefore \quad l' + v|\Delta t'| = l_0$

$\Rightarrow \quad l' = (1-\beta^2) l_0 = \sqrt{1-\beta^2}\, l$

3. Lorentz变换与时空间隔不变



· 事件P $\begin{cases} x, y, z; t \\ x', y', z'; t' \end{cases}$

* 当 $O\text{-}xyz$ 与 $O'\text{-}x'y'z'$ 重合时，校准 $t_0 = t_0' = 0$

* 事件P发生时与y'轴距离

S'系：　$l' = x'$ → 静长

S系：　$l = x - vt$ → 动长

$\therefore \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$

类似地，　$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$\xRightarrow{\text{消}x'} \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$

* y、z方向具有平移不变性：

$y' = y \quad , \quad z' = z$

☆ 时空间隔不变

引入四维时空坐标

$$x^\mu = (ct, x, y, z), \quad \mu = 0,1,2,3$$

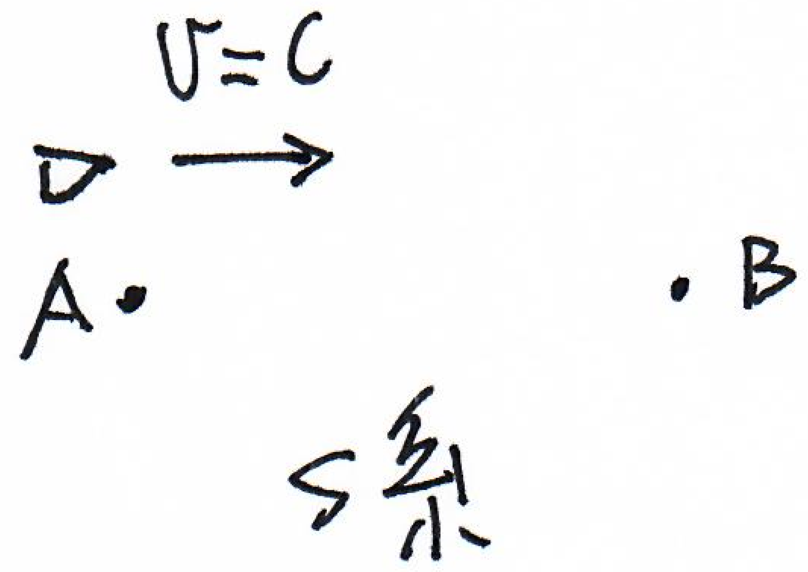
$$\begin{cases} x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1), & \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2} \\ x'^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) \\ x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3 \end{cases}$$

利用 $\gamma^2 - (\gamma\beta)^2 = 1$，可证"时空间隔"不变

$$s^2 = (x^0)^2 - \vec{x}\cdot\vec{x} = s'^2$$

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x^0)^2 - \Delta\vec{x}\cdot\Delta\vec{x} = (\Delta s')^2$$

⇒ 例：类光间隔



S系：光速子弹从A到B

$\Delta x = v\Delta t, \quad v = c$

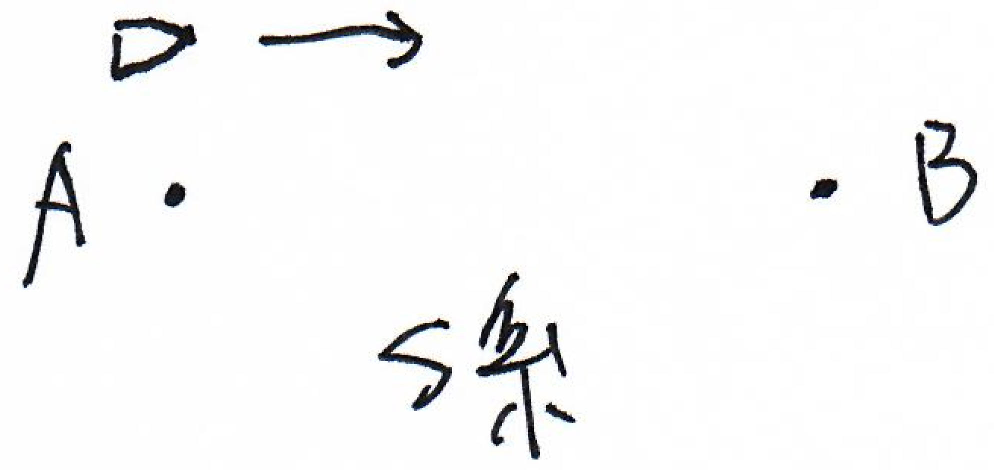
$\therefore (\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 = 0$

S'系：设速度 v'

则 $(\Delta s')^2 = (c\Delta t')^2 - (v'\Delta t')^2 \xrightarrow{\text{间隔不变}} 0$

$\therefore v' = c$ （光速不变）

⇒ 例：类时间隔



$(\Delta s)^2 = (c^2 - v^2)(\Delta t)^2 > 0$

设 $(\Delta s)^2 = (c\Delta\tau)^2$

则 $\Delta\tau$ 为随动惯性系原时：$\Delta\tau = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta t$ （钟慢）

4. 四矢量，四速度.

* 3维空间转动不变量

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3 = A'^1B'^1 + A'^2B'^2 + A'^3B'^3$$

* 引入4维位置矢量

逆变 $\quad x^\mu = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{r})$

协变 $\quad x_\mu = (ct, -x, -y, -z) = (ct, -\vec{r})$

则"点积" $\quad x\cdot x = \sum_{\mu=0,1,2,3} x^\mu x_\mu = s^2$

在如下变换下不变：

① Lorentz变换（"0-1"转动）

② 3维空间转动

③ 时空平移（对 Δs^2）

④ 时空反演

* 引入四矢量

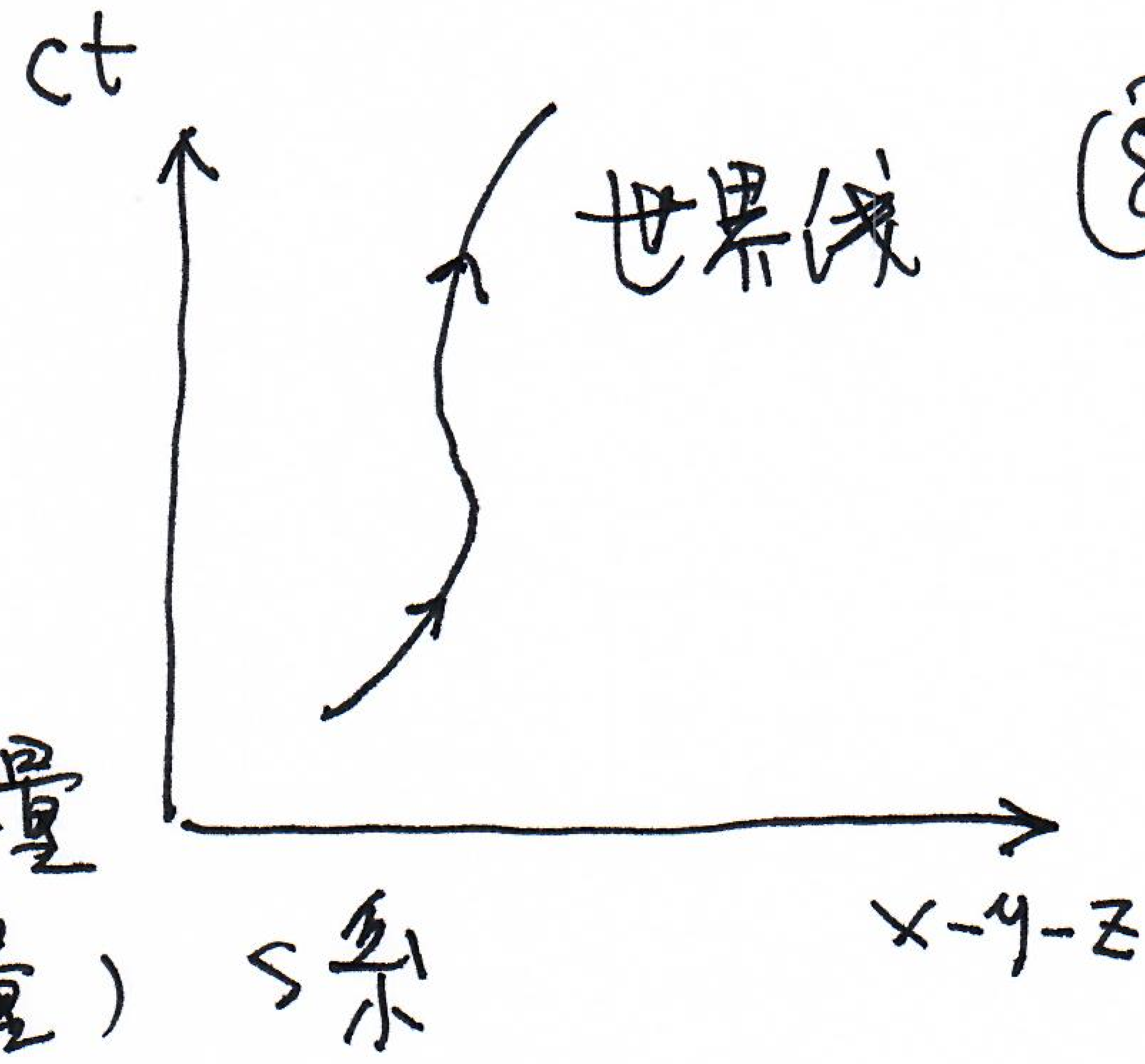
$$A^\mu = (A^0, \vec{A}), \quad A_\mu = (A^0, -\vec{A})$$

要求"0-1"转动下

$$\begin{cases} A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1) \\ A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0) \\ A'^2 = A^2, \quad A'^3 = A^3 \end{cases}$$

则 $\quad A\cdot A = \sum_\mu A^\mu A_\mu, \quad A\cdot B = \sum_\mu A^\mu B_\mu$ 在①-④下不变

* 质点四速度



$$(ds)^2=(c\,dt)^2-(d\vec{r})^2=(c\,d\tau)^2$$

$\vec{u}=d\vec{r}/dt \rightarrow$ 3速度（S系）

$d\tau=\sqrt{1-\beta_u^2}\,dt=\frac{ds}{c}\Rightarrow$ Lorentz标量（参考系不变量）

定义四速度

$$\eta^\mu=\frac{dx^\mu}{d\tau}=\left(\frac{c}{\sqrt{1-\beta_u^2}},\ \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\beta_u^2}}\right)$$

$$\eta\cdot\eta=\left(\frac{c}{\sqrt{1-\beta_u^2}}\right)^2-\frac{\vec{u}\cdot\vec{u}}{\left(\sqrt{1-\beta_u^2}\right)^2}=c^2 \quad （不变量）$$

* 思考：由 η^μ 的变换式给出 $\vec{u}$ 分量变换式

5. 四动量　相对论性质点动力学

* （静）质量 m_0：粒子随动惯性系中的质量。

$$\begin{cases}\text{可由牛II测量}\\ m_0\rightarrow \text{Lorentz标量}\end{cases}$$

* 定义四动量

$$\begin{cases}p^\mu=m_0\eta^\mu=(mc,\ m\vec{u})\\ m=m_0/\sqrt{1-\beta_u^2}\end{cases}$$

相对论性 3-动量

$$\begin{cases}\vec{p}=m\vec{u}=\dfrac{\vec{p}_{NR}}{\sqrt{1-\beta_u^2}}=\vec{p}_{NR}\left(1+O(\beta_u^2)\right)\\ \vec{p}_{NR}=m_0\vec{u}\quad \text{（非相对论（NR）动量）}\end{cases}$$

相对论性能量

$$E = cP_0 = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta_u^2}}$$

相对论性动能

$$E_k = E - m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 u^2 + \frac{3}{8} m_0 u^2 \cdot \frac{u^2}{c^2} + \cdots$$

* 能动量变换

$$\begin{cases} \frac{E'}{c} = \frac{E/c - \beta P_x}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ P_x' = \frac{P_x - \beta \frac{E}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ P_y' = P_y, \quad P_z' = P_z \end{cases}$$

* 能动量关系

$$p \cdot p = \sum_\mu p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m_0^2 c^2 \quad (1)$$

* 相对论性质点动力学

定义相对论性（3-）力

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt$$ （相对论性质点动量定理）

对(1)式微分

$$\frac{E}{c^2}\frac{dE}{dt} = \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (\vec{p} = m\vec{u},\ E = mc^2)$$

$$\therefore \vec{F} \cdot \vec{u} = dE/dt = dE_k/dt$$

$\longrightarrow$ 相对论性质点动能定理