振动专题

陈晓林
北京大学物理学院
2020年8月26日下午

联系方式

chenxl@pku.edu.cn
13717527661

专题主要内容

§ **1.** 简谐振动

§ **2.** 弹性系统的振动

§ **3.** 耦合振子

什么是力学?

力学(**mechanics**)研究的是宏观物体之间或物体内各部分之间的相对位置的变动，称为机械运动(**mechanical motion**)的规律的学科。

力学是物理学，也是自然科学中最基本的学科；是其他学科的基础。

振动(vibration)是自然界中最常见的运动形式之一．物体在平衡位置附近作往返的周期性位移，称为机械振动(mechanical vibration)．广义而言，对于电量、电压、电流、电场强度和磁感应强度等物理量，当它们围绕一定的平衡值作周期性的变化时，都称为该物理量在振动.

以振动为基础，我们也可以研究一些“准周期”运动。在振动的基础上，还可以研究振动在空间的传播—波动。

尽管这些物理现象的具体机制各不相同，但它们却具有共同的物理特征．本章讨论机械振动，其基本概念对各种振动都适用.

教材和参考书

(1) 钟锡华、周岳明：《力学》，北京大学出版社，
2010年2月，第二版

(2) 舒幼生：《力学》，2005年9月，北京大学出版社

陆果：《基础物理教程》，上下卷第二版，
高等教育出版社，2006年5月。

赵凯华、罗蔚茵，《新概念物理教程 · 力学》，
高等教育出版社

郑永令、贾起民，《力学》，高等教育出版社

C · 基特尔等，《力学》（伯克利物理学教程第一卷），
科学出版社

题解编写组：《习题解答, 力学、热学分册》，
北京大学出版社，2016年10月，第二版

舒幼生，《力学习题与解答》，北大出版社，2005年

§ 1. 简谐振动

- ➢1. 描述简谐振动的特征量
- ➢2. 简谐振动的合成
- ➢3. 振动的分解

➢1. 描述简谐振动的特征量

□ 简谐运动

若描述运动的变量$x(t)$ (如物体的位移或角位移等)满足运动方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

则其解可表示为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad [1]$$

这种用时间的正弦或余弦函数描述的振动，称为简谐振动**(simple harmonic oscillation or vibration)**或简谐运动**(simple harmonic motion)**. 简谐振动是最简单、最基本的振动，复杂的振动可以由若干简谐振动合成得到.

□ 描述简谐振动幅度和时间周期性的特征量

在上述简谐振动的表达式[1]中，物理量A是物体离开平衡位置的最大位移或角位移，称为振幅**(amplitude)**.

简谐振动的基本性质是它的时间周期性．物体作一次完全振动所需的时间T，称为振动的周期(**period**)；周期的倒数ν表示在单位时间内物体所作的完全振动的次数，称为振动的频率(**frequency**)；频率ν的2π倍称为角频率(**angular frequency**)或圆频率(**circular frequency**)，用ω表示．显然，这些量之间有如下的关系式：

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

简谐振动的振幅给出了振动的范围或幅度，简谐振动的角频率、频率或周期则给出了振动的快慢．但是，这两个物理量还不能完全确定振动系统在任意瞬时的运动状态——瞬时位移、速度和加速度等．

- 描述简谐振动瞬时运动状态的特征量——相位

对上页[1]进行一次，或二次微商就分别得到简谐振动

的速度和加速度：

$$u=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0+\pi/2)$$

$$a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi_0)$$

由此可见，当振幅A和角频率ω一定时，简谐振动的瞬时位移、速度和加速度都决定于量$\omega t+\varphi_0$，这个量称为相位(**phase**)，用φ表示，即 $\varphi=\omega t+\varphi_0$

相位与简谐振动在一个周期内所处的瞬时运动状态相联系，其单位是**rad**(弧度).

当$t=0$时，物体的初始位移和速度分别为

$$x_0=A\cos\varphi_0 \qquad u_0=-A\omega\sin\varphi_0$$

式中φ_0称为初相位．由上式可解得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{u_0^2}{\omega^2}} \qquad \tan\varphi_0 = -\frac{u_0}{\omega x_0}$$

两个同频率的简谐振动在同一时刻的相位差，恒等于它们的初相位差，即 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{02} - \varphi_{01}$

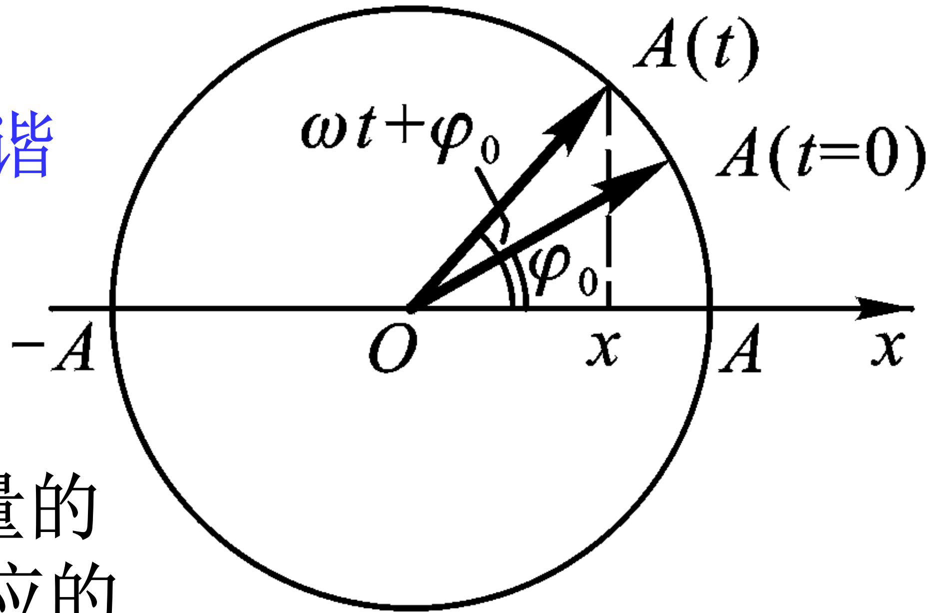
对一个确定的振动，我们总可以通过选取时间的**0**点使初相位本身可以取任意值．因此，我们总可以选择适当的计时零点，使初相位φ_0为零；对于多个同频率的简谐振动来说，它们之间的相位差$\Delta\varphi$反映了各简谐振动步调的关系，具有重要的物理意义．

若$\Delta\varphi$为零或2π的整数倍，则两振动的步调一致，我们称这两个振动是同相位的；若$\Delta\varphi$为π或π的奇数倍，则两振动的步调相反，我们称这两个振动是反相位的。一般而言，若 $\pi > \varphi_2 - \varphi_1 > 0$，我们称$\varphi_2$超前于$\varphi_1$，

或 $x_2(t)$ 振动的步调领先于$x_1(t)$； 若 $-\pi<\varphi_2-\varphi_1<0$，我们称$\varphi_2$落后于$\varphi_1$，或 $x_2(t)$ 振动的步调落后于$x_1(t)$． 若$|\varphi_2-\varphi_1|>\pi$，我们可以先把 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ 减去或加上2π的整数倍，直到其绝对值小于π，然后再按上述方法确定相位的超前或落后．实际上, 超前于落后不是绝对的, “x_2比 x_1领先$\Delta\varphi$” 与 “x_2比 x_1落后$2\pi-\Delta\varphi$ ” 这两种说法是等价的.

总之，简谐振动可由振幅A、角频率ω (或频率、周期)和相位φ这三个特征量完全确定下来.

➢2. 简谐振动的合成



□ 同方向、同频率的两个简谐振动的合成

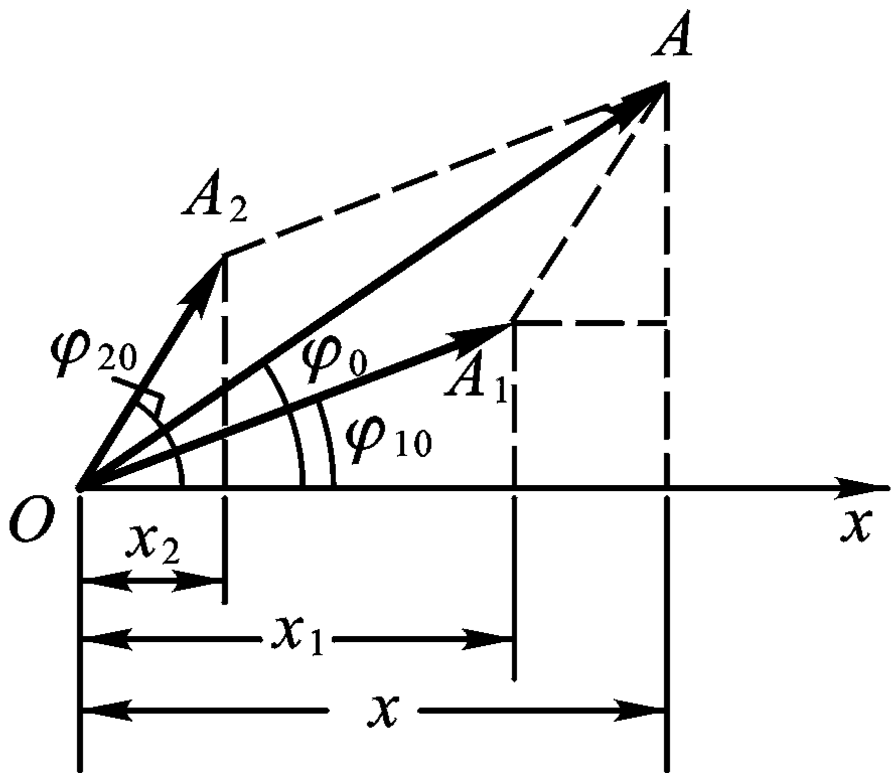
简谐量可以对应于匀速旋转矢量在x 轴上的投影，如图所示. 因此，同频简谐量的叠加，可以看成是与它们对应的旋转矢量的合矢量在x 轴上的投影，这种方法称为矢量图解法**(method of vector diagram)**.

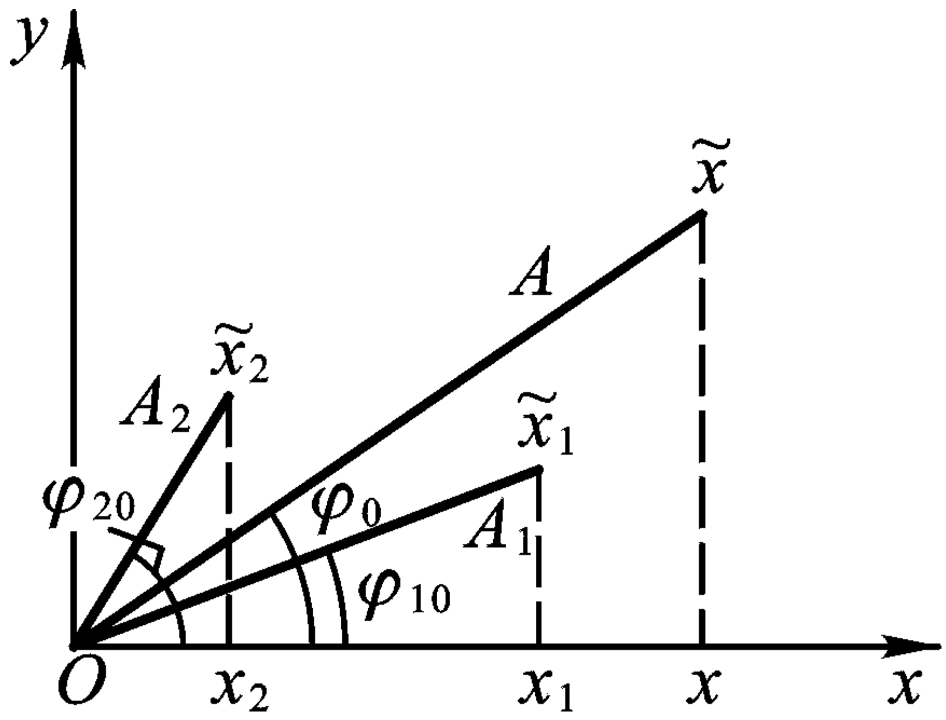
设一质点同时参与了两个同方向、同频率的简谐振动,即

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_{10}) \qquad x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_{20})$$

利用下页左图所示的几何关系，可以得到该质点的合振动为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$





其中 $$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10})}$$ [1]

$$\tan\varphi_0=\frac{A_1\sin\varphi_{10}+A_2\sin\varphi_{20}}{A_1\cos\varphi_{10}+A_2\cos\varphi_{20}}$$

如右图所示，简谐量还可以对应于复数的实部，同频

简谐量的叠加可以对应于相应复数叠加后所得到的合成复数的实部，即

$$\tilde{x} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 = A_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi_{10})} + A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi_{20})}$$

$$= (A_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{10}} + A_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_{20}})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_0}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi_0)}$$

这种通过复数相加求简谐量的合成的方法称为复数法 **(method of complex number)**.

在上述对应关系中，旋转矢量的长度以及复数的模都对应于简谐振动的振幅A，旋转矢量与x轴的夹角以及复数的辐角都对应于相位$\varphi=\omega t+\varphi_0$. 在这里，所涉及的是同频简谐振动的合成，因此只需应用初相位就够了. 应该强调，简谐量本身所对应的是旋转矢量在x轴上的投影以及复数的实部. 在进行简谐量叠加运算时，应该采用矢量合成以及复数加法. 因为矢量和复数都分别有

两个变量，即A和φ，只有完整地考虑到了这两个变量，它们与简谐量的运算法则才是一致的.

从**p13[1]**式可以看出，在一维同频简谐振动的合成中，相位差起了重要的作用. 例如：

当$\varphi_{20} - \varphi_{10} = \pm 2n\pi$时，$A = A_1 + A_2$，合成振幅最大；

当$\varphi_{20} - \varphi_{10} = \pm (2n+1)\pi$时，$A = |A_1 - A_2|$，合成振幅最小；

当$\varphi_{20} - \varphi_{10}$为其它值时，振幅$A$处于上述最大值与最小值之间。

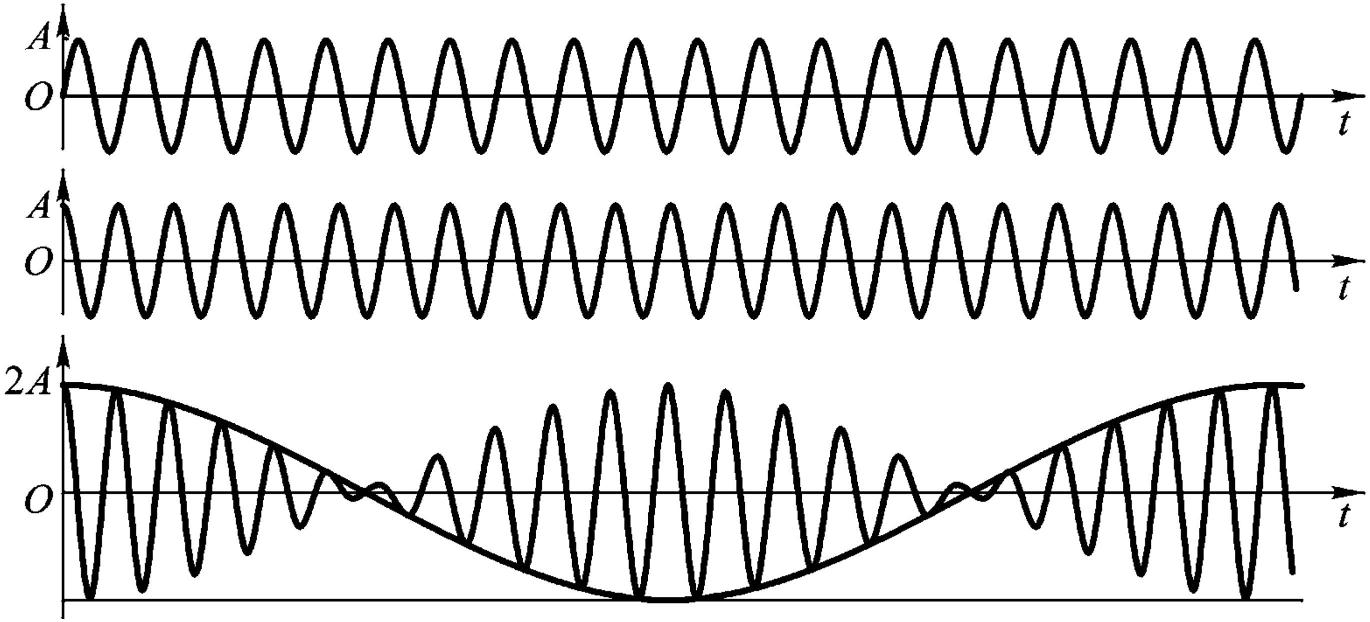
◻ 同方向、不同频率的两个简谐振动的合成

考虑下列2个频率不同、但振幅和初相位相同的振动合成问题：$x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi_0)$　　$x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi_0)$

$$x = x_1 + x_2 = A[\cos(\omega_1 t + \varphi_0) + \cos(\omega_2 t + \varphi_0)] =$$

$$= 2A\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\left(\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\varphi_0\right)$$

一种重要的特殊情况是，两个分振动的角频率都较大，而两者相差却很小，即$|\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_2 + \omega_1$．这时，我们可以近似地将合振动看成是振幅按照$|2A\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2|$缓慢变化的、角频率为$(\omega_2 + \omega_1)/2$的“准简谐振动”，如图所示这里合成的合振幅时而加强时而减弱的现象，称为**拍(beat)**．



由于上述振幅是余弦函数取绝对值得到的，因此

振幅变化的角频率(称为拍频ω_b) 是函数$\cos[(\omega_2 - \omega_1)/2]$对应的角频率的2倍，即 $\omega_b = |\omega_2 - \omega_1|$， $T_b = 2\pi / |\omega_2 - \omega_1|$.

➢3. 振动的分解

一般情况下，振动的物理量虽是时间的周期性(periodicity)函数，但可以具有比余弦函数复杂得多的形式．傅里叶(J.Fourier, 1768—1830)证明了，任一周期性函数都可以表示为简谐函数的合成，即

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t) \qquad [1]$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k' \cos(k\omega t + \varphi_k) \qquad [2]$$

上面含有级数的两个式子称为周期函数$f(t)$的傅里叶级数(Fourier series)，其中A_k、B_k和A'_k 等称为傅里叶系数

(Fourier coefficient).

我们知道，在三角函数系

$$\{1, \cos\theta, \sin\theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta, \cdots, \cos n\theta, \sin n\theta, \cdots\}$$

中，任意两个不同函数的乘积在区间**[－ π, π]**上的积分为零。这就是说，三角函数系具有正交性**(orthogonality)**，傅里叶级数就是周期函数在正交的三角函数系中的展开式．把任意函数分解成一组正交函数(不一定是三角函数)，是理论物理和工程技术领域中广泛应用的重要方法之一.

由上页**[1]**、**[2]**式乘以上述三角函数系的各函数并在区间**[－ π, π]** 上（对t 在一个周期内）积分得:

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{d}t \quad A_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos k\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$B_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin k\omega t\,\mathrm{d}t$$

利用欧拉(Euler)公式 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\theta} = \cos\theta \pm \mathrm{i}\sin\theta$

可以得到：

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$$

把这2式代入2页前的傅里叶级数公式得到其复数形式的级数：

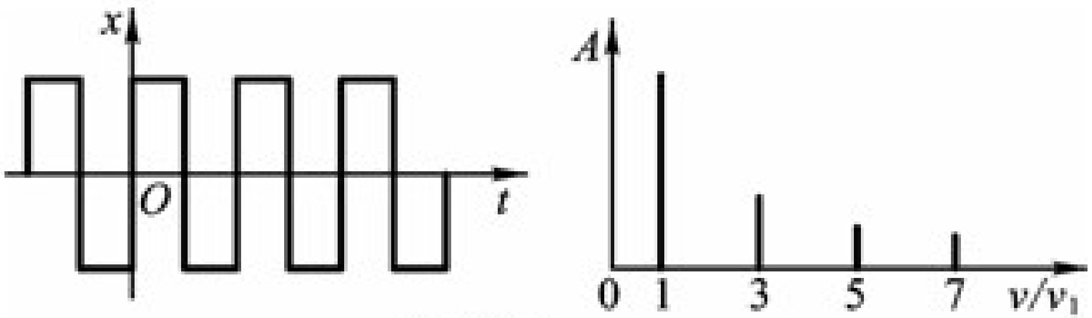
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t} \qquad C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega t}\,\mathrm{d}t$$

任一复杂的周期性振动，都可以分解为频率是原周期性振动频率的整数倍的许多简谐振动．在傅里叶级数中，$k = 1$的简谐振动称为基频振动；$k = 2, 3$的简谐振动称为k 次谐频振动或k 次谐波(**harmonic**)．以这些简谐振动的频率为横坐标，以相应的振幅为纵坐标所作

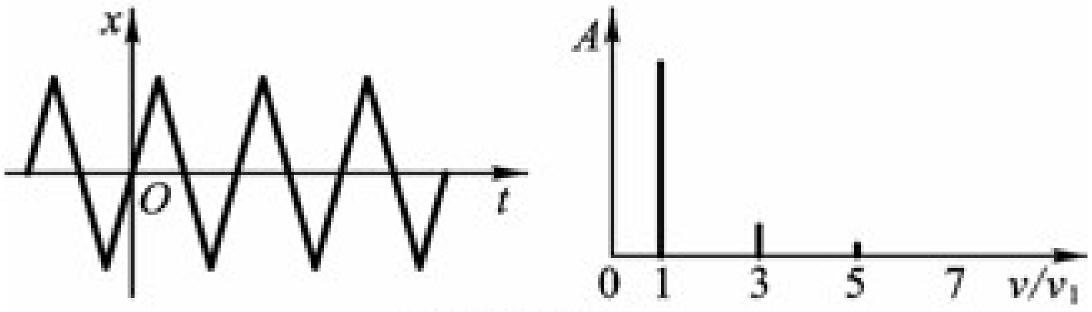
的图解，称为该振动的频谱(**frequency spectrum**).

周期性振动具有离散谱(**discrete spectrum**)，如图所示. 这种将任一振动分解为许多简谐振动的方法，称为频谱分析(**frequency spectrum analysis**).

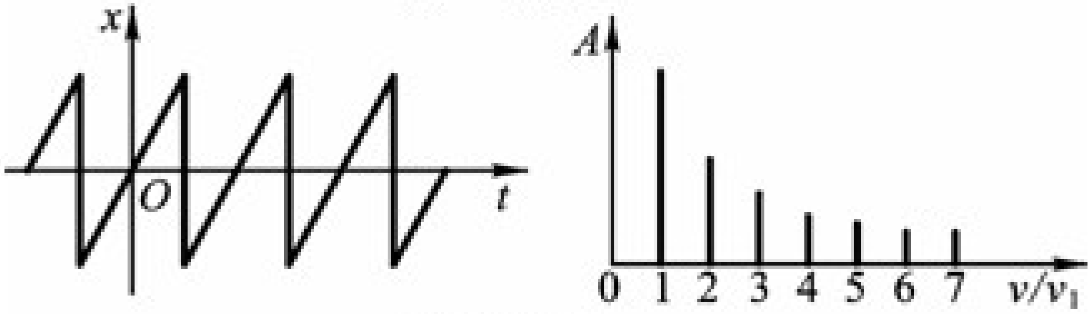
掌握了信号的内部结构——基频及各次谐频，我们就掌握了它在频率域上的图像，这往往比信号的波形还有用.



(a) 矩形

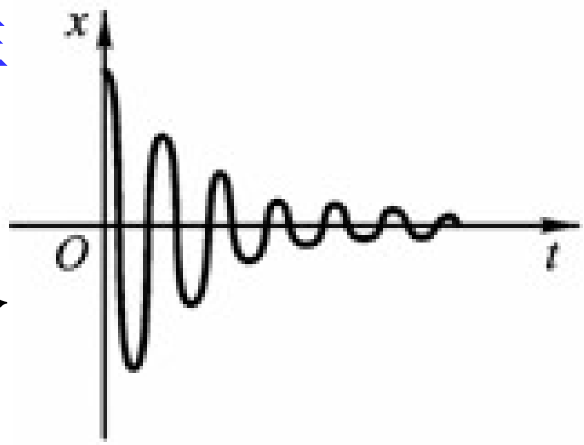


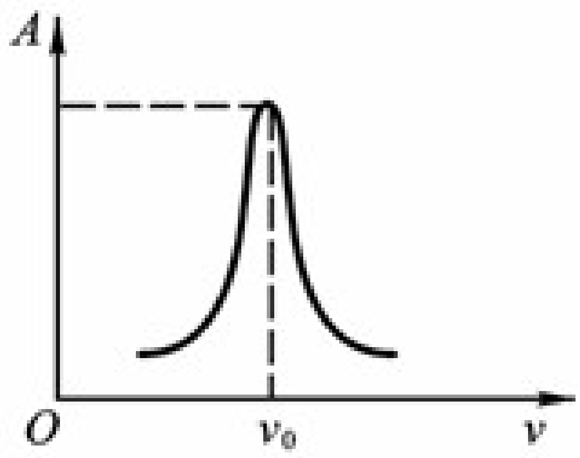
(b) 三角形



(c) 锯齿形

若振动是非周期性(aperiodicity)的，如单个脉冲，仍然可以通过傅里叶积分(Fourier integral)将其分解为各种谐振成分的叠加，但这时振动的频谱是连续谱(continuous spectrum)，如图所示。





§2. 弹性系统的振动

- ➢1. 谐振子的自由振动
- ➢2. 谐振子的阻尼振动
- ➢3. 谐振子的受迫振动和共振

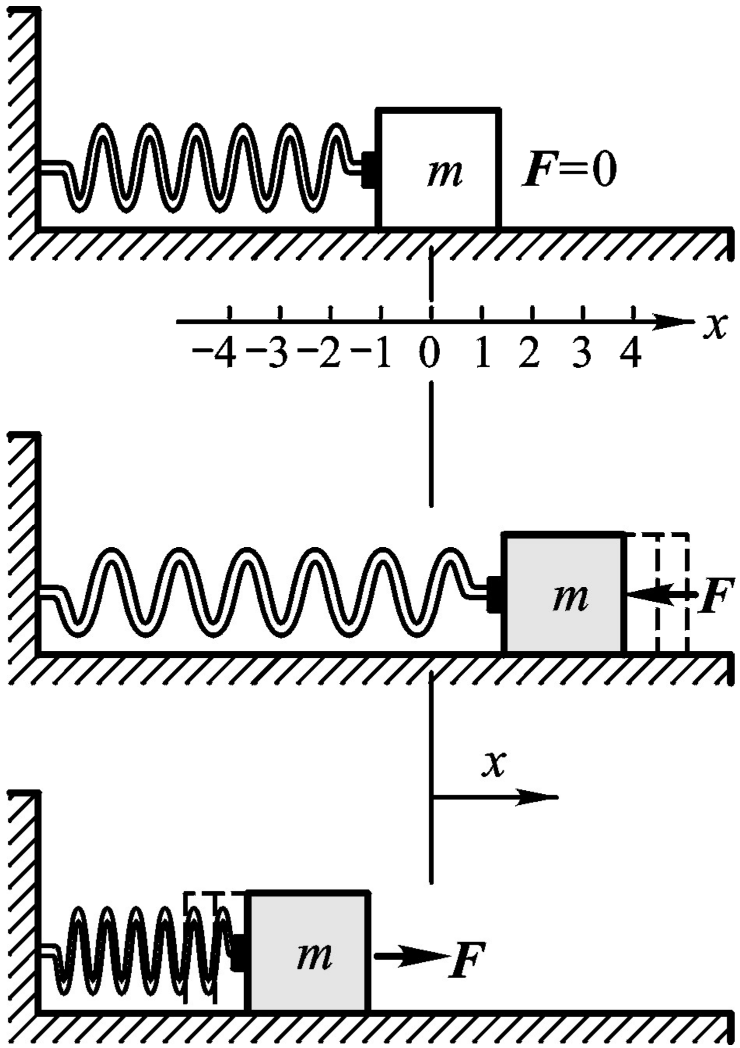
➢1. 谐振子的自由振动

如图所示，劲度系数为k 的弹簧放在光滑的水平桌面上，一端固定不动，另一端系着质量为m的物体．选择平衡位置为水平x 轴的零点，其弹性恢复力为$F=-kx$，于是有

$$-kx = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

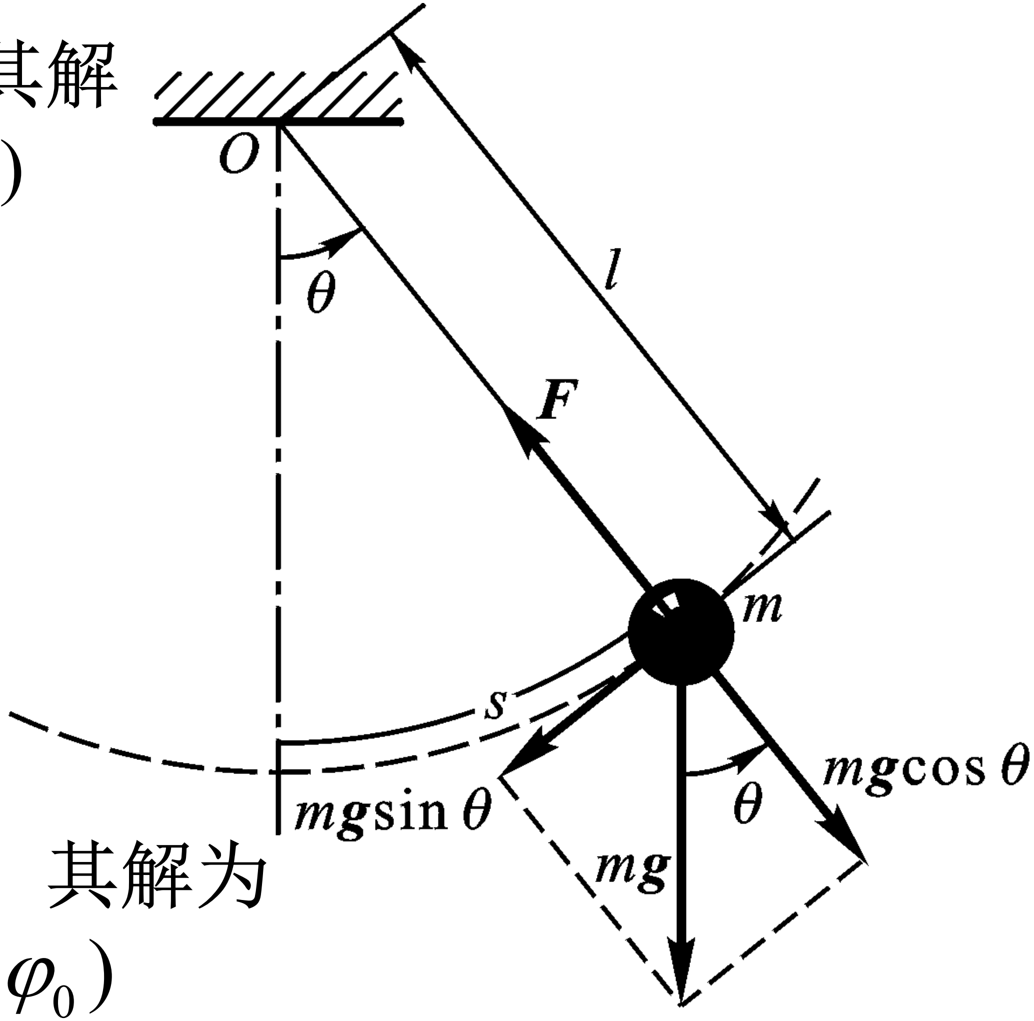
令 $$\omega = \sqrt{k/m}$$

上式可以写成 $$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$



[1]

这是一个简谐运动方程，其解就是 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$



与上面类似，如图所示，单摆在θ很小时的运动也属于这种情形，这时 $\sin\theta \approx \theta$，令

$$\omega = \sqrt{g/l}$$

则可以得到与上页[1]式形式相同的运动方程方程，其解为

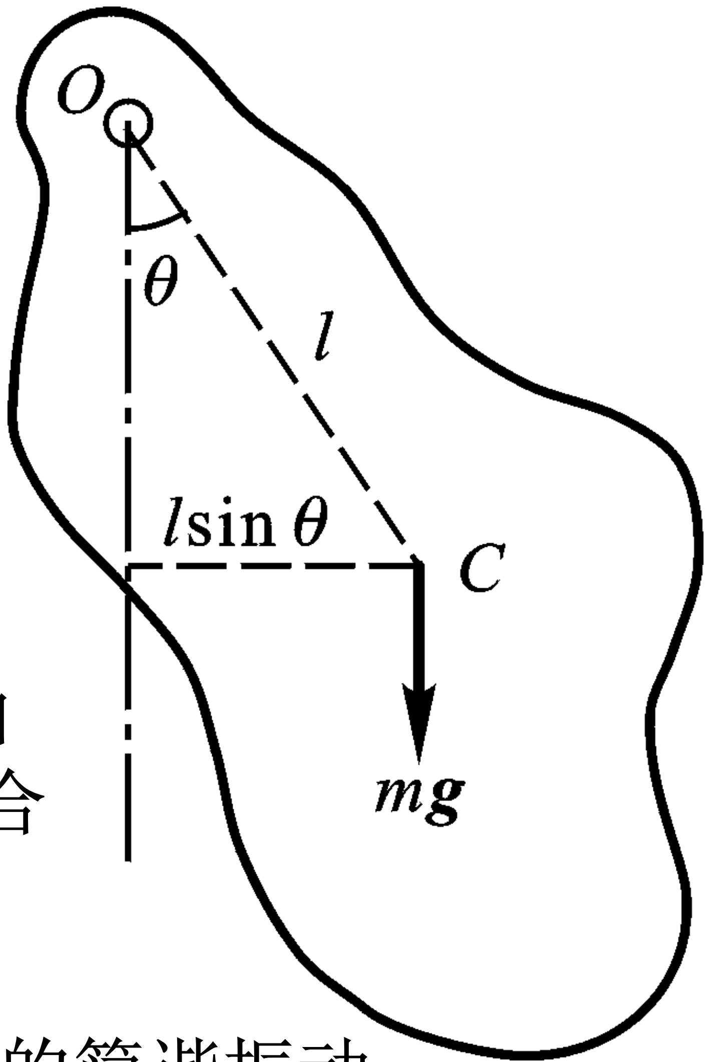
$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$$

如下页图所示，刚体的质心C距转动轴为l，这样的力学体系称为复摆。当复摆稍离开平衡位置转过θ角时，复摆受到一个使其转向平衡位置的净力矩$M = -mgl\sin\theta$.

当θ很小时， $M\approx -mgl\theta$．于是，转动惯量为I的复摆的运动方程为

$$-mgl\theta = I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

因此，上述运动方程的解和单摆的解形式上相同，可认为单摆是复摆的特例.



实际上，力学系统的振动都是由恢复力(弹性力或重力等)与惯性联合作用造成的．恢复力驱使系统回复平衡位置，而惯性则阻止系统改变运动状态．以上例子所讨论的系统的简谐振动，它们的运动方程及其解的形式都相同，它们的固有

角频率**(natural angular frequency)** ω 都与振动的振幅无关，只与具体装置的特征量有关.

概括而言，从动力学的角度来看，一个物体是否在作简谐振动，既可以从力与位移或角位移之间的负线性关系(如$F = -kx$)来判断，也可以从势能与位移或角位移之间的平方函数形式(如$V = kx^2/2$)来判断. 通常，这类振动系统都称为谐振子**(harmonic oscillator)**. 实际上，在平衡位置附近运动的稳定力学体系，大都可以看成是谐振子. 对于物理学中的许多问题，谐振子都可以作为一个相当精确的模型.

对于自由振动的谐振子，线性恢复力是保守力，因此系统的总机械能是守恒的. 例如，水平弹簧振子的动能和势能分别为

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi_0)$$

利用 $\omega = \sqrt{k/m}$，由以上两式可得，该系统的动能和势能的周期平均值相等，且系统的总能量为

$$E = K + V = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

尽管动能和势能分别都随时间改变，但是自由振动谐振子的总能量只取决于振幅A的平方以及谐振子的劲度系数k (或 $m\omega^2$)，而与时间 t 无关，即机械能守恒. 平均动能与平均势能都等于总能量的一半.

➢2. 谐振子的阻尼振动

物体在运动过程中，总是或多或少地受到阻力的作用，从而使振动的振幅和能量逐渐衰减，这种振动称为阻尼振动**(damped vibration)**．这种振动不仅会引起周围介质的振动，使能量逐渐向四周辐射，同时摩擦阻力还会使机械能逐渐转变为热能．一般情况下，在摩擦阻力中以黏性阻力为主。因辐射所引起的阻力的作用也常常与黏性阻力相似．因此，这里只讨论黏性阻力的作用．

在运动速度不大时，按斯托克斯黏滞公式，振动物体受到的黏性阻力$\boldsymbol{F}_v$与速度$\boldsymbol{v}$成正比，其方向与速度相反，即

$$\vec{F}_v = -\gamma\vec{v}$$

在考虑了黏性阻力$\boldsymbol{F}_v$之后，水平弹簧振子的运动方程变为

$$-kx-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$ 或 $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\gamma}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{k}{m}x=0$$

令 $\omega_0=\sqrt{k/m}$, $2\delta=\gamma/m$

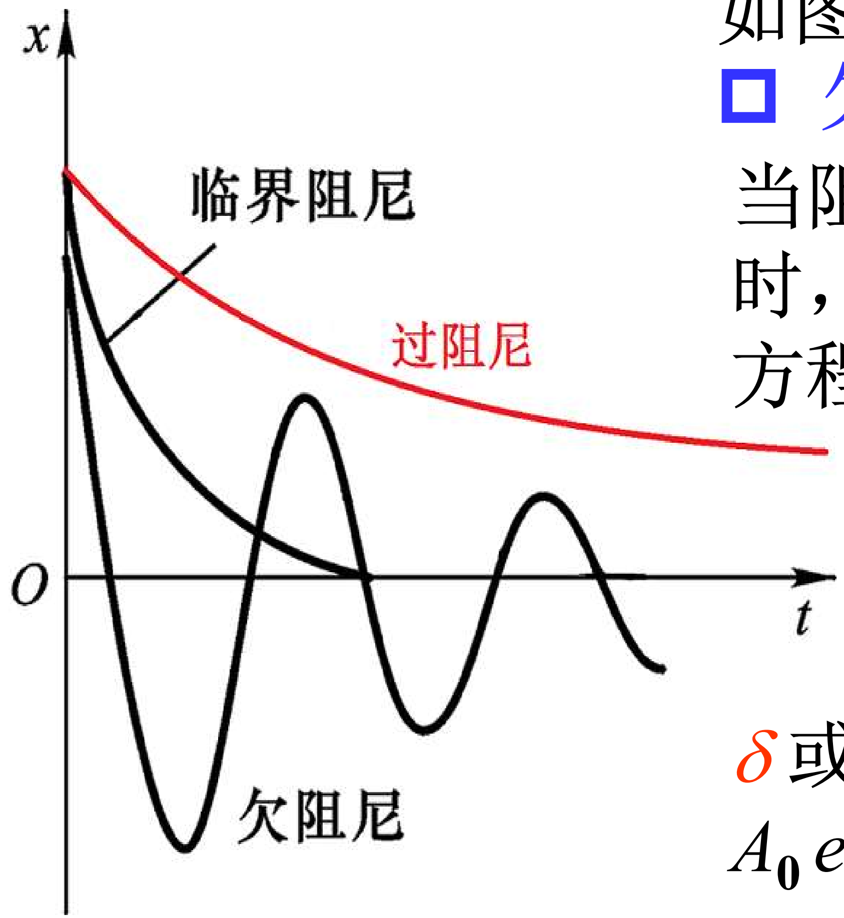
上述方程改写为 $$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0 \qquad [1]$$

式中 δ 是表征系统阻尼大小的常量.

将形如 $e^{\lambda t}$ 的解代入上述常系数齐次线性微分方程，得到特征方程 $$\lambda^2+2\delta\lambda+\omega_0^2=0 \qquad [2]$$

其特征根是 $$\lambda=-\delta\pm\sqrt{\delta^2-\omega_0^2}$$

按阻尼度$\Lambda=\delta/\omega_0$大小的不同，微分方程[1]有三种不同形式的解，代表了振动物体的三种运动方式，



如图所示.

□ 欠阻尼(underdamping)振动

当阻尼较小时，即当或$\Lambda = \delta / \omega_0 < 1$时，特征方程[2]有两个共轭复根，方程[1]的解为

$$x(t) = A_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{式中}\ \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2},$$

δ或Λ越大，阻尼振动的振幅$A_0 e^{-\delta t}$随时间衰减得越快，

“周期”$T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ 越长。

□ 过阻尼(overdamping)运动

当阻尼较大时，即当或$\Lambda = \delta / \omega_0 > 1$时，特征方程[2]有

两个不同的实根，方程[1]的解为

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{-(\delta-\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t} + c_2 \mathrm{e}^{-(\delta+\sqrt{\delta^2-\omega_0^2})t}$$

物体经过相当长的时间才能达到其平衡位置.

□ 临界阻尼(critical damping)运动

当Λ=1时，特征方程[2]只有一个根，方程[1]的解为

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{-\delta t}$$

由于在时间$\tau = 1/\delta$内，振幅衰减到了原来的1/e=37%，因此常把δ称为衰减常量(attenuation constant)，而把 τ 称为弛豫时间(relaxation time). 如果希望物体很快回到平衡位置，则应使其处在临界阻尼运动状态.

➢3. 谐振子的受迫振动和共振

◘ 受迫振动的运动方程及其解的可叠加性

只受弹性力和黏性阻力作用的振动系统，其振幅总是随时间衰减的．为使振动持久而不衰减，可以利用外界驱动力(**driving force**)对系统不断地作功，向系统提供能量．这种振动系统在外界驱动力作用下的振动，称为受迫振动(**forced vibration**)．

设简谐驱动力为$F_{\rm d}=F_{\rm d0}\cos\omega_{\rm d}t$，则受迫振动的运动方程为

$$-kx-\gamma\frac{{\rm d}x}{{\rm d}t}+F_{\rm d0}\cos\omega_{\rm d}t=m\frac{{\rm d}^2x}{{\rm d}t^2}$$

或

$$\frac{{\rm d}^2x}{{\rm d}t^2}+2\delta\frac{{\rm d}x}{{\rm d}t}+\omega_0^2x=\alpha\cos\omega_{\rm d}t \qquad [1]$$

其中 $\omega_0=\sqrt{k/m}$， $2\delta=\gamma/m$， $\alpha=F_{\rm d0}/m$

按照常微分方程的数学理论，上述非齐次线性常微分方程的通解，可以写成齐次通解（以欠阻力为例）加上非齐次方程的特解, 即

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0) + B\cos(\omega_d t + \varphi_d)$$

其中齐次通解就是前面得到的欠阻尼振动解，当$t > 5/\delta$时其振幅已衰减到起始振幅的**0.7 %**，称为暂态解**(transient solution)**．齐次方程的另两种情形（过阻力和临界阻力）的通解也同样是指数衰减的暂态解。经过稍长的一段时间，可以认为暂态解已衰减掉，只留下非齐次特解，称为定态解**(stationary solution)**.

将$x=B\exp[i(\omega_d t+\varphi_d)]$代入上页的微分方程式**[1]**，可得

$$(-\omega_d^2 + i2\delta\omega_d + \omega_0^2)x = \alpha e^{i\omega_d t}$$

$$x = \frac{\alpha}{(\omega_0^2 - \omega_d^2) + i2\delta\omega_d} e^{i\omega_d t}$$

于是，利用复数法得到了定态解的振幅和相位分别为

$$B=\left|x\right|=\frac{\alpha}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_\mathrm{d}^2)^2+4\delta^2\omega_\mathrm{d}^2}} \qquad [2]$$

$$\varphi_\mathrm{d}=\arctan\frac{-2\delta\omega_\mathrm{d}}{\omega_0^2-\omega_\mathrm{d}^2} \qquad [3]$$

谐振子的运动方程是线性的，即运动方程[1]只包含自变量x及其微商的1次和0次幂，于是有

$$m\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}+2\delta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2\right)(x_1+x_2)=F_1+F_2$$

即合力F_1+F_2作用下的运动可由它们单独存在时的解x_1和x_2的叠加得出，多个驱动力的效应可以线性叠加，因此线性运动方程的解遵从叠加原理．对非线性方程，叠加原理不再成立．

□ 共振

由上页[2]可以看出，振幅B是驱动力频率ω_d的函数，B随ω_d变化的极值由$\mathrm{d}B/\mathrm{d}\omega_\mathrm{d}=0$确定。令

$$\omega_\mathrm{r}=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}, \qquad [4]$$

该量称为共振角频率(**resonant angular frequency**)。

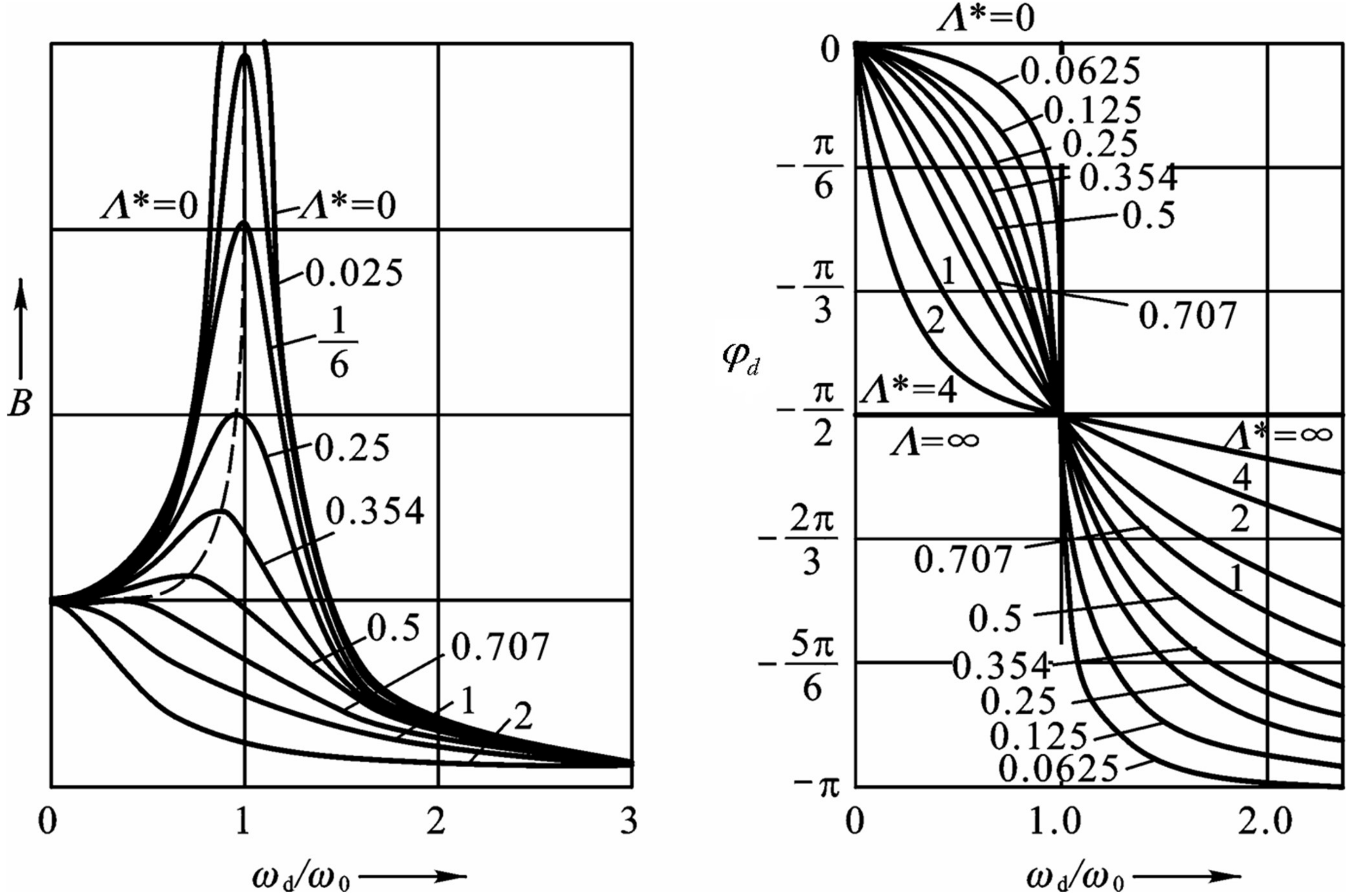
由上述B的极值条件得$\omega_\mathrm{d}=\omega_\mathrm{r}$时，振幅$B$达到极大值

$$B_\mathrm{r}=\frac{\alpha}{2\delta\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}$$

在受迫振动中位移振幅出现极大值的现象，称为位移共振(**displacement resonance**)或简称共振(**resonance**)。

由[4]式容易得到，振动系统的衰减常量δ或阻尼度Λ越小，ω_r越接近于固有角频率ω_0，共振时的振幅越大.

下页为受迫振动的频率响应曲线。

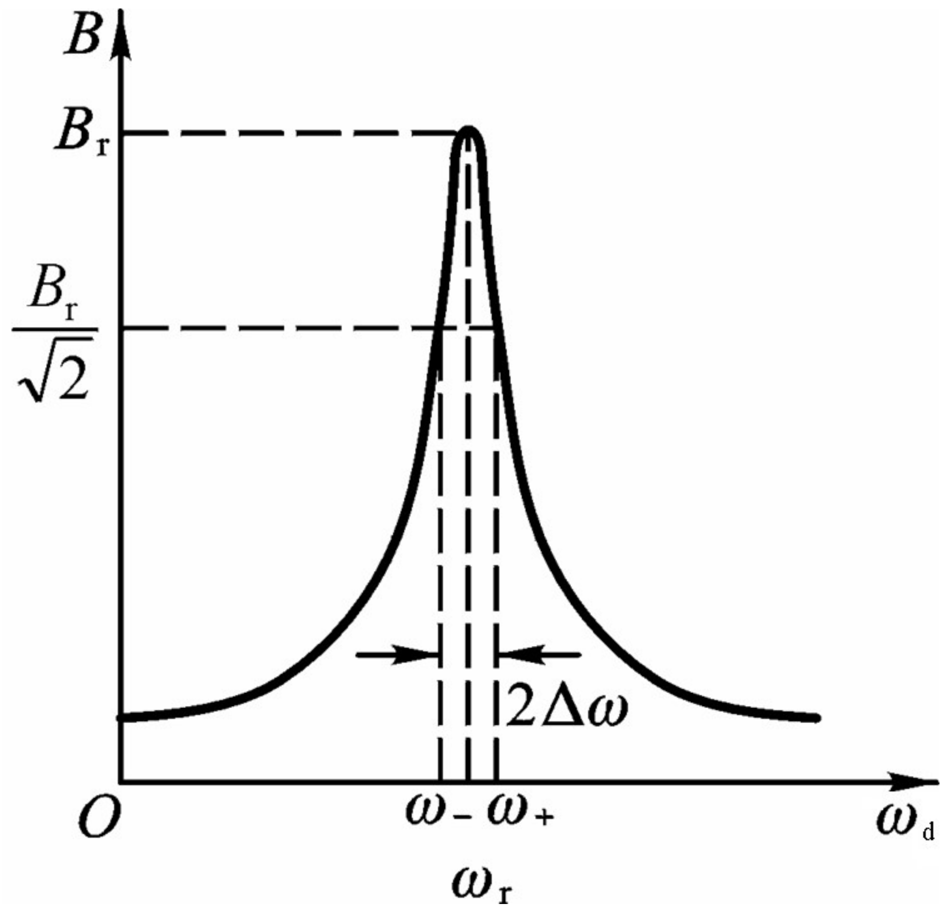

Λ*=0
Λ*=0
0.025
1/6
0.25
0.354
0.5
0.707
1
2
B
0
1
2
3
ω_d/ω_0
Λ*=0
0
0.0625
0.125
0.25
0.354
0.5
1
2
0.707
−π/6
−π/3
−π/2
−2π/3
−5π/6
−π
φ_d
Λ*=4
Λ=∞
Λ*=∞
4
2
1
0.707
0.5
0.354
0.25
0.125
0.0625
0
1.0
2.0
ω_d/ω_0

由上页右图可以看出，在$\omega_d = \omega_0$处$\varphi_d = -\pi/2$，在$\omega_d/\omega_0 \to 0$时，$\varphi_d \to 0$；在$\omega_d/\omega_0 \to \infty$时，$\varphi_d \to -\pi$. 在$\omega_d = \omega_0$处，振动速度与驱动力同相位，驱动力与振动速度处处有相同的相位，可以时刻对振动系统作正功，这正是共振时振幅急剧增大的原因．但是，随着振幅的增大，阻力的功率也不断增大，最后与驱动力的功率相抵，从而使振幅保持稳定．为了有效地消除外来干扰对精密测量工作的影响，就应该使$\omega_0 \ll \omega_d$.

如下页图所示，把频率响应曲线上相对振幅为**0.707**(即相对强度为**1/2**)处曲线的宽度定义为共振峰的宽度或共振带宽．在欠阻尼情况下，共振带宽为

$$\omega_+ - \omega_- = 2\delta$$

振动系统的品质因数**(quality factor)**或Q值为 $Q = \dfrac{\omega_0}{2\delta}$



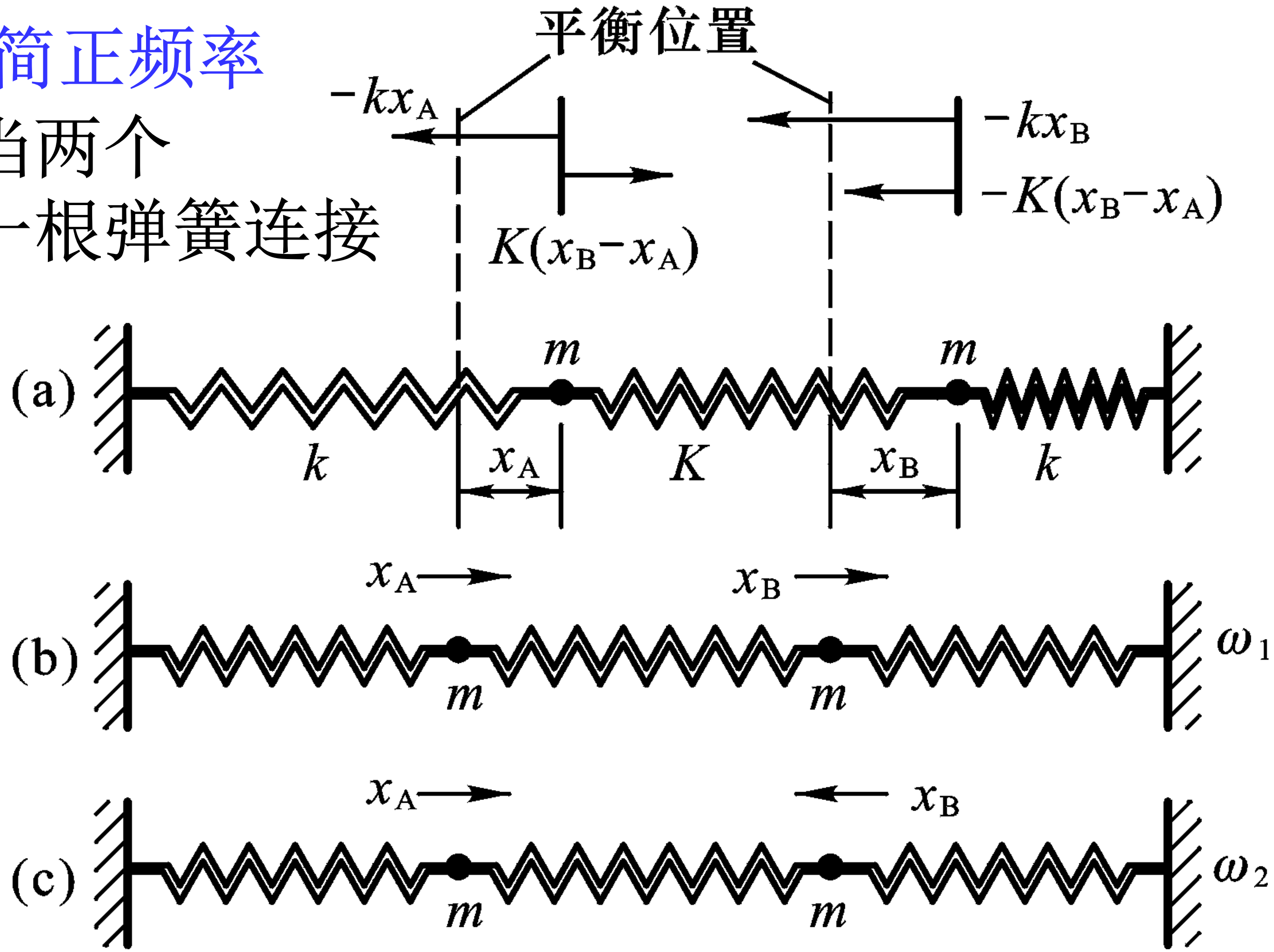
Q值的意义是多方面的，它不仅表征了受迫阻尼振动系统频率选择性能的好坏，而且Q值越高，表示系统的阻尼损耗越小，能量衰减越缓慢.

§3. 耦合振子

- **1.** 简正模和简正频率
- **2.** 简正坐标和简正模的叠加

➢1. 简正模和简正频率

如图所示，当两个弹簧振子用另一根弹簧连接起来时，称为耦合振子(**coupled oscillator**). 假定这两个振子相同，其质量为m，劲度系数为k；连接两振子的弹簧的劲度系数为K．平衡时，弹簧均为原长．设两振子A和B偏离平衡位置的位移分别为x_A和x_B，则两振子的



运动方程分别为

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_A}{\mathrm{d}t^2} = -k x_A + K(x_B - x_A) \qquad [1]$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_B}{\mathrm{d}t^2} = -k x_B - K(x_B - x_A) \qquad [2]$$

由这两个方程的结构可以看出，每个振子的加速度都与另一个振子的位置有关．换言之，它们的运动彼此关联，即两振子之间存在着耦合．上述两个运动方程都不是简单的简谐振动方程，一般来说，即使是两个全同的耦合振子，每个振子的运动也可能是比较复杂的．

首先考虑最简单的运动情况，即相互耦合的两个振子以相同的频率以及相同或相反的初相位作简谐振动．适当选取时间零点，并假定这里的“振幅”是代数量，则可设 $x_A = A\cos\omega t$ [3] $x_B = B\cos\omega t$ [4]

在这种情况下，任意时刻都有 $x_{\mathrm{A}}=\frac{A}{B}x_{\mathrm{B}}=\lambda x_{\mathrm{B}}$

将它代入上页**[3]**和**[4]**式可得

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t^2}=-[\frac{\lambda k+(\lambda-1)K}{\lambda m}]x_{\mathrm{B}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}t^2}=-[\frac{k+(1-\lambda)K}{m}]x_{\mathrm{B}}$$

这是两个简谐振动方程，对应的角频率的平方分别为方括号中所给出的量．既然两个方程所描写的是同一个振子的运动，这两个量就应该相等，即

$$\omega^2=\frac{k}{m}+\frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{K}{m}=\frac{k}{m}+(1-\lambda)\frac{K}{m}$$

由此解得$\lambda^2=1$，即

$$\lambda_1=1, \qquad \lambda_2=-1,$$

代入可得相应的角频率为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad\qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$$

所以，两个耦合振子可以作不同频率的下述两种方式的振动，在每种方式的振动中两振子的振动频率是相同的.

（**1**）两个振子以相同的振幅和相同的相位振动．由于连接弹簧始终保持原长不变，对两个振子都没有施加作用力，这时两个振子的运动就好像没有耦合一样，均以原来的角频率 $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ 振动，如第**40**页图**(b)**所示.

（**2**）两个振子以相同的振幅和相反的相位振动．由于两个振子的运动方向相反，从而使连接弹簧的形变是每个弹簧的两倍，恢复力增大，每个振子均以较原来大的角频率$\omega_2 = \sqrt{(k+2K)/m}$ 振动，如第**40**页图**(c)**所示.

系统中各个振子以相同的频率作简谐振动的方式，称为该系统的简正模**(normal mode)**；简正模对应的频率，称为简正频率**(normal frequency)**．对于一定的初条件，这种振动是可以实现的．例如，在损耗可以忽略的情况下，若将上述两个振子各自从平衡位置向右拉开相同的距离，待静止后再释放，则两个振子将作角频率都是ω_1的简谐振动，保持振幅不变；若将两个振子从平衡位置分别向左、右两边拉开相同的距离，待静止后释放，则两振子将作角频率都是ω_2的简谐振动，并保持振幅不变.

➢2. 简正坐标和简正模的叠加

我们之所以引入这两种易于求解的特征振动，重要的原因在于，两全同耦合振子的任何运动，都可以表示为上述两简正模的线性叠加．为了清楚地看到这一点，可以从另一角度来考察：简正模是系统中各个振子以相同的频率(简正频率)作简谐振动的最简单的方式，实际上是系统集体运动的特定方式．这些集体运动模式可以用系统的集体坐标表示出来．

将41页[1]式与[2]相加或相减，可得

$$m\frac{\mathrm{d}^2(x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B})}{\mathrm{d}t^2}=-k(x_\mathrm{A}+x_\mathrm{B}) \qquad [1]$$

$$m\frac{\mathrm{d}^2(x_\mathrm{A}-x_\mathrm{B})}{\mathrm{d}t^2}=-(k+2K)(x_\mathrm{A}-x_\mathrm{B}) \qquad [2]$$

令 $x_{\mathbf{A}}+x_{\mathbf{B}}=q_{\mathbf{1}}$， $x_{\mathbf{A}}-x_{\mathbf{B}}=q_{\mathbf{2}}$，

上页**[1]**、**[2]**两式化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 q_1}{\mathrm{d}t^2}+\omega_1^2 q_1=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 q_2}{\mathrm{d}t^2}+\omega_2^2 q_2=0$$

它们分别是关于两个独立变量q_1和q_2的振动方程，描述了耦合振子系统的两种独立的运动，其特征频率分别是

以前得到的ω_1和ω_2．这就是简正模的另一种表述，独立变量q_1和q_2称为简正坐标**(normal coordinate)**．在新的简正坐标下，系统退耦合成两个独立振动．反之，
每一个振子的坐标都可以表示为这两个独立的简正坐标的线性组合，即

$$x_{\mathrm{A}} = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \qquad x_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)$$

以上所考察的系统是由两个作一维振动的质点组成的，对该系统的纵向运动需用两个坐标来描写其几何位形．对于这样的二自由度振动系统来说，它有两个简正模和两个简正频率．可以证明，若振动系统的自由度为N，则有N个简正模和N个相应的简正频率．一般而言，
对应于一定的初始条件，系统中每个振子将以一定的方式作N个简谐振动的组合振动．

总之，简正模是一个多自由度线性系统中各自由度的

运动的一些特殊的组合，是一些集体运动模式，它们彼此相互独立．如果初始运动状态符合某个简正模式，则系统将按此模式振动，其他模式将不激发；如果初始运动状态是任意的，则该系统的运动将是各简正模式按一定比例的叠加．简正模这一重要概念是当今凝聚态物理学中“元激发或准粒子”的萌芽．

专题主要内容回顾

§ 1. 简谐振动

§ 2. 弹性系统的振动

§ 3. 耦合振子