

静电场唯一性定理

蓝策

2020.08

①

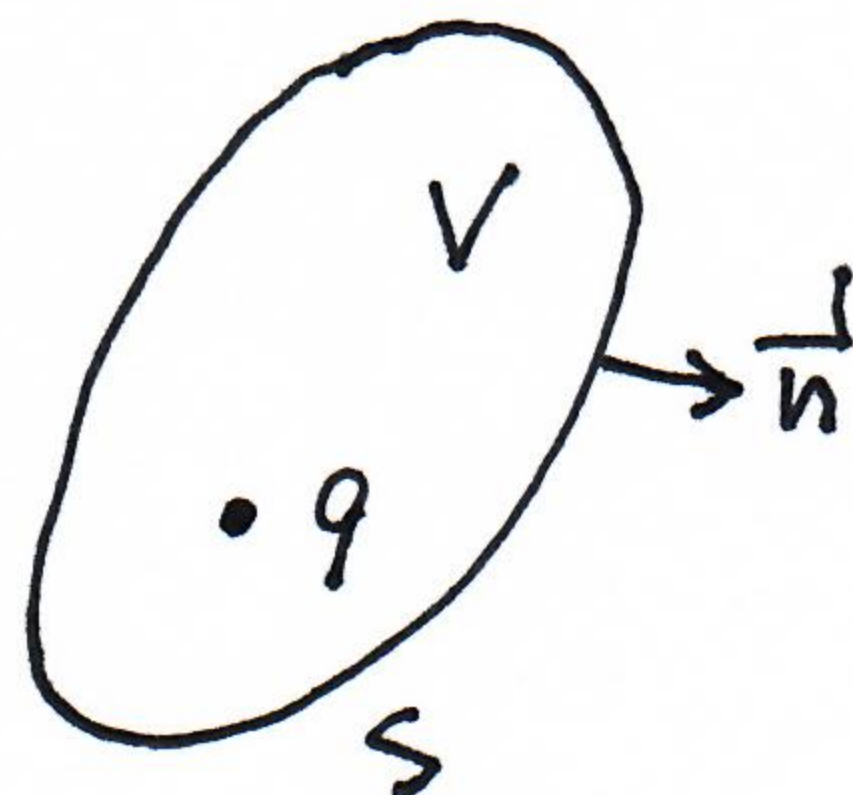
1. 静电场基本微分方程

* 静电场 Gauss 定理

点源 q : $\vec{E}_q = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

$$\phi_q = \oint_S \vec{E}_q \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\vec{r} \cdot d\vec{s}}{r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \Omega_{\text{tot}} = \begin{cases} q/\epsilon_0 & q \text{ 位于 } S \text{ 内} \\ 0 & q \text{ 位于 } S \text{ 外} \end{cases}$$



场强 $\vec{E}$ (标量, 叠加原理) $\Rightarrow$ 通量中 (标量, 叠加原理)

$$\therefore \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\sum_{i \in V} q_i}{\epsilon_0} = \iiint_V \rho dV / \epsilon_0$$

微分形式: $\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

* 静电场环路定理

点源 q : 有心力场为保守力场

$$\therefore \oint_L \vec{E}_q \cdot d\vec{r} = 0, \quad \forall L$$

由环量满足的 (标量, 叠加原理)

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0, \quad \forall L$$

微分形式: $\nabla \times \vec{E} = 0$

或: 可引入标量, 势 U , 使 $\vec{E} = -\nabla U$

$$(U \text{ 对应不定积分 } U(\vec{r}) = -\int \vec{r} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r})$$

* 静电场基本微分方程

(2)

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases}$$

构成静电场 (完备) 微分方程组
或引入电势 U :

$$\nabla^2 U = -\rho/\epsilon_0$$

加上 Poisson 方程也被称为“静电场基本微分方程”

Laplace 算符: $\nabla^2 \xrightarrow{\text{直角坐标}} \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$

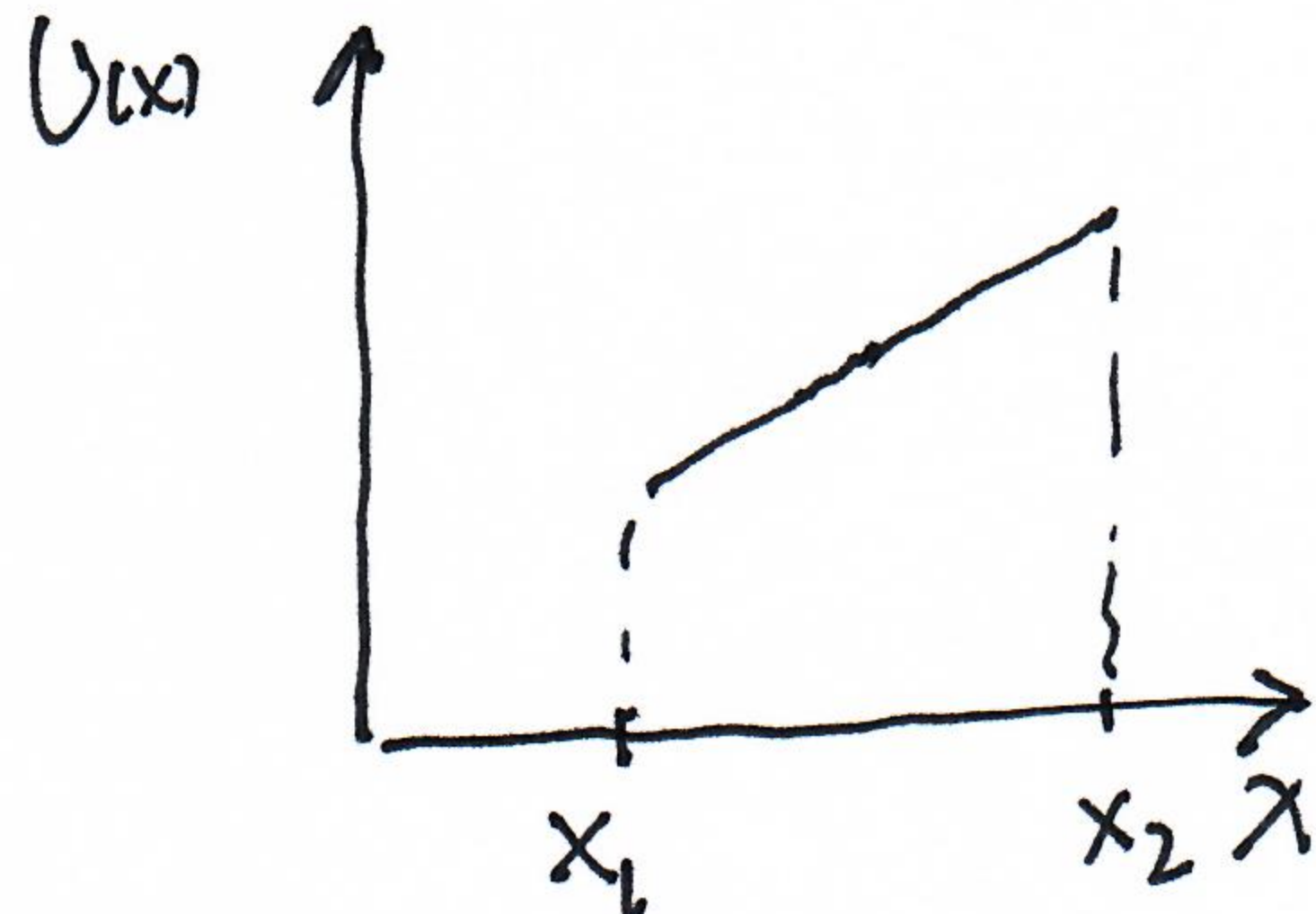
* 无电荷区 ($\rho=0$), 电势 U 满足 Laplace 方程

$$\nabla^2 U = 0$$

此时, $U(\vec{r})$ 被称为调和函数.

• - {特例}: $\frac{d^2}{dx^2} U(x) = 0$

$\therefore U(x) = Ax + B$



• 调和函数性质:

1) 解域内无局部极值点, 极值点仅可能存在于边界.

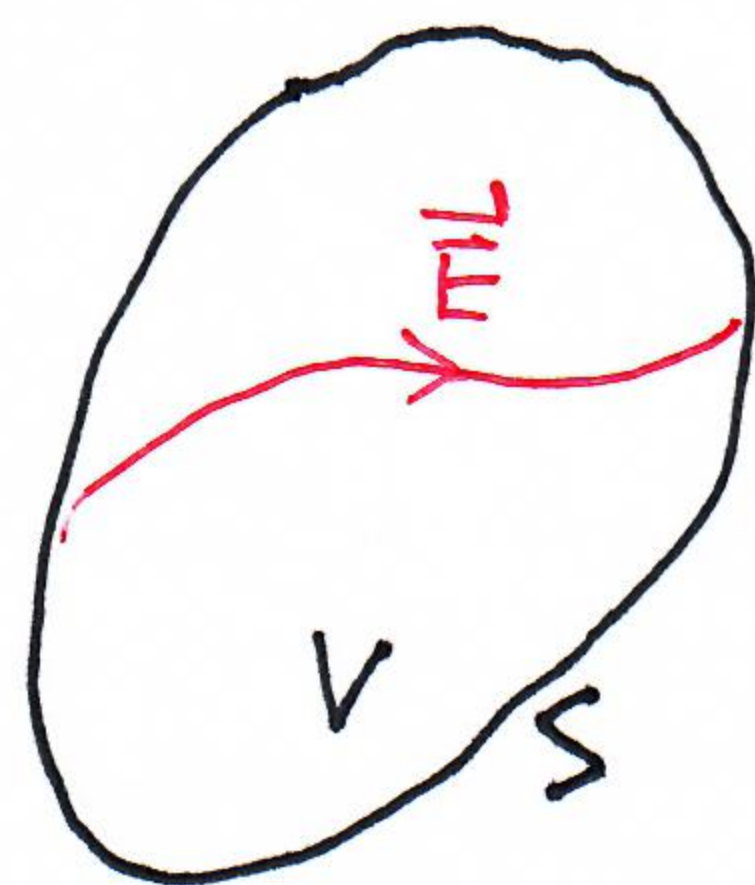
证明: 如图, 若 V 内 $U(\vec{r})$ 不均匀,

则存在电场 $\vec{E}$,

场线不会在无电荷区域中断

故沿场线 U 单调下降, 即

V 内无电势极值点.



推论 1: 若 $U_s = U_0$ (常量), 则 $U_v = U_0$. ③

推论 2 (Earnshaw 定理): 无法用静电力构造
无(源)电荷区域的(检验电荷)稳定平衡位置。

2) 平均值定理: 如图球形区域

$$\bar{U} = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\text{球面}} U(\vec{r}) dS = U_0$$

证明: 先证点源 q 情形 ($r_0 > R$)

设均匀球面电荷 $Q = 4\pi R^2 \sigma$

则相互作用能

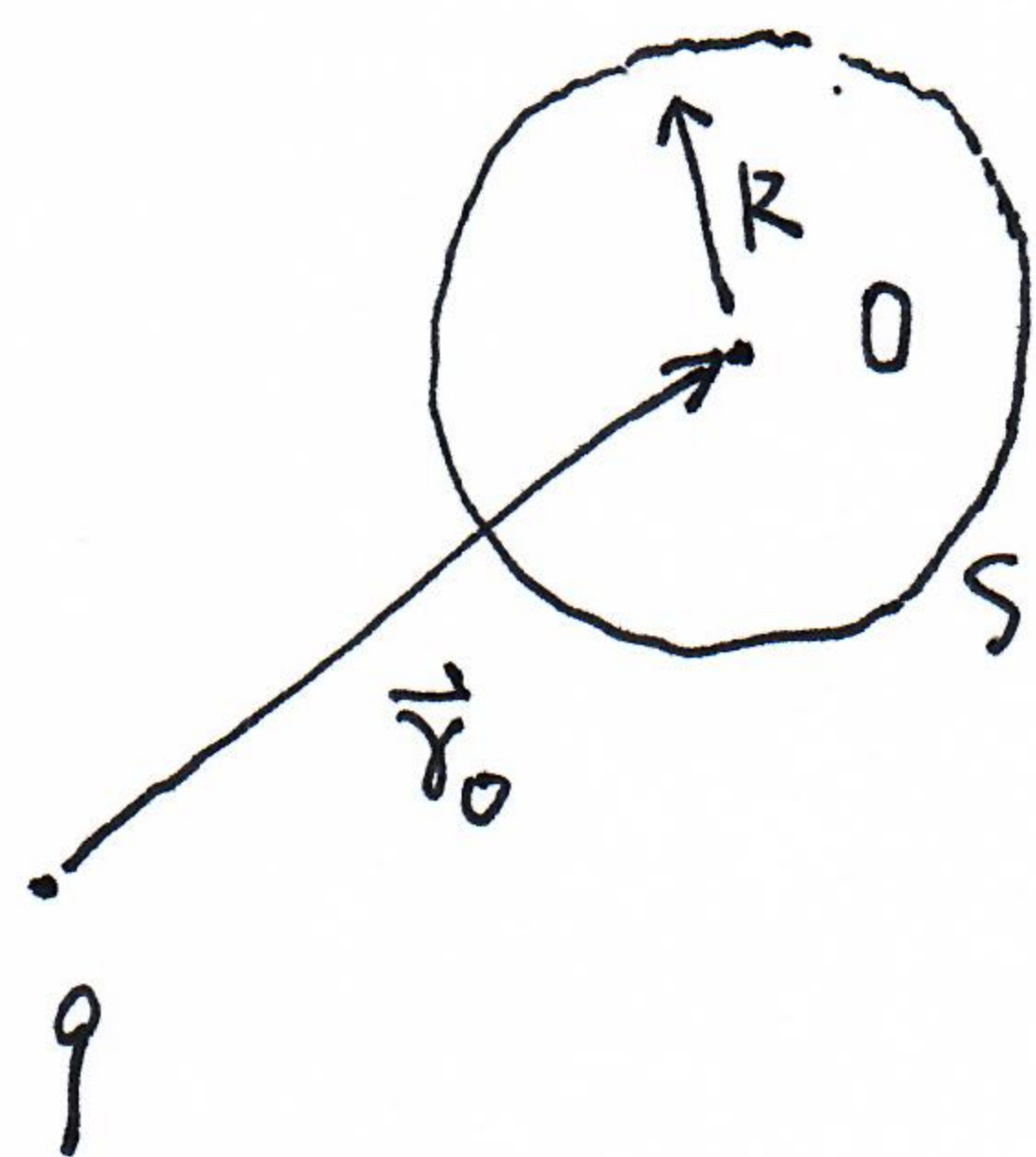
$$W_E = \oint_{\text{球面}} U_q(\vec{r}) \cdot \sigma dS = 4\pi R^2 \sigma \bar{U}_q$$

将 q 看做“检验电荷”, 则 (选 $U_\infty = 0$)

$$W_E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0} \cdot q$$

$$\therefore \bar{U}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_0} = U_{q,0}$$

一般情形, 可由电势叠加原理加以证明。



2. 静电场唯一性定理

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

给定边界值 $\begin{cases} x|_{t=0} = x_0 \\ \dot{x}|_{t=0} = v_0 \end{cases}$, 则所预言解域 ($t > 0$) 内的演化 $x(t)$

* 对于“ $\nabla^2 U = -\rho/\epsilon_0$ ”, 给定多少边界值便有定解(唯一解)?
多余条件会造成无解!

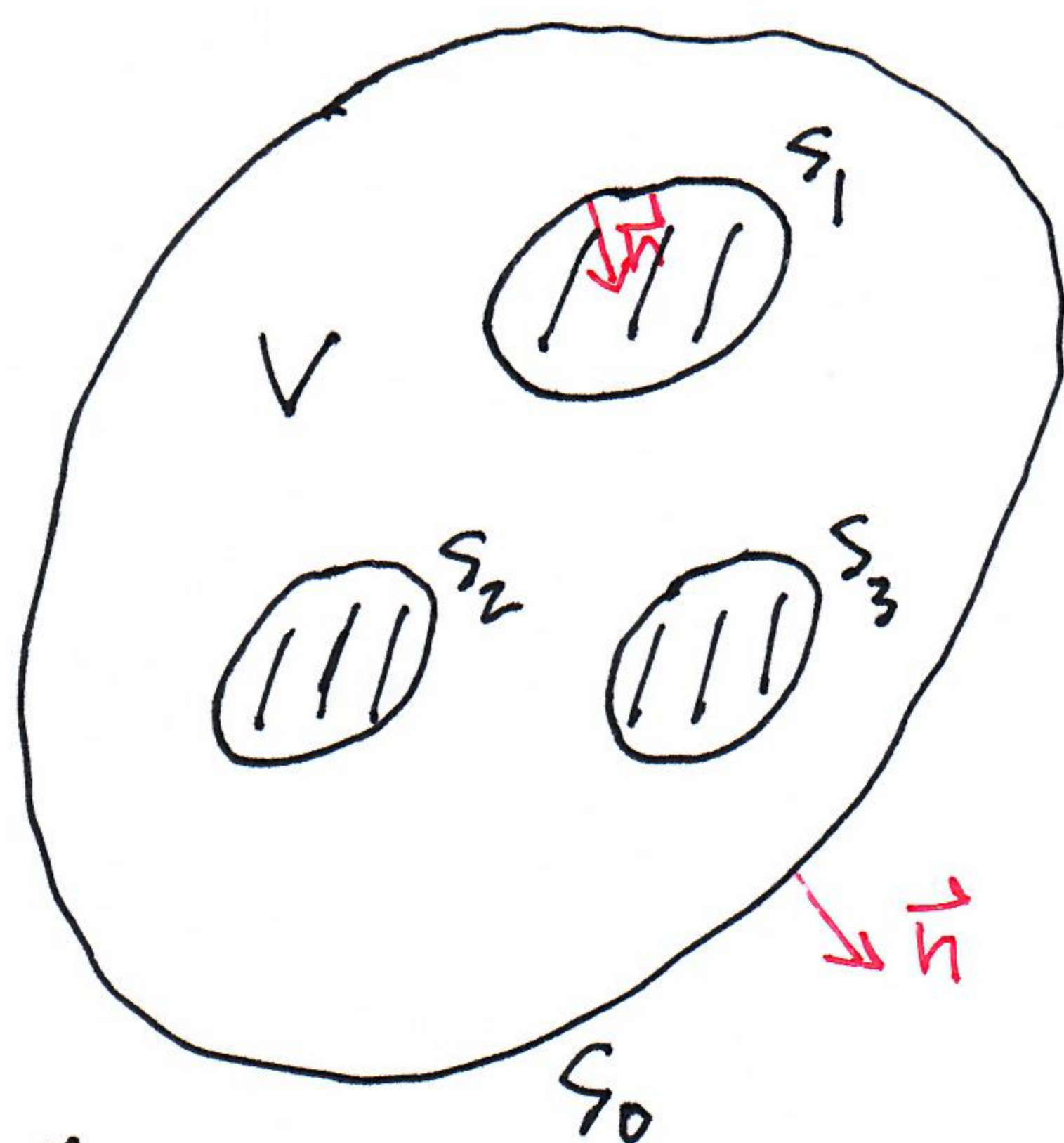
静电场唯一性定理:

④

如图解域

$$V \text{ 内: } \nabla^2 U = -\rho(\vec{r})/\epsilon_0 \text{ (给定)}$$

则确定电场解对应的唯一性边值条件的分类为:



1) 第一类: 给定 $U|_S$, $S = \sum_{i=0}^n S_i$

2) 第二类: 给定 $\partial_n U|_S$

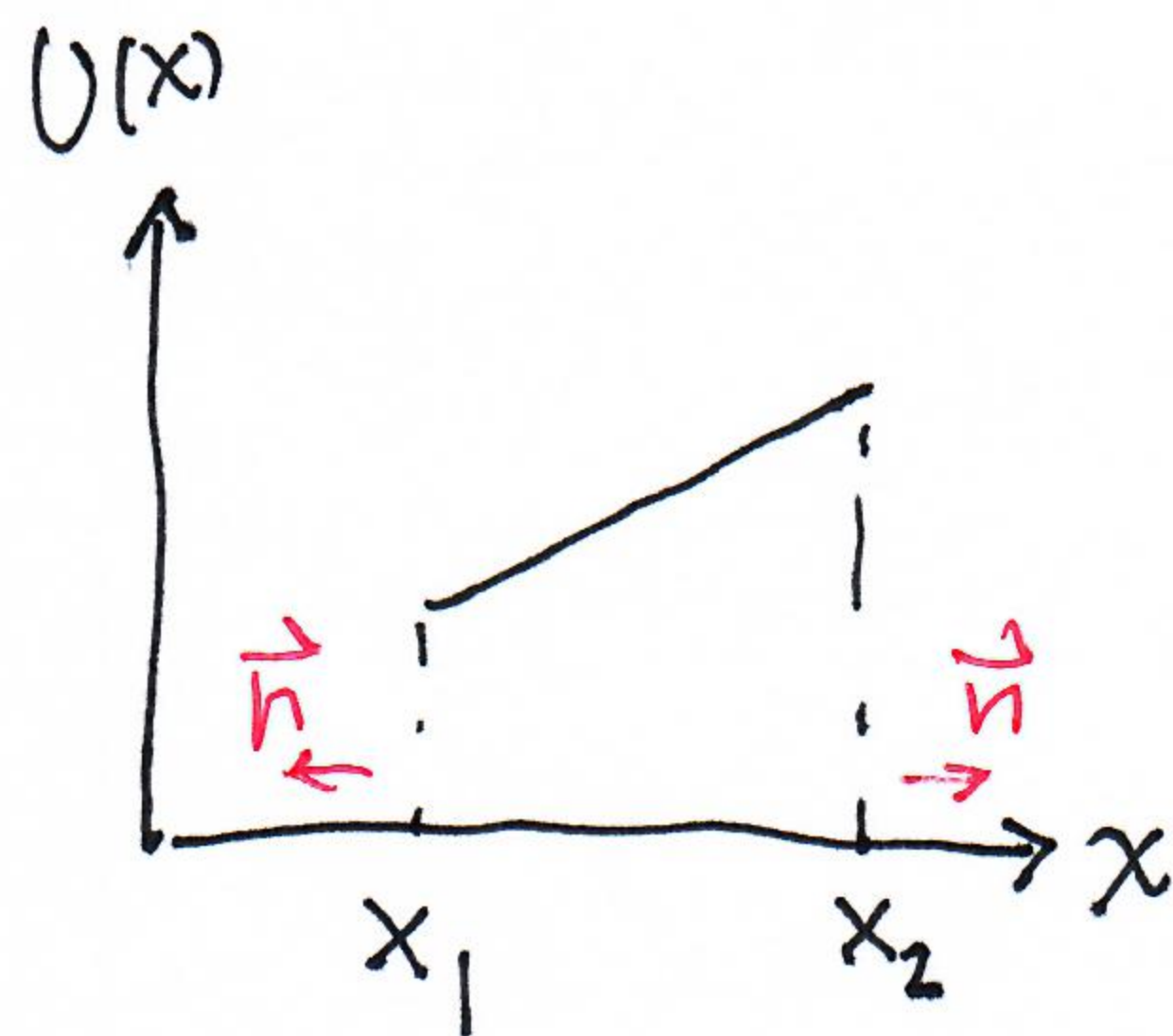
$$\text{且满足 } -\oint_{S_0} \epsilon_0 \partial_n U ds = \iiint_V \rho dV$$

3) 混合类:

* 一 {特殊情况}: Laplace 方程 $U''(x) = 0$

$$\therefore U(x) = Ax + B$$

$$E = -U'(x) = -A$$



1) 给定 $U|_{x_1} = U_1$, $U|_{x_2} = U_2$

$$\text{则 } E = -A = -\frac{U_1 - U_2}{x_1 - x_2}$$

附注: 第一类边条件下, 电势也有唯一解

2) 给定 $\partial_n U|_{x_2} = k$

$$\text{则 } E = -k$$

附注: 此时 $\partial_n U|_{x_1} = -k$ 不需额外给定。

(5)

证明：设 $U_1(\vec{r}), U_2(\vec{r})$ 为两解，对应 $\vec{E}_1(\vec{r}), \vec{E}_2(\vec{r})$

取差值分布

$$U_0 = U_1 - U_2 \quad (\vec{E}_0 = -\vec{\nabla} U_0 = \vec{E}_1 - \vec{E}_2)$$

则 V 内： $\nabla^2 U_0 = 0$

S 上： $U_0|_S = 0$ 或 $\partial_n U_0|_S = 0$

$$\begin{aligned} \therefore 0 &\stackrel{0 \text{ 或 } \infty}{\iff} \oint_S U_0 \vec{\nabla} U_0 \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot (U_0 \vec{\nabla} U_0) dV \\ &= \iiint_V (U_0 \nabla^2 U_0 + (\vec{\nabla} U_0) \cdot (\vec{\nabla} U_0)) dV = \iiint_V \vec{E}_0^2 dV \end{aligned}$$

$\therefore \vec{E}_0^2$ 正定，故 $\vec{E}_0|_V \equiv 0$

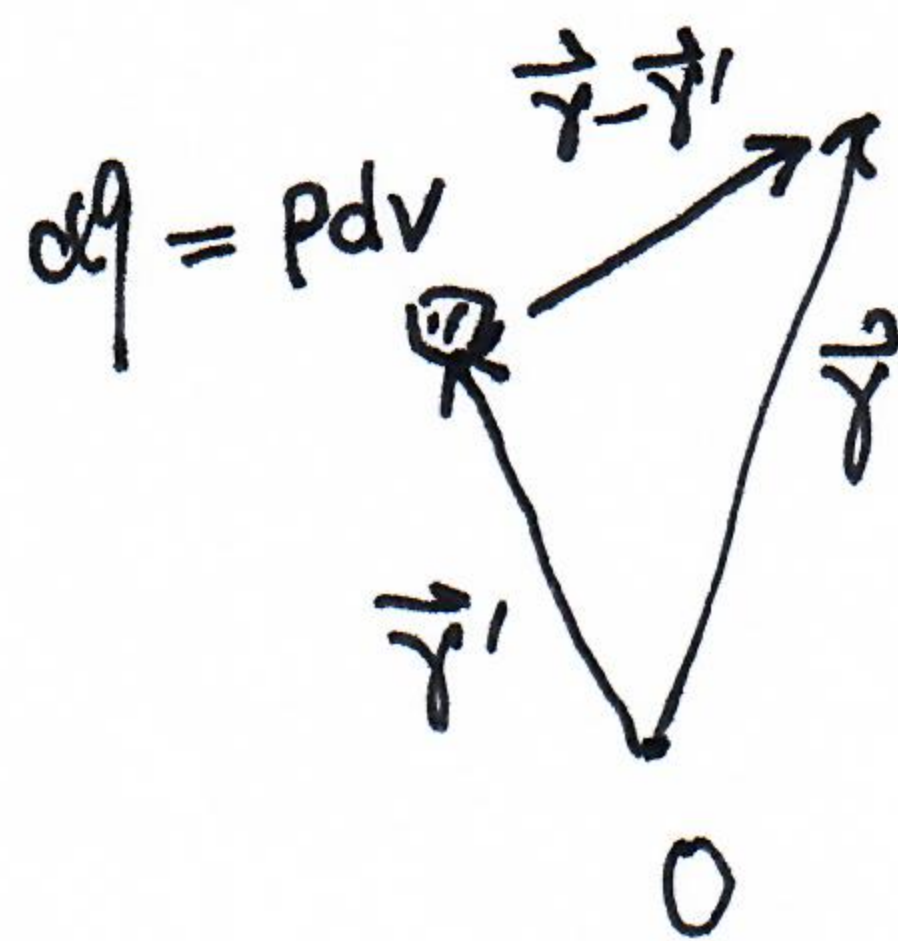
附注：由调和函数性质， $U_0|_S = 0 \Rightarrow U_0|_V = 0$

$\Rightarrow$ 例：无界空间（全空间），选 $U_\infty = 0$

$$\begin{cases} V \text{ 内：} \nabla^2 U = -\rho(\vec{r})/\epsilon_0 & (\text{给定}) \\ U|_{S_\infty} = 0 \end{cases}$$

故有唯一解

$$U(\vec{r}) = \iiint \frac{\rho(\vec{r}') d^3 \vec{r}'}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}$$



因此，

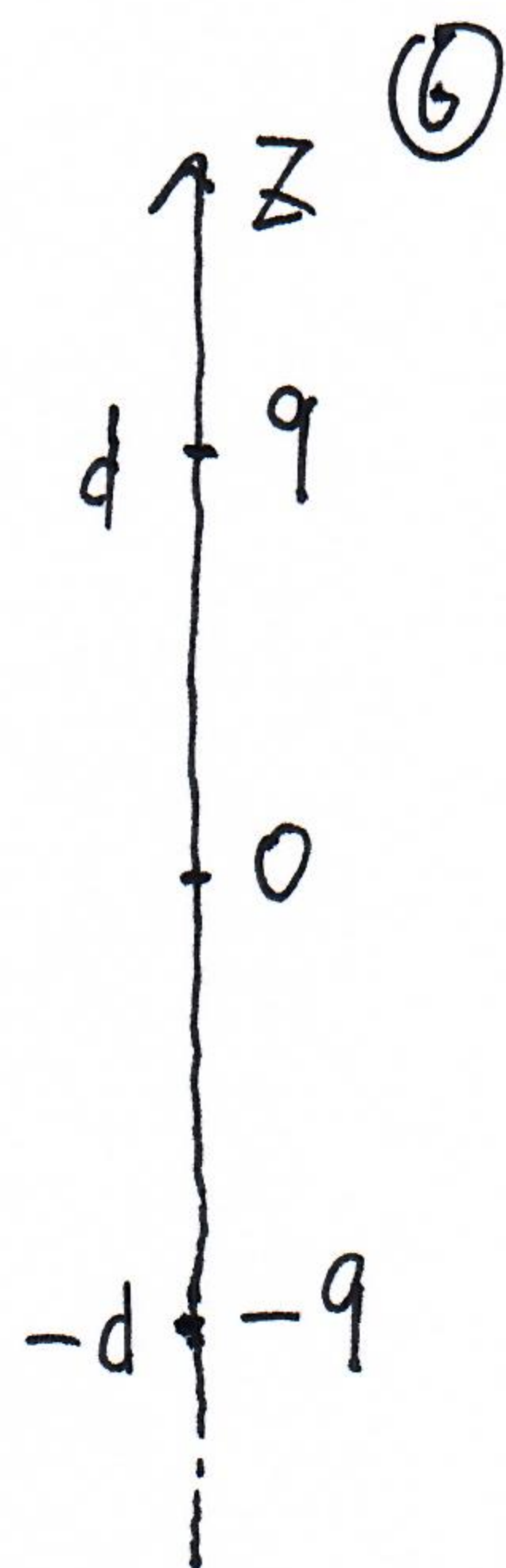
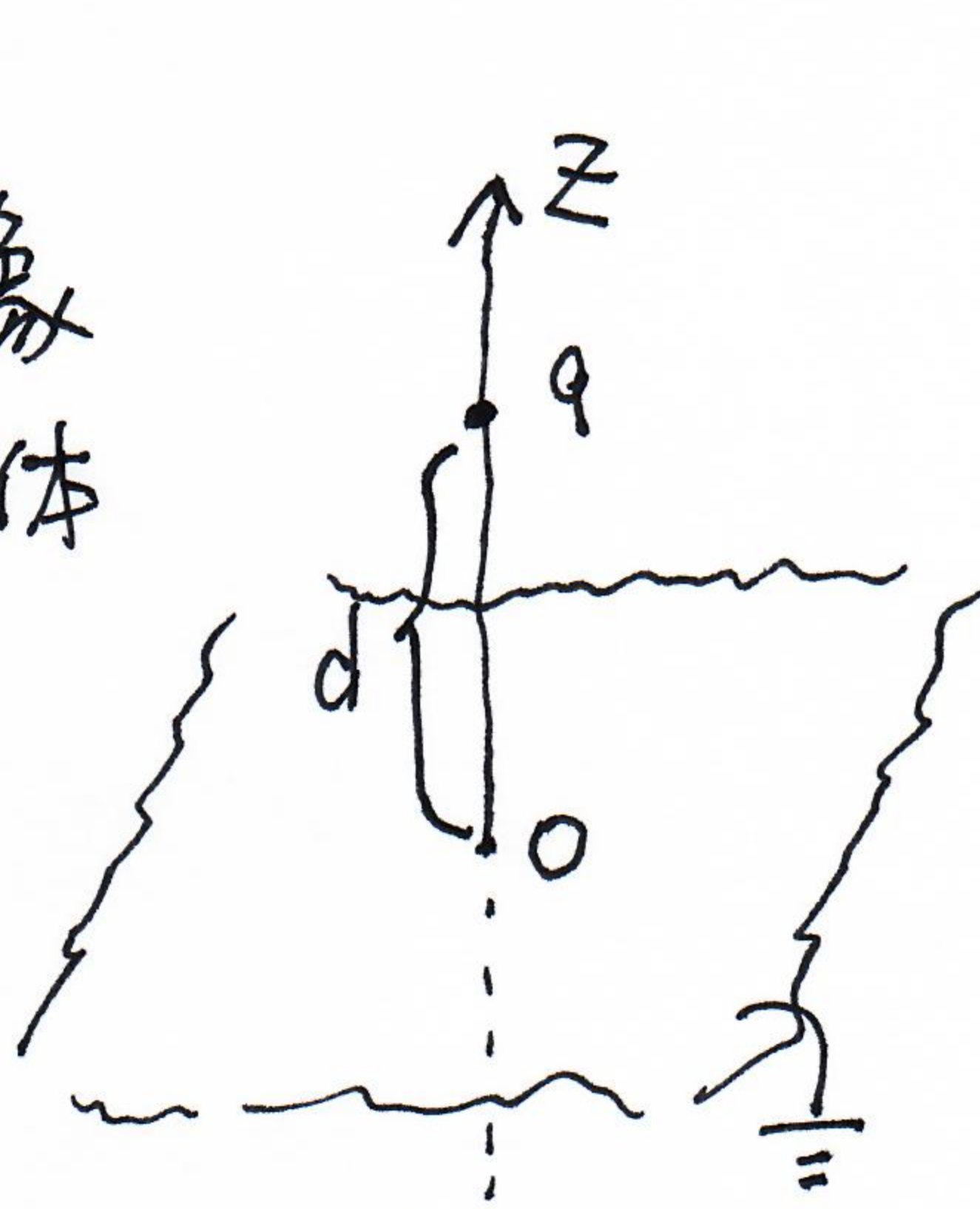
$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \end{cases} \iff \nabla^2 U = -\rho/\epsilon_0 \xrightarrow{\text{边界条件}} \begin{cases} \text{Coulomb 定律} \\ \text{叠加原理} \end{cases}$$

在此意义上，称微分方程(1) “完备” 或 “基本”。

例：
 $\Rightarrow$ 电像法 - 平面电像

$\begin{cases} z=0 \text{ 平面 (及以下) 接地导体} \\ \text{点电荷 } q(0,0,d) \end{cases}$

求：上半空间 $U(x,y,z>0)$



$$\begin{cases} V \text{ 内 } (z>0): \nabla^2 U = -q\delta(\vec{r}-\vec{r}_q)/\epsilon_0, \quad \vec{r}_q = (0,0,d) \\ \text{边界: } U|_{z=0} = 0, \quad U_\infty = 0 \end{cases} \quad (1)$$

故有唯一解。

$$\text{构造解: } U(x,y,z>0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-d)^2}} + \frac{-q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+d)^2}} \right]$$

满足 (1), 故为唯一物理解。

* 导体系静电平衡唯一性定理:

$\begin{cases} S_0 \Rightarrow S_0 \text{ 或导体空腔内表面} \end{cases}$

$\begin{cases} S_i = 1, 2, 3, \dots \Rightarrow \text{导体外表面} \end{cases}$

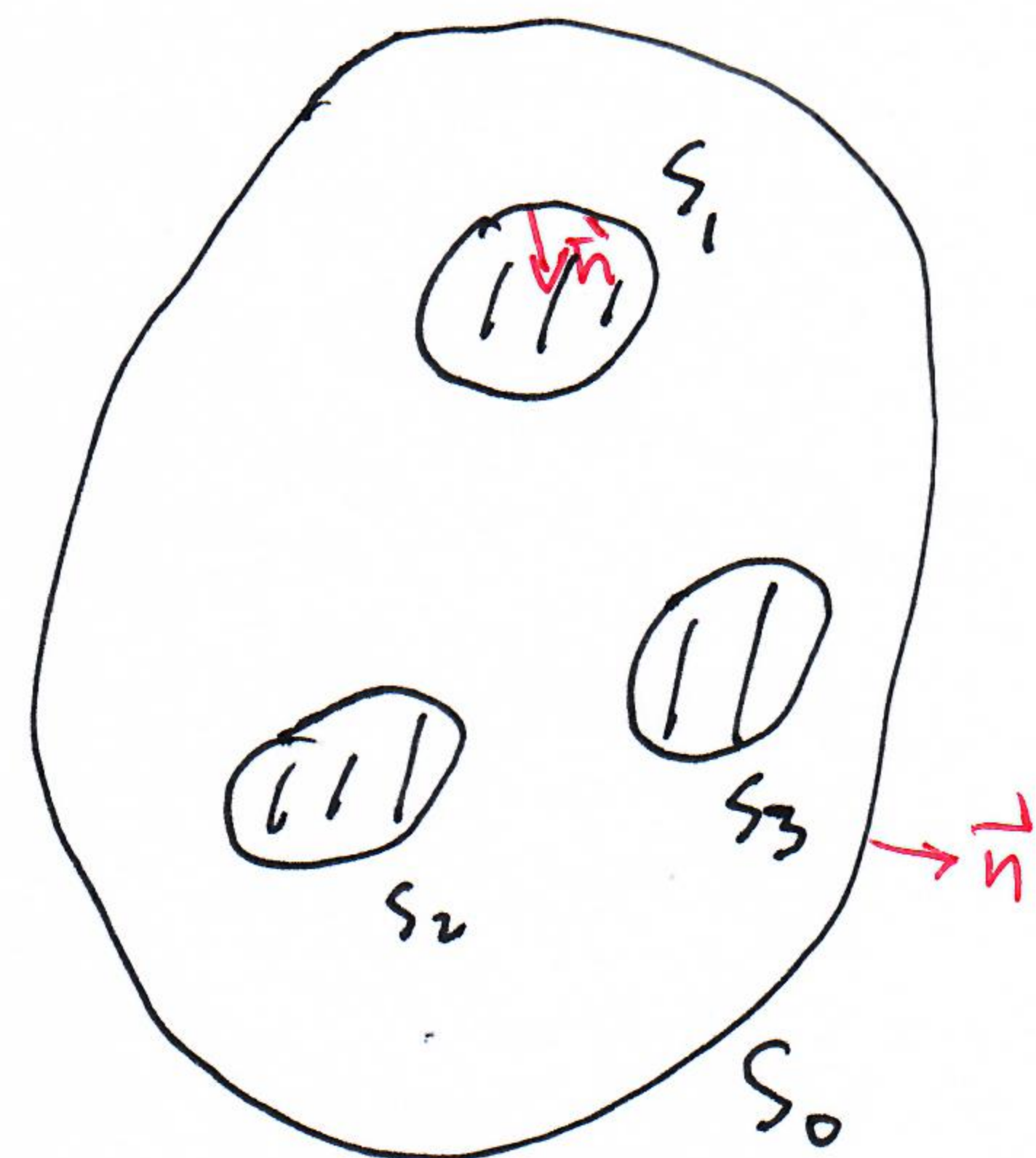
给定 V 内: $\nabla^2 U = -\rho/\epsilon_0$

则唯一性边条件为:

1) 给定 $U|_{S_i} = U_i$ (常量) $\Rightarrow$ 第一类

2) 给定 $Q_i = \epsilon_0 \oint_{S_i} \nabla U \cdot d\vec{s} \Rightarrow$ 第二类

3) 混合类.



证明(简述): 取 $U_0 = U_1 - U_2$, (2)

(7)

$$V \text{ 内: } \nabla^2 U_0 = 0$$

$$S \text{ 上: } 1) U_0|_{S_i} = 0 \quad \text{或} \quad 2) \oint_{S_i} \partial_n U_0 dS = 0$$

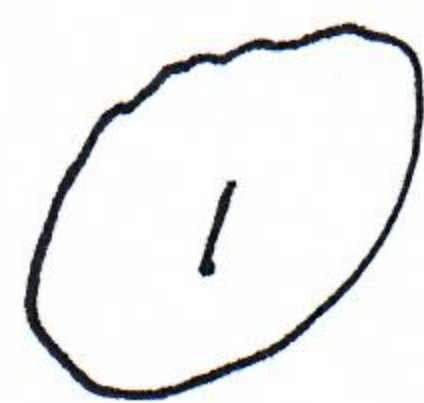
$$\therefore \oint_{S=\sum_i S_i} U_0 \vec{\nabla} U_0 \cdot d\vec{S} = \sum_i \oint_{S_i} U_0 \partial_n U_0 dS$$

$$\xrightarrow{S_i \text{ 上等势}} \sum_i U_0|_{S_i} \cdot \oint_{S_i} \partial_n U_0 dS \xrightarrow{\text{由 } 2) \text{ 或 } 1)} 0$$

$$\text{故仍有 } \vec{E}_0 = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 \equiv 0$$

* 导体系静电平衡时的叠加定理:

如图, 给定导体系形状 $\{1, 2, \dots\}$



.....

若: 总电量 $\{Q_1^I, Q_2^I, \dots\}$



$$\xrightarrow{\text{静电平衡}} \{\sigma_1^I, \sigma_2^I, \dots\}$$

$$\text{总电量 } \{Q_1^{II}, Q_2^{II}, \dots\} \xrightarrow{\text{静电平衡}} \{\sigma_1^{II}, \sigma_2^{II}, \dots\}$$

则: 给定总电量 $Q_i^{III} = Q_i^I + Q_i^{II}$, $i=1, 2, 3, \dots$

则静电平衡时表面电荷分布为 $\sigma_i^{III} = \sigma_i^I + \sigma_i^{II}$

证: 设 U^I, U^{II}, U^{III} 分布

$$\begin{cases} V \text{ 内: } \nabla^2 U^{III} = 0 \\ S \text{ 上: } U|_{S_i} = 0, \quad Q_i^{III} \text{ 给定} \end{cases}$$

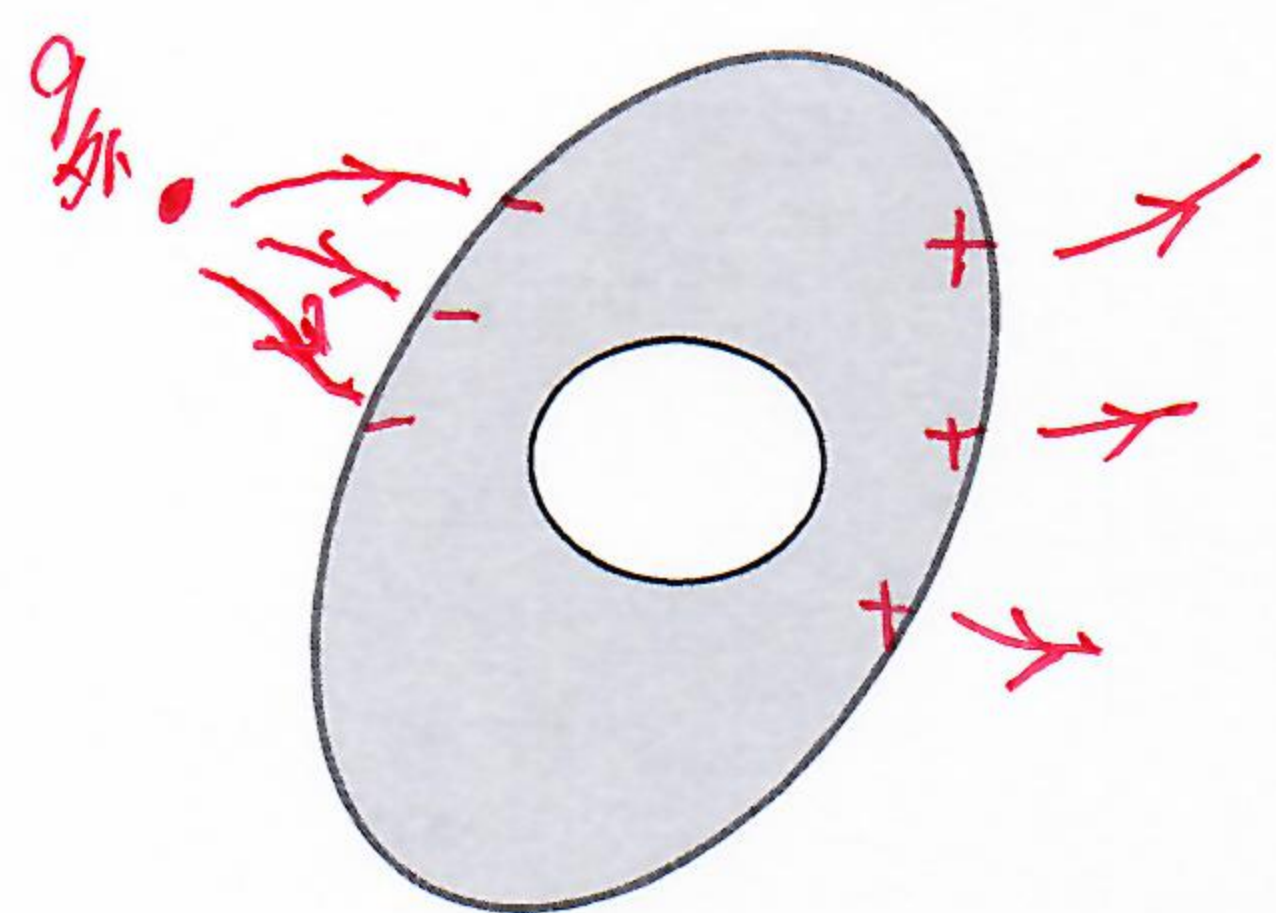
$\Rightarrow$ 唯一解 $U^{III} = U^I + U^{II}$

$$\therefore \partial_n U^{III}|_{S_i} = \partial_n U^I|_{S_i} + \partial_n U^{II}|_{S_i}, \quad i=1, 2, 3, \dots$$

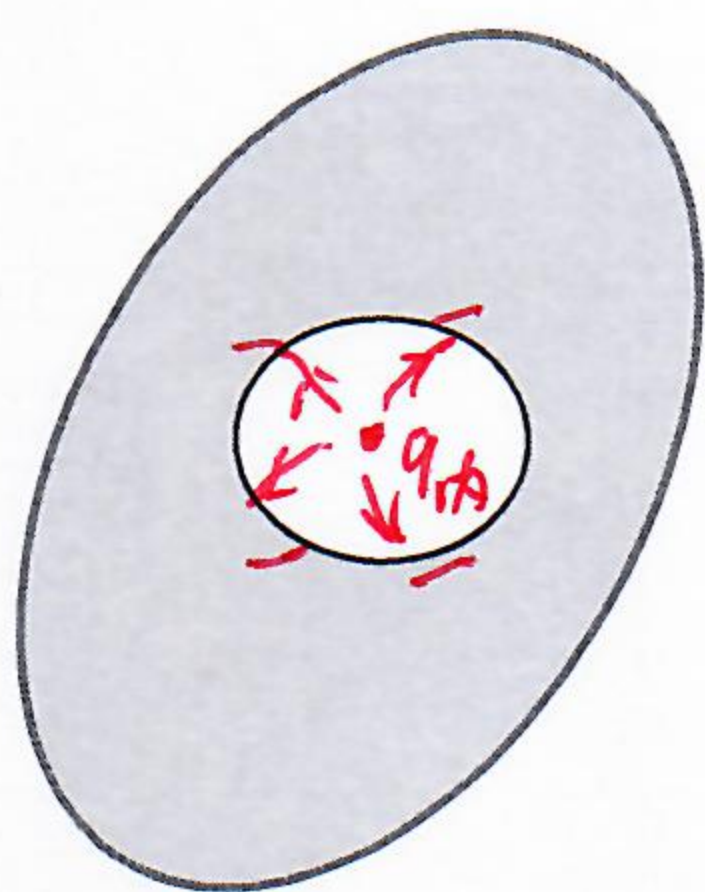
$$\text{即 } \sigma_i^{III} = \sigma_i^I + \sigma_i^{II}$$

⇒ 例：导体空腔静电平衡的屏蔽性质

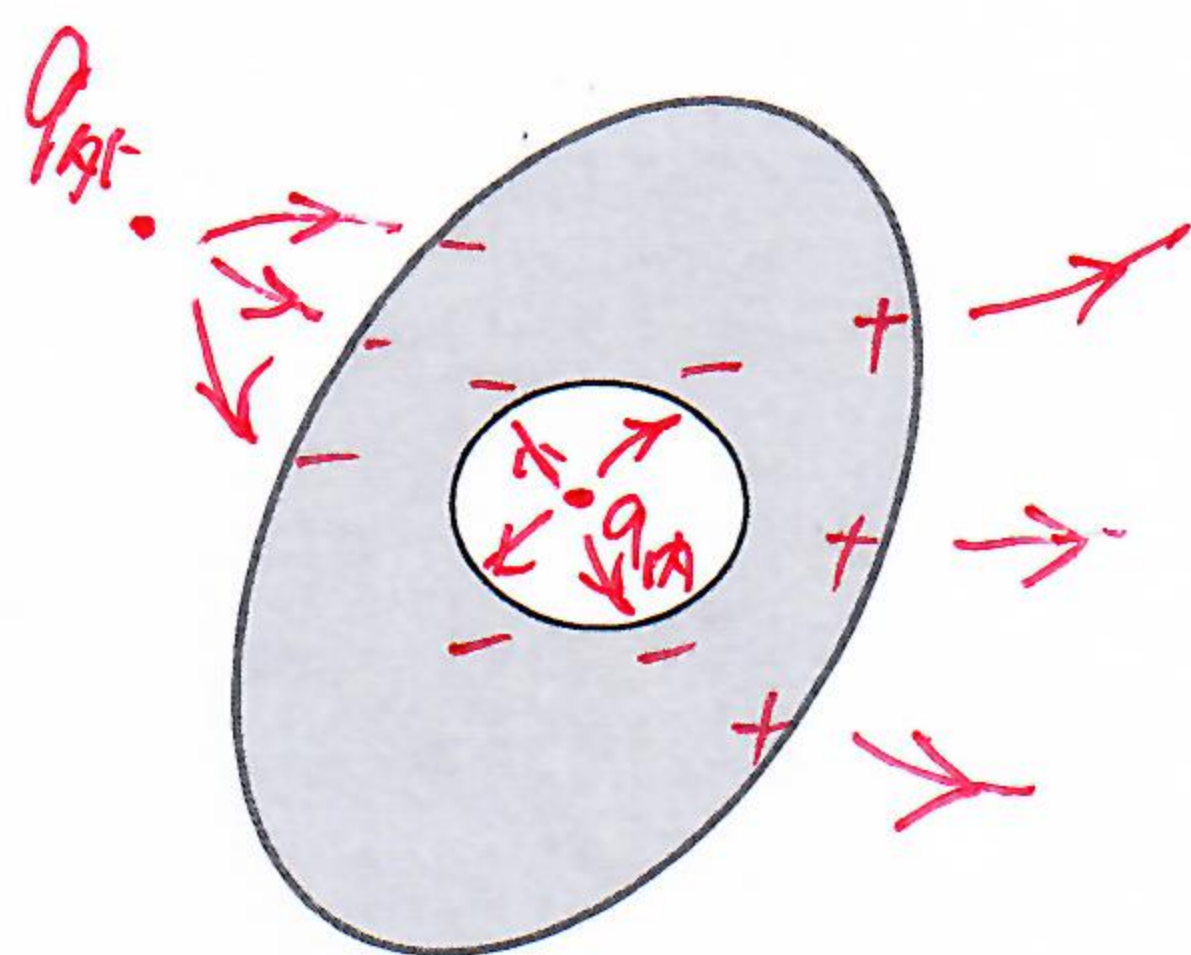
(8)



(a)



(b)



(c)

特例 (a) : $Q_{\text{导}} = Q + q_{\text{内}}$, 内部无带电体 .

则 $\sigma_{\text{内表}} = 0$ (内部为等势体)

外电荷系统 $\{q_{\text{外}}, \sigma_{\text{外表}}\}$ 激发场强被外表面屏蔽

特例 (b) : $Q_{\text{导}} = -q_{\text{内}}$, 外部无带电体

则 $\sigma_{\text{外表}} = 0$ (外部为等势体)

内电荷系统 $\{q_{\text{内}}, \sigma_{\text{内表}}\}$ 激发场强被内表面屏蔽

由“叠加定理”，当 $Q_{\text{导}} = Q$ 时的一般情形便如 (c)

⇒ 内、外电荷系统激发场强互相屏蔽。