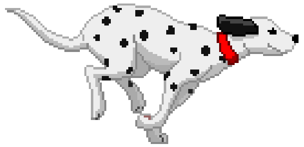
第一讲 参考系



1.1 参考系

为描述物体的运动，首先需要确定物体的位置。

物体的位置是如何确定的？

我们观察一辆行驶的汽车，车上每一点都随着汽车一起运动，在不同的时刻位于不同的位置。若我们坐在车里，车里的每一点都是静止的，总是处于同一位置，而窗外的景物则向后运动。因此，位置是相对的，总是相对参考物来确定的。

参考物必须是形状不变的物体，不能只是一个点。相对于参考物，我们能够确定其它物体的远近和方位。我们可以把参考物向各个方位扩展，比如，把其它物体与参考物相连，可以连接到空间的任何一点。因此，相对参考物，我们就有了一个参考空间。

“从这个意义上来说，我们不能抽象地谈论空间，只能是属于参考物的空间。”

——爱因斯坦《相对论的意义》

相对于参考物，我们就可以确定空间各点的位置，判断其它物体的位置是否变化，是运动还是静止。因此，我们把参考物称作——**参考系**。

长度和时间

为了比较物体的大小和运动的快慢，我们引入长度和时间的概念。

为了比较物体的大小，我们首先要选择长度的单位。在早期阶段，我们都是选择实物为基准。长度可以测量了，我们可以进一步引入面积、体积、角度，甚至可以计算曲线的长度、曲面的面积。这些就是我们熟悉的几何、三角和代数。

为了比较运动的快慢，我们选择日常生活中最熟悉的周期运动为时间的单位，比如日、月、年等。

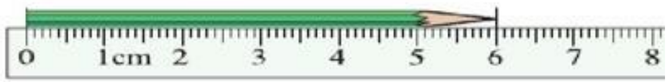
用*静止或运动*的**直尺**、**时钟**测量*静止或运动*的物体，不同的测量方法对结果有影响吗？在经典物理的适用范围内，影响完全可以忽略！　　——绝对时空观！

绝对时空观：有大家都认可的共同的直尺和时钟。

长度的测量

《史记》记载，禹以“身为度”。出土文物中，最早的商骨尺的长度约为16厘米，大概相当于一般人中指和拇指张开时的指端距离，所谓的“布手知尺”。

“邹忌修八尺有余，而形貌昳丽。”
《战国策·齐策一》《邹忌讽齐王纳谏》



在国际单位制中，长度的单位是米，记作m，是第一个基本量。

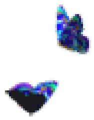
在1889年第一届国际计量大会批准米的实物基准——国际米原器

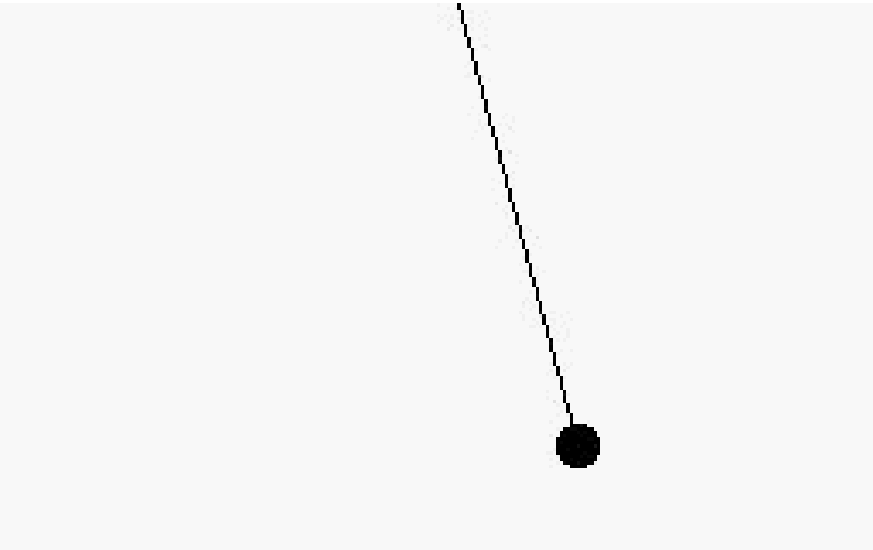
从1960年起，米定义的实物基准转换为自然基准

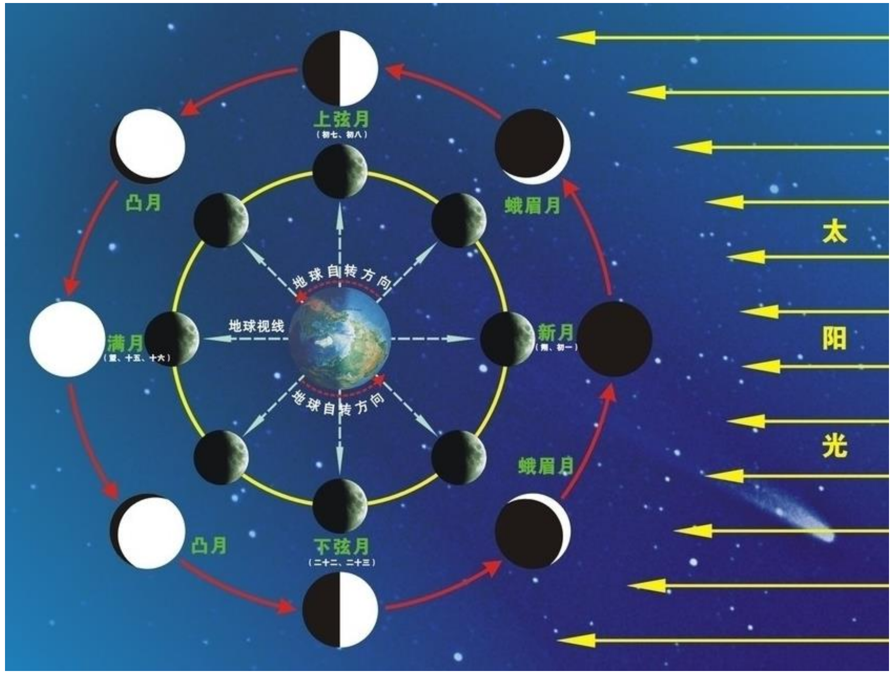
米的新定义
米是1/299792458秒的时间间隔内光在真空中行程的长度

时间的概念源于物质的运动

早期人们用自然界的周期运动来表示时间的长短：日、月、年







在国际单位制中，时间的单位是秒，记作s，是第二个基本量。

秒的定义：秒是^{133}铯原子基态的两个超精细能级之间跃迁相对应的辐射的9192631770个周期所持续的时间

自然界中长度和时间的量级

成人身高 1~2m
珠峰海拔高度 9km
地球半径 6371km
月球半径 1738km
太阳半径 6.96×10^5km
日地距离 1.5×10^8km
1光年约 9.5×10^{12}km
现代宇宙视界 150亿光年

人眼瞳孔直径 2~6mm
可见光波长 0.4~0.7μm
原子半径 1Å
原子核半径 1fm

人体心律周期 0.8s
太阳光传到地球的时间约 5×10^2s
猿人出现的时间距今约 4×10^2万年
侏罗纪距今约 0.5 ~ 1.5亿年
地球年龄约 46亿年
太阳年龄约 50亿年
宇宙年龄约 150亿年
电子寿命大于 10^{22}年

人眼视觉的弛豫时间约 0.1s
人体感觉神经脉冲间隔约 1ms
原子发光持续时间约 1ns = 10^{-9}s
顶夸克寿命约 10^{-24}s

绝对时空观

绝对空间，就其本性来说，与任何外在的情况无关，
始终保持着相似和不变。
绝对的、纯粹的、数学的时间，就其本性来说，均匀地
流逝而与任何外在的情况无关。

牛顿 ——《自然哲学的数学原理》

在绝对时空观中，长度和时间的测量与物体的存在和运动没有任何关系，这是最简单的时空观，完全符合我们的日常生活经验，也是经典物理的时空观。

绝对时空观的修正

狭义相对论

广义相对论

时空绝对吗？

与物无关吗？

绝对时空观

位置唯一吗？

时空连续吗？

量子力学

量子场论

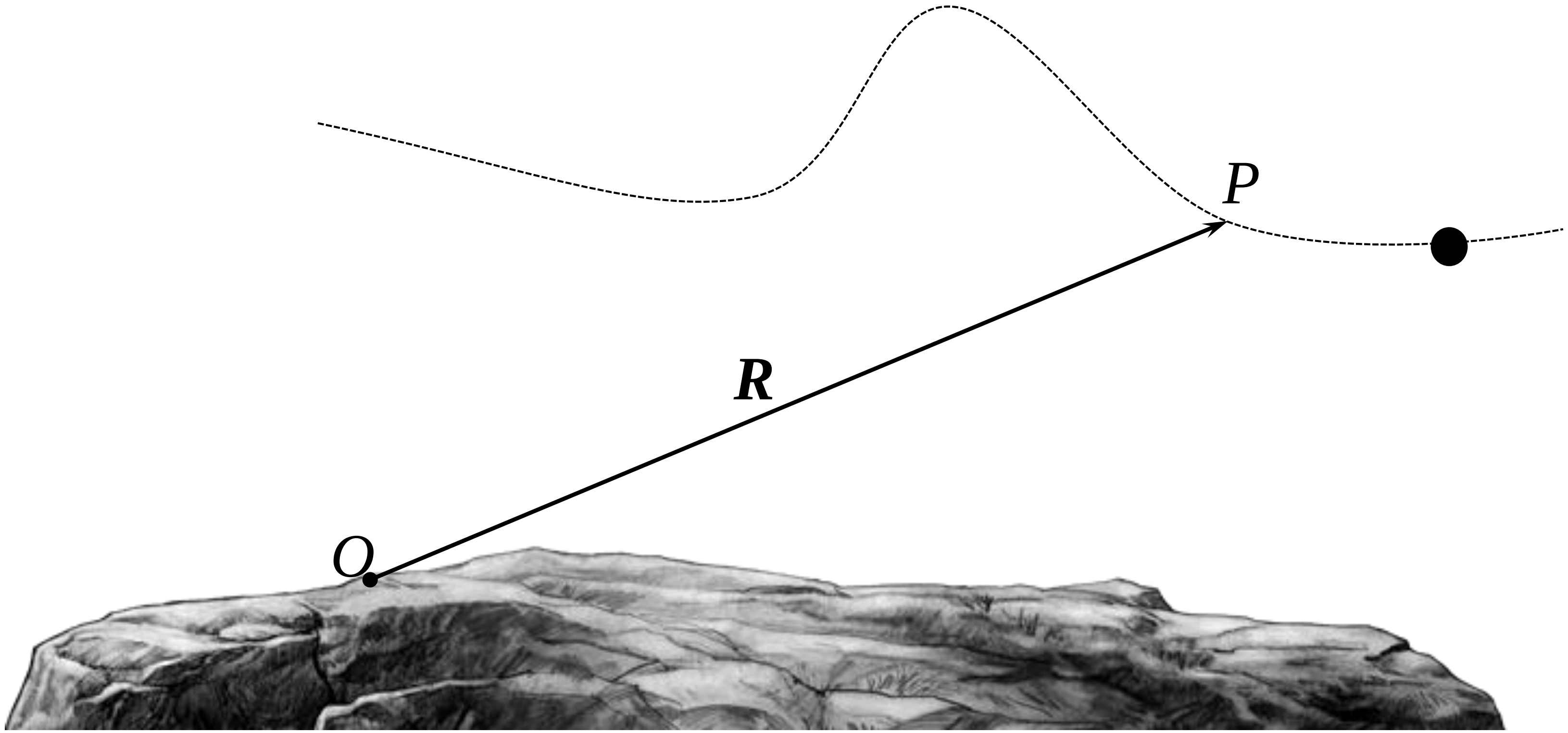
运动的物体

最简单的物体——质点：具有一定质量，没有大小形状的点

复杂的物体，可看作由质点组成——质点系

为了研究运动，我们从最简单物体的最简单运动入手！

位置矢量



在参考物或空间任选一点为参考点O，质点的位置为P，质点的位置矢量**R**大小等于OP的间距，方向从O指向P点，如图所示。因此，质点的位置可以用一个矢量来表示。质点在空间运动时，位置矢量的末端画出质点的运动轨迹。一般情形下，轨迹是空间曲线。

坐标系

最熟悉的参考系就是以大地为参考物。日月经天，江河行地。云行雨施，鸢飞鱼跃。这是我们熟悉的生活景象。

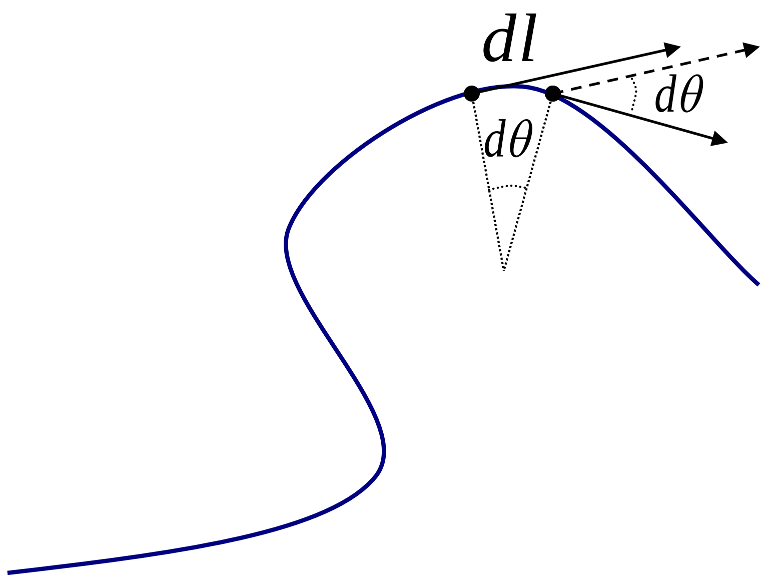
坐标系：在参考空间中任选一点作为原点，可建立各种坐标系。最熟悉的就是笛卡尔空间直角坐标系。

位置矢量可以用坐标和单位矢量表示

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

1.3.3 自然坐标系

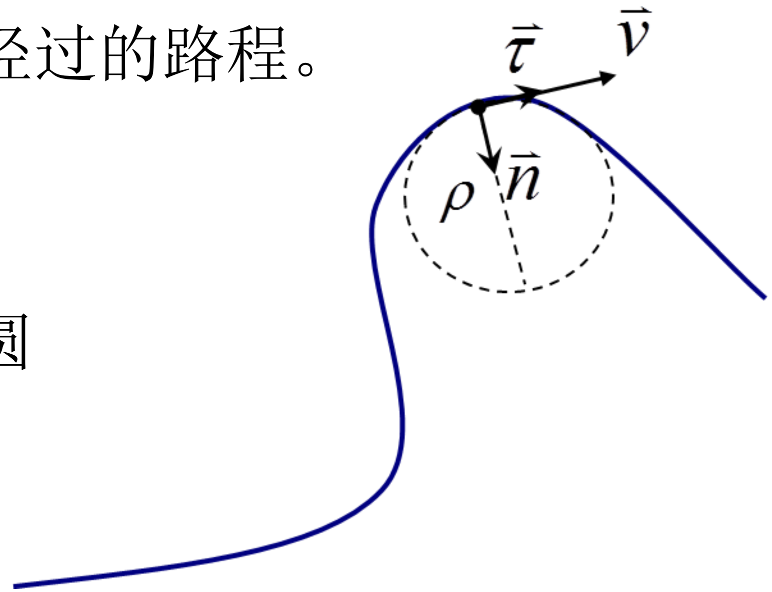
曲线的曲率和曲率半径



曲率 $\dfrac{d\theta}{dl}$

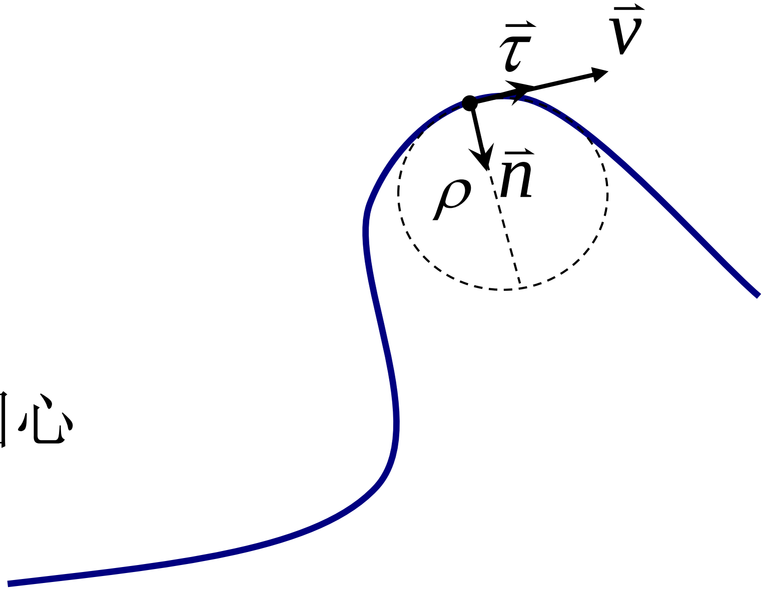
曲率半径 $\rho = \dfrac{dl}{d\theta}$

曲率正比于转过的角度，反比于经过的路程。



曲线上每一点都可以画一个曲率圆

自然坐标系



自然坐标系的两个正交基矢

切向单位矢量 $\vec{\tau}$ 沿速度方向

法向单位矢量 $\vec{n}$ 指向曲率圆的圆心

速度在自然坐标系的表示：$\vec{v} = v\vec{\tau}$

加速度在自然坐标系中的分解

$$\vec{a} = \frac{d(v\vec{\tau})}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\theta}{dt}\vec{n}$$
$$= \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\theta}{dt}\frac{dl}{dl}\vec{n}$$
$$= \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$
$$= a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n}$$

计算曲率半径的运动学方法

（1）假设一种沿曲线的简单运动

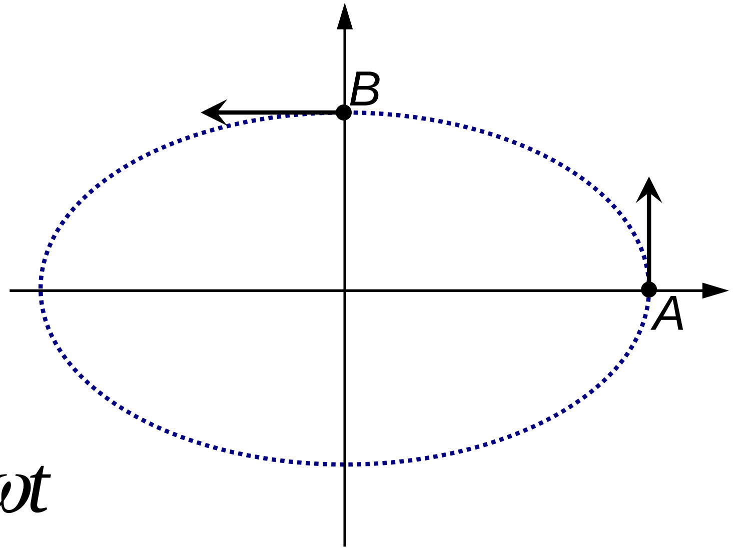
（2）计算各点的速度

（3）计算各点的加速度

（4）计算与速度方向垂直的加速度分量，即法向加速度a_n

（5）计算曲率半径$\rho = \frac{v^2}{a_n}$

例 椭圆半长轴和半短轴处的曲率半径



假设一沿轨道的运动

$$x = A\cos\omega t,\quad y = B\sin\omega t$$

求速度和加速度

$$v_x = -A\omega\sin\omega t,\quad v_y = B\omega\cos\omega t$$

$$a_x = -A\omega^2\cos\omega t,\quad a_y = -B\omega^2\sin\omega t$$

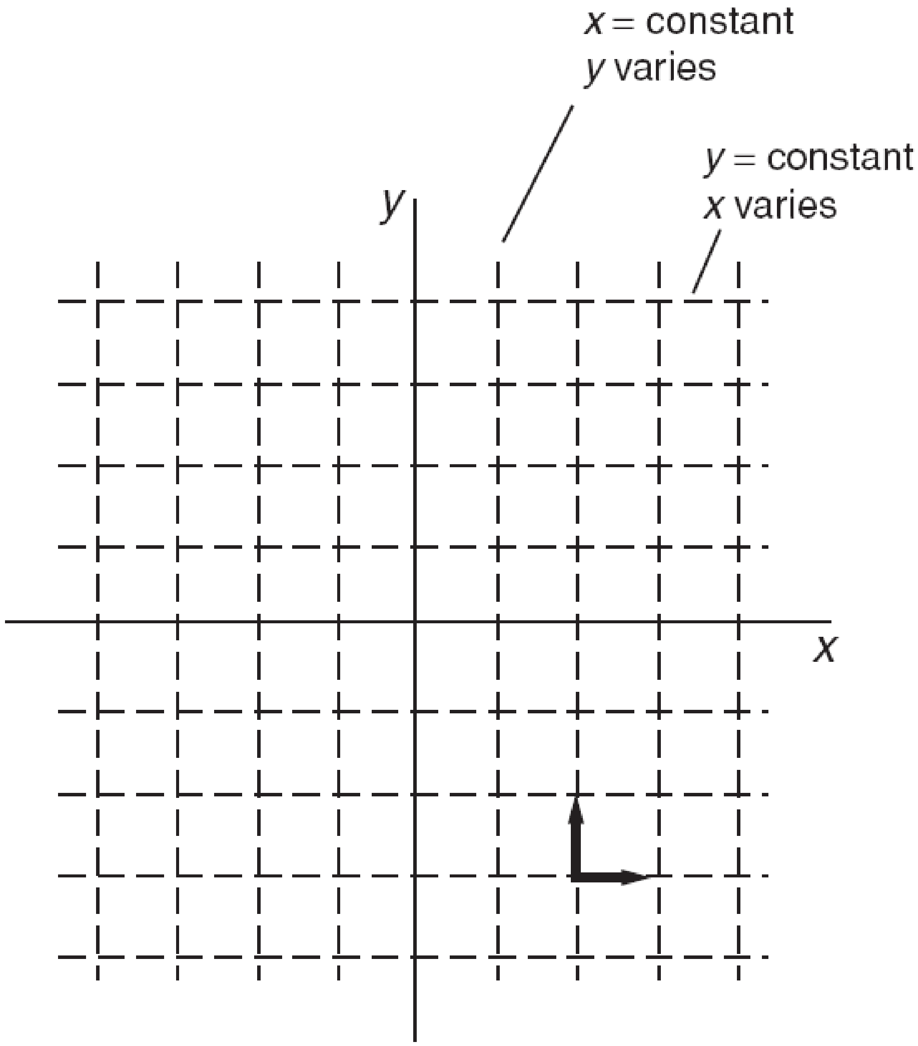
求法向加速度

在$(A, 0)$处$a_n = A\omega^2$　　在$(0, B)$处$a_n = B\omega^2$

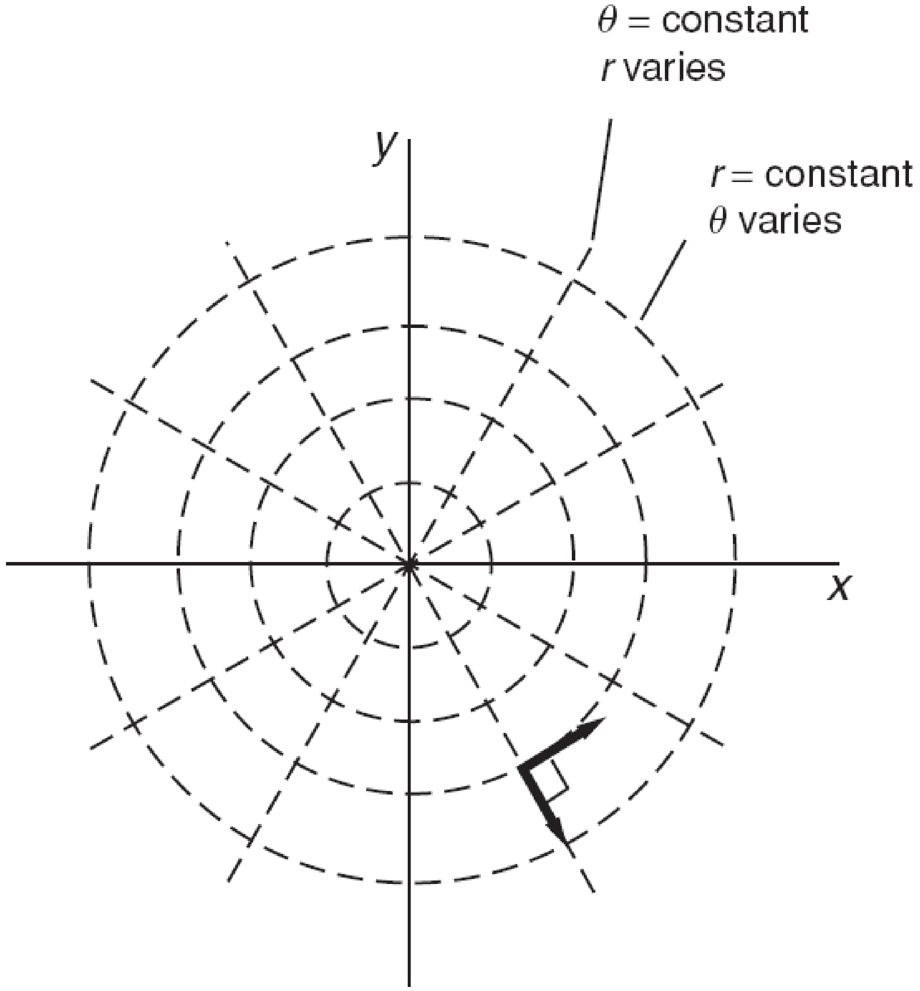
代入公式，曲率半径

$$\rho_A = \frac{B^2}{A},\quad \rho_B = \frac{A^2}{B}$$

平面直角坐标和极坐标的比较



Cartesian



Plane polar

坐标面和坐标线：令一个或两个坐标为常量所得到的面或线。

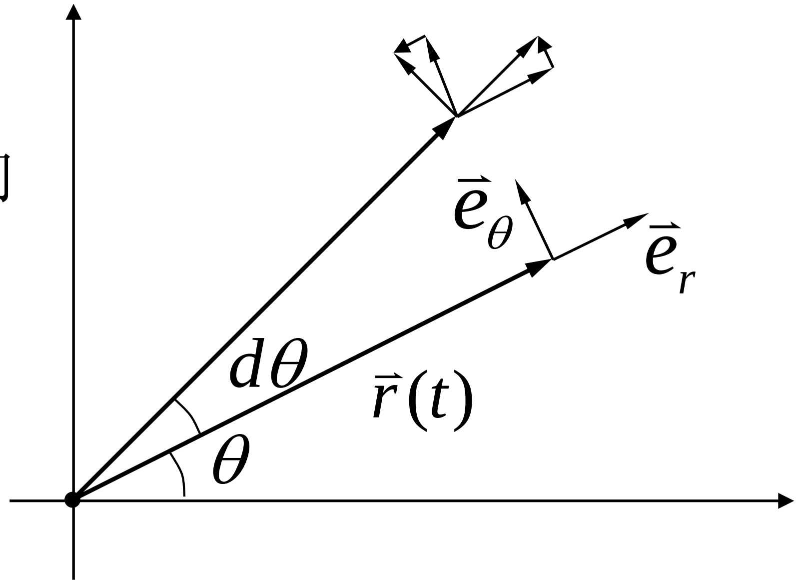
基矢的微分

正交基矢只依赖 θ，与 r 无关

当 θ 变化时，正交基矢同时改变方向满足微分关系

$$d\vec{e}_r = d\theta\vec{e}_\theta$$

$$d\vec{e}_\theta = -d\theta\vec{e}_r$$

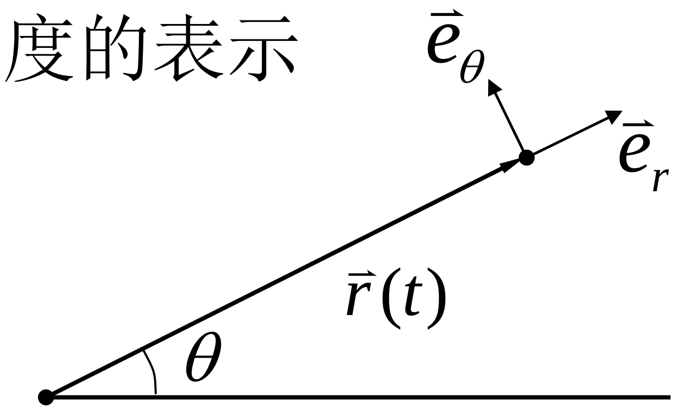


极坐标的基矢，用直角坐标系的基矢表示，然后求微分

$$\begin{cases}\vec{e}_r = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \vec{e}_\theta = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}d\vec{e}_r = (-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath})d\theta = \vec{e}_\theta d\theta \\ d\vec{e}_\theta = -(cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath})d\theta = -\vec{e}_r d\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ \dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r\end{cases}$$

极坐标系中位置矢量、速度和加速度的表示



位置 $\vec{r} = r\vec{e}_r$

速度 $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\dfrac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$

$= \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$

径向速度 $\vec{v}_r = \dfrac{dr}{dt}\vec{e}_r = v_r\vec{e}_r$

横向速度 $\vec{v}_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta = v_\theta\vec{e}_\theta$

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right)$$

$$=\frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta-r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r$$

径向速度大小的变化

径向速度方向的变化

r增大引起横向速度的变化

角速度增大引起横向速度的变化

横向速度方向的变化

加速度 $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta$

$$= a_r \vec{e}_r + a_\theta \vec{e}_\theta$$

$$= \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{e}_r + \left(2 \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \vec{e}_\theta$$

径向加速引起

横向旋转引起

旋转共同引起

径向变化与横向

加速旋转引起

极坐标系：$\vec{r} = r\vec{e}_r$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

平面极坐标系中质点运动的轨道方程

在平面上，质点的运动方程 $\vec{r} = \vec{r}(t)$

在极坐标系中，质点的运动方程 $\begin{cases} r = r(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$

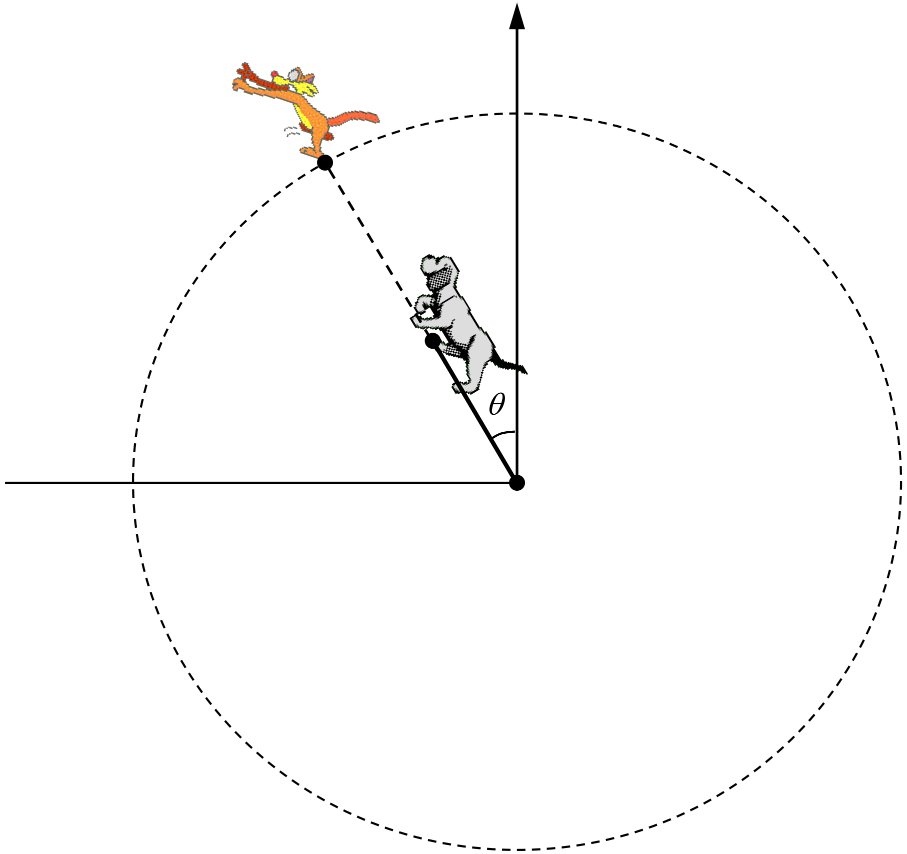
消去时间参量 t，得到极坐标系中的质点运动轨道方程 $r = r(\theta)$

若已知径向速度与横向速度，利用 $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{rv_r}{v_\theta}$

通过积分，可以得到轨道方程 $r = r(\theta)$

例 狐狸沿圆周跑，狗从圆心出发，速度都为v，圆心、狗、狐狸始终连成一直线。

求狗的速度、加速度和轨道方程。



狐狸的角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{v}{R}$

狗有横向和径向速度 $v_\theta = r\omega, v_r = \sqrt{v^2 - v_\theta^2}$

狗的横向和径向加速度

$$a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = 2v_r\omega,$$

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{dv_r}{dr}\frac{dr}{dt} - r\omega^2 = -2\frac{r}{R^2}v^2$$

轨道方程 $\dfrac{dr}{d\theta} = r\dfrac{v_r}{v_\theta} = \sqrt{R^2 - r^2} \Rightarrow \displaystyle\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \int_0^\theta d\theta \Rightarrow r = R\sin\theta$

微元法

对于无穷小的时间间隔Δt

$$\Delta\vec{r} = (\vec{v}+\Delta\vec{v})\Delta t = \vec{v}\Delta t + \Delta\vec{v}\Delta t = \vec{v}\Delta t$$

变速变匀速

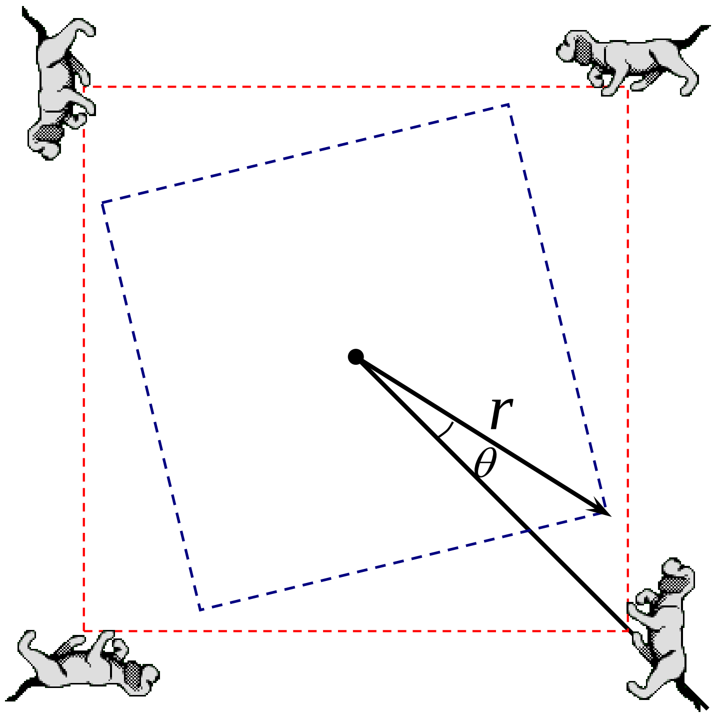
$$\Delta\vec{v} = (\vec{a}+\Delta\vec{a})\Delta t = \vec{a}\Delta t + \Delta\vec{a}\Delta t = \vec{a}\Delta t$$

变加速变匀加速

其它连续变化的物理量也如此分析，例如力、密度随位置的变化。

结论：对于微元过程，函数增量与函数值相比，可以忽略——**连续性**；
函数增量只需考虑线性主部——**可微性**。

例 **四点追击** 四只狗开始位于边长为 l 的正方形四个顶点上，追击速度v保持不变，求开始时狗的加速度、相遇的时间和轨道方程。



分析：四只狗始终成一正方形

建立极坐标系

经过时间间隔dt，狗的位移vdt

狗转过的角度 $d\theta = vdt/l$

狗速度的改变量 $|d\vec{v}| = vd\theta$ ⇨ 加速度 $a = v^2/l$

径向速度不变 ⇨ 相遇的时间 $t = l/v$

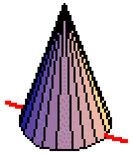
微分方程 $\dfrac{dr}{d\theta} = r\dfrac{v_r}{v_\theta} = -r$ ⇨ $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2} l e^{-\theta}$

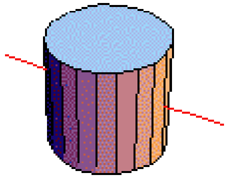
刚体的运动

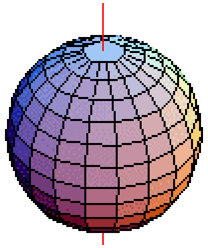
质点在空间中自由运动，有三个自由度。

刚体的自由度 ＝ 3 平动 + 3 转动

刚体的平动

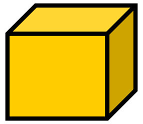






刚体的定点转动

刚体的定轴转动



其它运动

宠辱不惊，闲看庭前花开花落；
去留无意，漫随天外云卷云舒。

1.5 相对运动

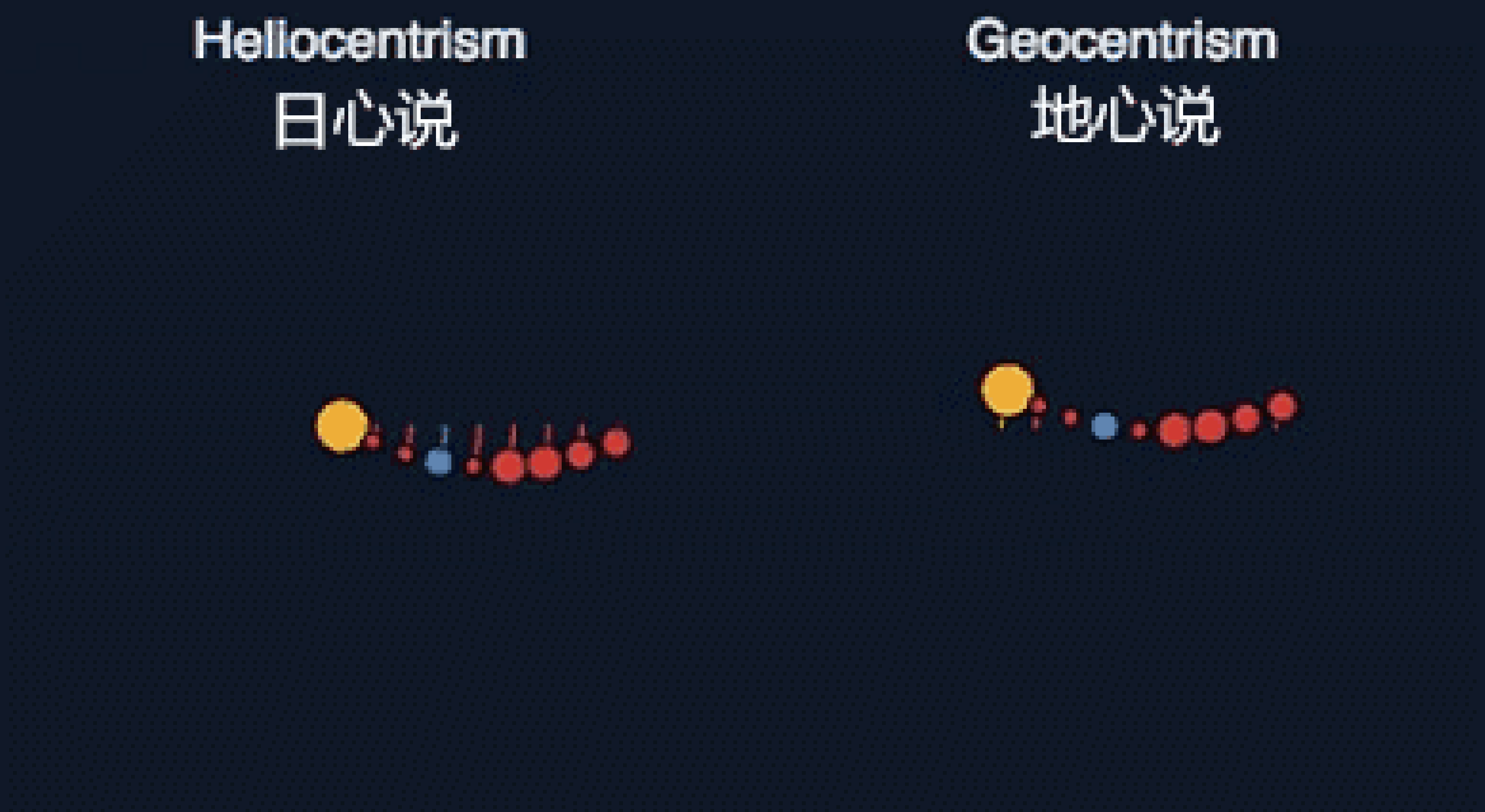
两种相对运动

相对运动的两个观测者观测同一个物体的运动

一个观测者观测两个物体的相对运动

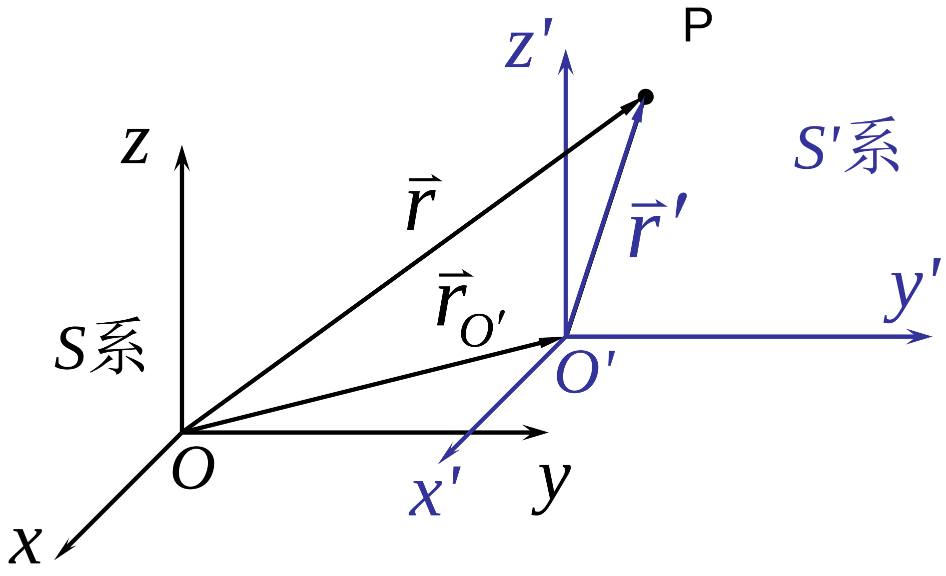
参考系的选择

在不同参考系中，行星运动的运动学描述和动力学分析



1.5.1 平动参考系

两个参考系之间有相对运动，参考系 S' 相对参考系 S 运动，对于同一质点的运动，它们测量的位置、速度和加速度有什么关系?



绝对时空观

时间相同 $t = t'$

时间的微分关系 $dt = dt'$

位置的关系：矢量三角 $\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{r}_{O'}(t)$

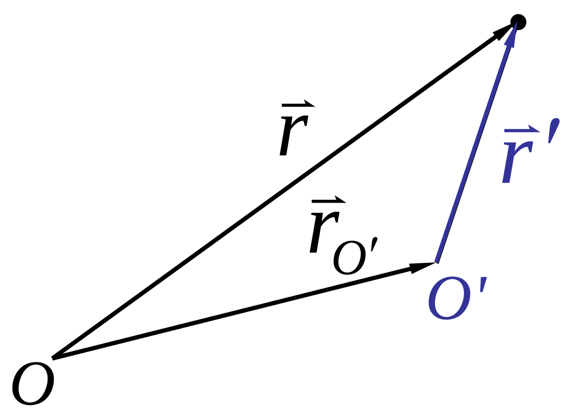
平动：参考系S'的坐标轴相对参考系S固定不动，
即参考系S'的基矢不随时间变化。

$$\dot{\vec{i}}' = 0, \cdots$$

位置 $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_{O'}(t)$

速度 $\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{v}_{O'}(t)$

加速度 $\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \vec{a}_{O'}(t)$



1.5.2 转动参考系

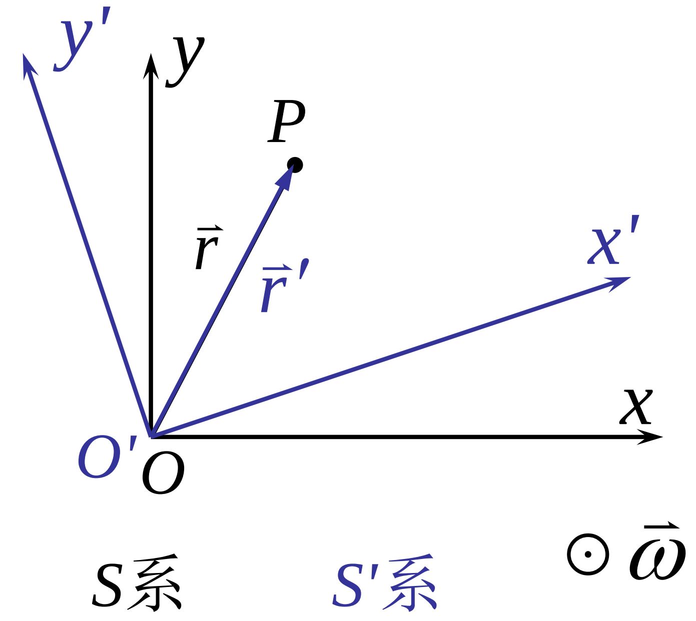
转动参考系：相对S系，S'系绕着它的某一点O'匀速定轴转动，转动角速度沿z轴方向。

两个坐标系的原点和z轴重合，在两个坐标系中，质点P的

位置 $\begin{cases} \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} \\ \vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' \end{cases}$

速度 $\begin{cases} \vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \\ \vec{v}' = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' \end{cases}$

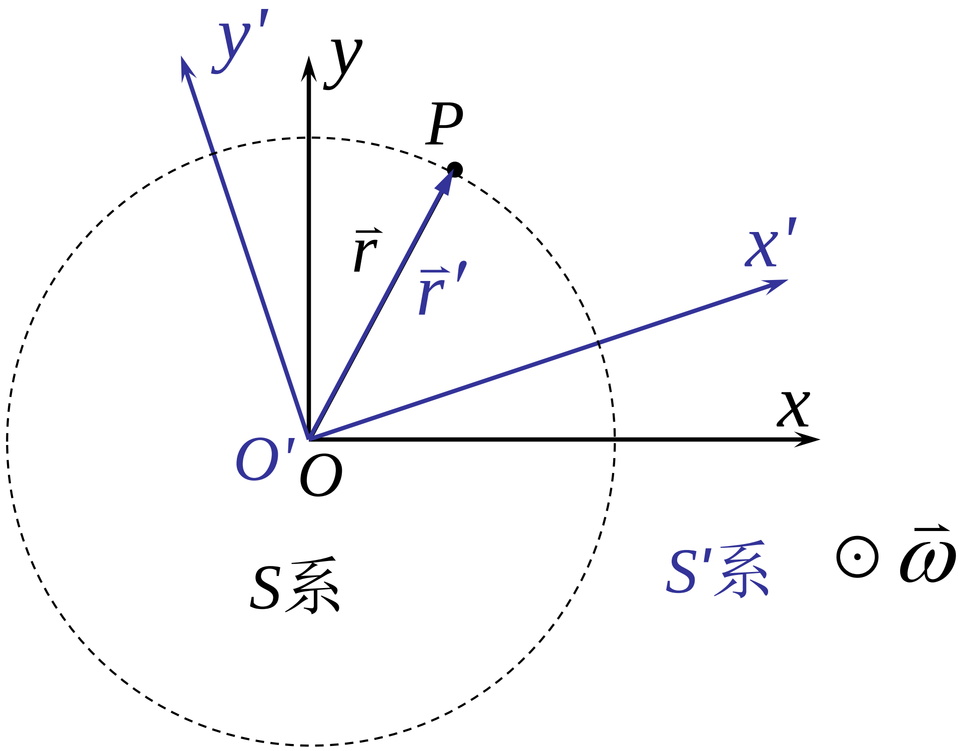
加速度 $\begin{cases} \vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} \\ \vec{a}' = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' \end{cases}$



质点P相对S'系静止，相对S系作匀速圆周运动。

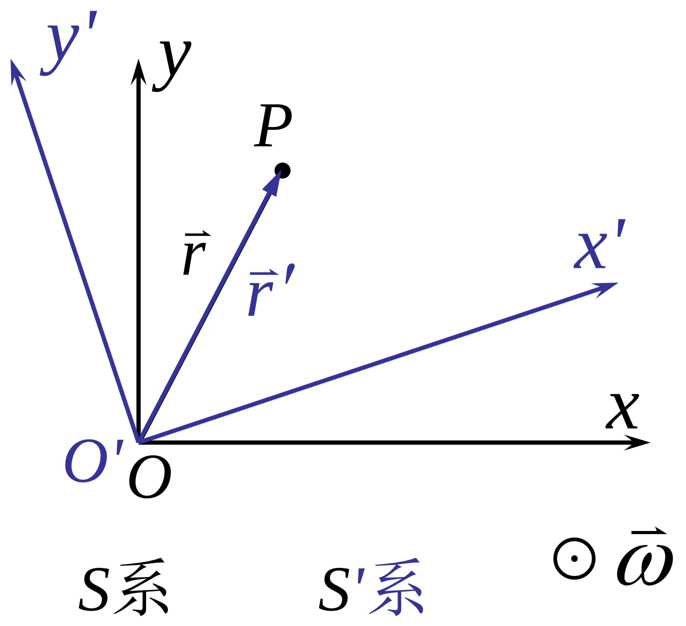
在S'系
质点P的速度、加速度皆为零

在S系
质点P的速度为$r\omega$，沿切向。
加速度为$r\omega^2$，指向原点。



若质点P相对S'系运动，速度、加速度的变换关系就更复杂。

坐标关系 $\begin{cases}\vec{r}=\vec{r}\,' \\ x\vec{i}+y\vec{j}=x'\vec{i}\,'+y'\vec{j}\,'\end{cases}$



相对S系，它自己的基矢是静止不变的；
但S'的基矢由于转动是随时间变化的。

$$\dot{\vec{i}}\,'=\frac{d\vec{i}\,'}{dt}=\frac{d\theta\vec{j}\,'}{dt}=\omega\vec{j}\,'=\vec{\omega}\times\vec{i}\,'$$

$$\dot{\vec{j}}\,'=-\omega\vec{i}\,'=\vec{\omega}\times\vec{j}\,'$$

$$\vec{v}=\dot{\vec{r}}=\dot{\vec{r}}\,'=\frac{d(x'\vec{i}\,')}{dt}+\frac{d(y'\vec{j}\,')}{dt}=\vec{v}\,'+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'$$

$$\boxed{\vec{v}=\vec{v}\,'+\vec{\omega}\times\vec{r}\,'}$$

加速度的变换

$$\vec{v}=\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{r}'=\dot{x}'\vec{i}'+\dot{y}'\vec{j}'+\omega x'\vec{j}'-\omega y'\vec{i}'$$

$$\begin{aligned}\vec{a}&=\ddot{x}'\vec{i}'+\ddot{y}'\vec{j}'+\dot{x}'\vec{\omega}\times\vec{i}'+\dot{y}'\vec{\omega}\times\vec{j}'\\&\quad+\omega\dot{x}'\vec{j}'-\omega\dot{y}'\vec{i}'+\omega x'\vec{\omega}\times\vec{j}'-\omega y'\vec{\omega}\times\vec{i}'\\&=\vec{a}'+\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{\omega}\times\left(\omega x'\vec{j}'-\omega y'\vec{i}'\right)\\&=\vec{a}'+2\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)\end{aligned}$$

$$\vec{a}=\vec{a}'+2\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$$

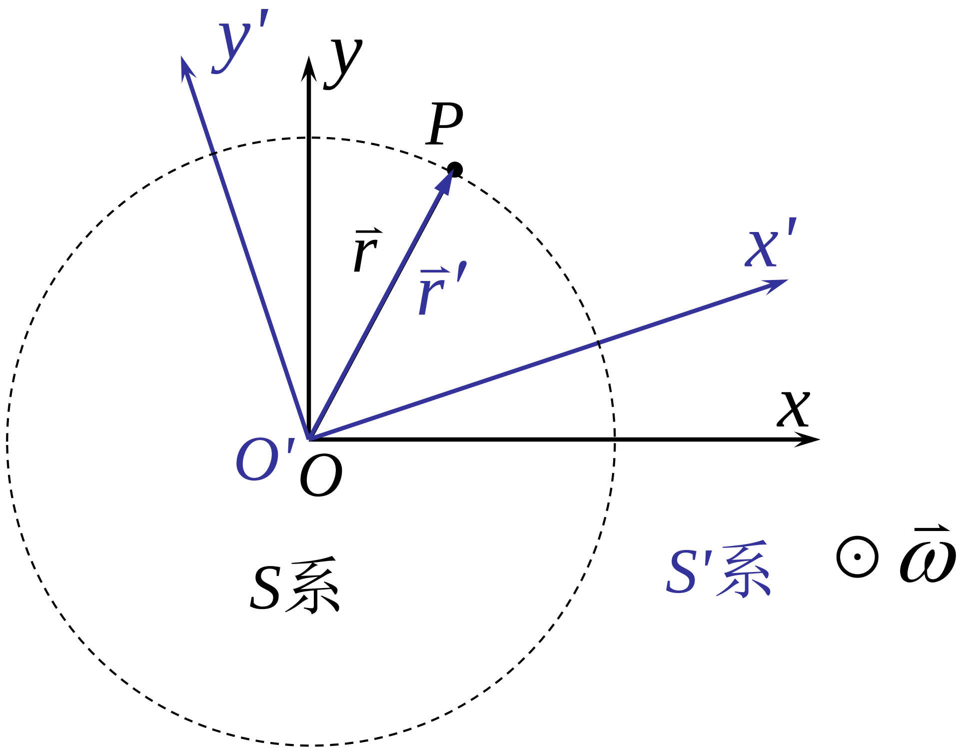
非匀速转动 $\vec{a}=\vec{a}'+2\vec{\omega}\times\vec{v}'+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')+\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}'$

质点P相对S'系静止，相对S系作匀速圆周运动。

在S'系

质点P的速度、加速度皆为零

$$\begin{cases} \vec{v}' = 0 \\ \vec{a}' = 0 \end{cases}$$



在S系

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

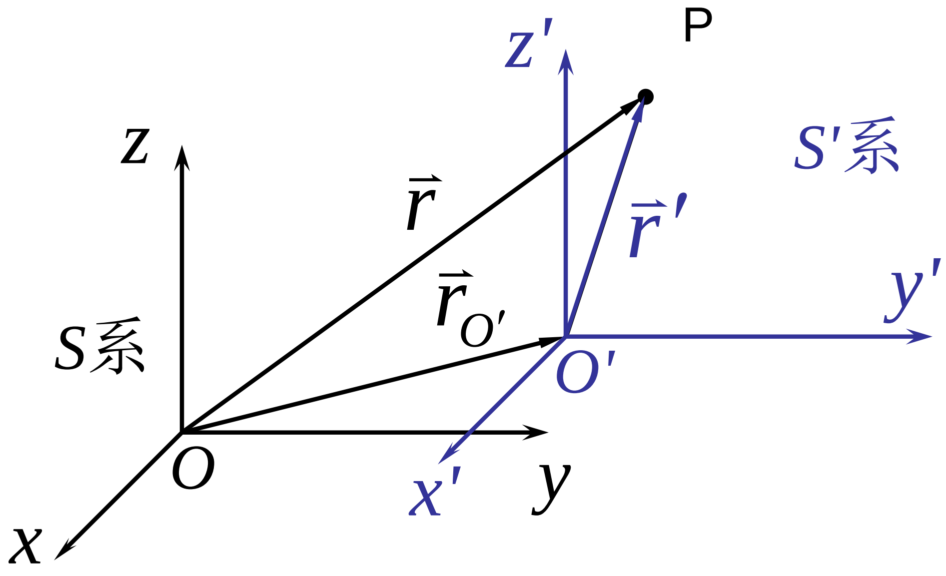
$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

速度、加速度的大小和方向与质点P在S系中作匀速圆周运动一致

1.5.3 任意运动的参考系

矢量三角： $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_{O'}(t)$

位置的矢量三角关系是参考系变换的最基本关系



位置： $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{r}_{O'}(t)$

速度： $\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$

加速度： $\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \vec{a}' + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$

1.5.2 参考系中质点间的相对运动

质点不能作为参考物，不能建立相应的参考空间和参考系

在参考系S中，质点*B* 相对质点*A*的运动

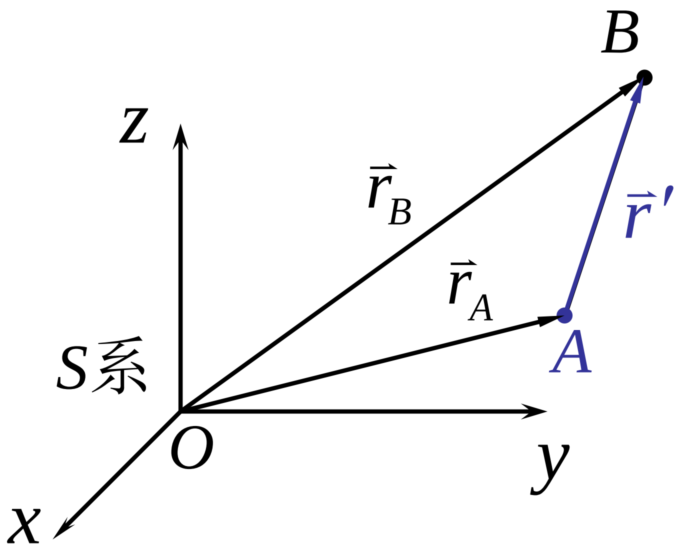
在参考系S中，可分别测量质点A的运动、质点B的运动。

B相对A的运动

$$\begin{cases}\vec{r}\,' = \vec{r}_B - \vec{r}_A \\ \vec{v}\,' = \vec{v}_B - \vec{v}_A \\ \vec{a}\,' = \vec{a}_B - \vec{a}_A\end{cases}$$

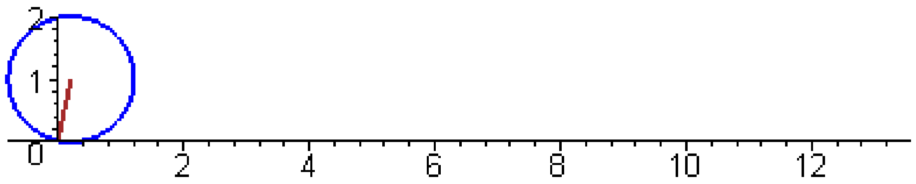
或

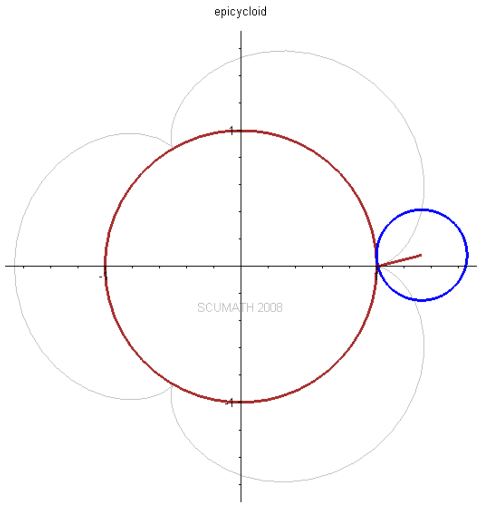
$$\begin{cases}\vec{r}_B = \vec{r}\,' + \vec{r}_A \\ \vec{v}_B = \vec{v}\,' + \vec{v}_A \\ \vec{a}_B = \vec{a}\,' + \vec{a}_A\end{cases}$$



*B*点相对*S*系的运动 = *B*点相对*A*点的运动 +*A*点相对*S*系的运动

*B*的运动 = *B*相对*A*的运动 +*A*的运动


2
1
0
2
4
6
8
10
12


epicycloid
SCUMATH 2008

力学三大约束之刚性杆约束

约束

两点间距不变　　相对运动是圆周（球面）运动

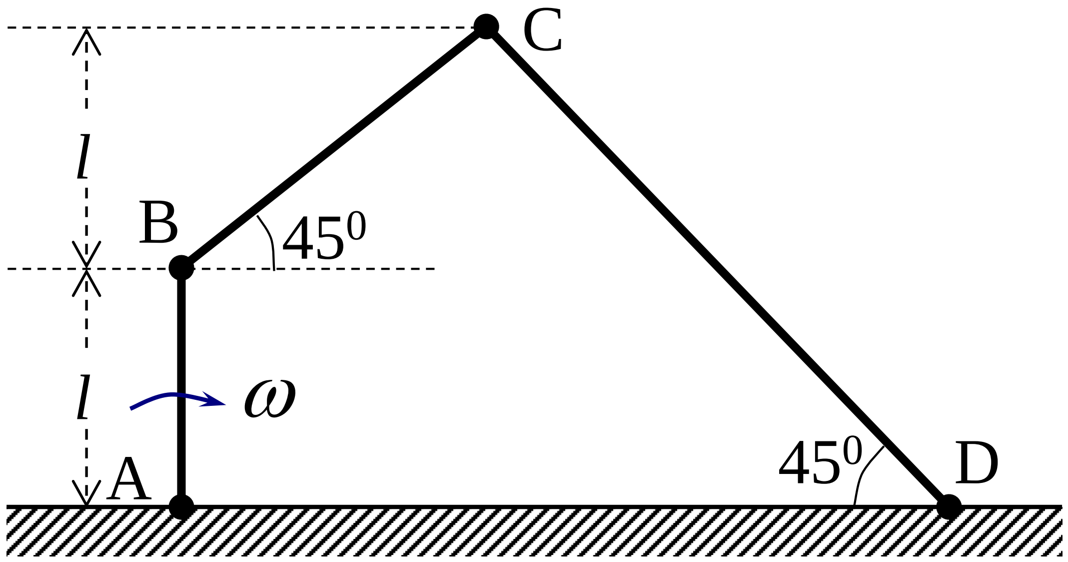
速度

两点速度沿杆方向分量相等　　相对速度方向与杆垂直

加速度

法向加速度 $\frac{v^2}{\rho}$　　切向加速度

例 三根细杆在一平面内相连，并可绕连接处转动。A、D是两个转轴。当AB杆以匀角速度转到竖直位置时，求此时C点加速度的大小和方向。



解法一

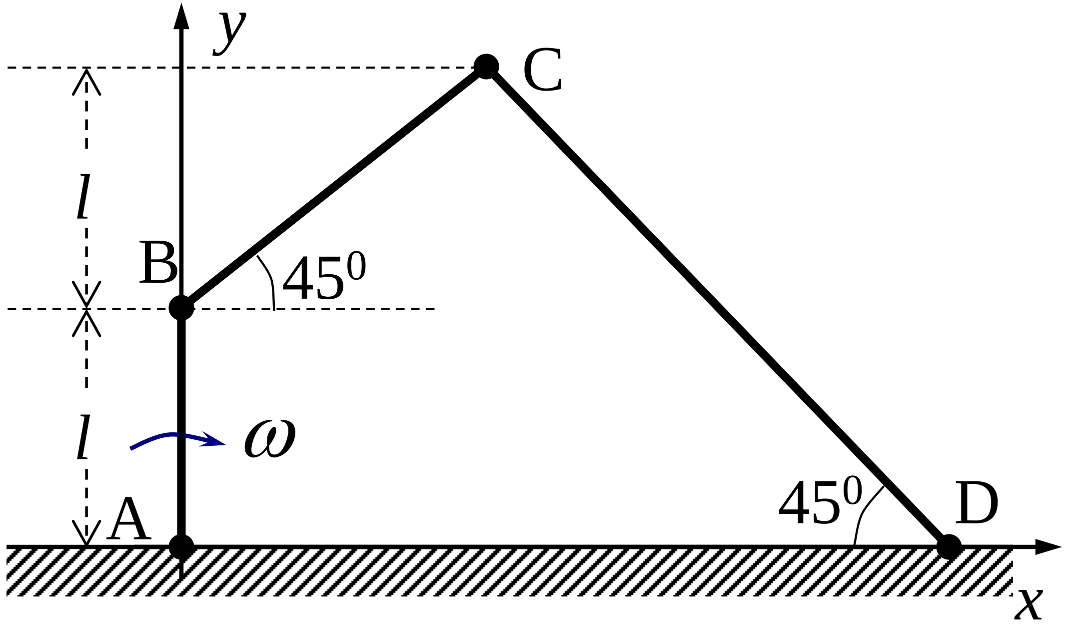
已知B点的速度和加速度

C点作圆周运动，有法向和切向加速度。

由约束关系：B、C两点沿杆的速度分量相等，得到C点速度。

C点相对B点加速度沿BC杆的分量：C相对B作圆周运动。

解法二



建立直角坐标系

用三个角度和杆长表示C点坐标

C点坐标对时间的二阶导数即C点的加速度

三个角度满足约束关系，由此可得它们的一阶、二阶导数的关系

相对D点的答案： 法向加速度 $a_{Cn}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}\omega^2 l$

切向加速度 $a_{Ct}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\omega^2 l$

与CD夹角 $\theta=\arctan 6$

小结

参考物 ⇨ 参考系 ⇨ 坐标系

物体相对参考系的运动（位置、速度和加速度）是确定的

在不同的坐标系中，位置、速度、加速度的表示

相对运动：对于不同参考系，质点的位置、速度、加速度的变换关系
对同一个观测者，不同物体之间的相对运动