

# Landau equation and QCD sum rules for the tetraquark molecular states

王志刚

华北电力大学物理系

保定 071003

[zgwang@aliyun.com](mailto:zgwang@aliyun.com)

# 报告提纲

- 引言
- 为什么 QCD 求和规则做四夸克分子态可信
- 具体两个例子
- 总结和展望

# 1 引言

自2003年，Belle合作组在  $B \rightarrow XK$ ,  $X(3872) \rightarrow J/\psi\pi^+\pi^-$  衰变中发现  $X(3872)$  以来，世界各大合作组陆续发现了许多类粲介子。

粗略地说，对现有的类粲介子大概有五种解释：

1. 紧致四夸克态 ✓
2. 松散分子态 ✓
3. 阈值效应，散射效应，Cusp效应
4. 混杂态 ✓
5. 强子粲偶素 ✓ .

如果把类粲偶素看做四夸克态或四夸克分子态，可以用QCD求和规则计算其质量和衰变宽度，目前有大量成功的计算

目前世界上主要有如下几个研究组，

S.Narison, M. Nielsen

S.L.Zhu, H.X.Chen, W.Chen

M.Q.Huang, J.R.Zhang

C.F.Qiao, L.Tang

T.M.Aliev, K.Azizi

T.Huang, **Z.G.Wang**

如果做菲兹变换，可以把双夸克-反双夸克型的四夸克流变换成色单态-色单态型或介子-介子型的四夸克流：举例， $J^{PC} = 1^{+-}$ 轴矢四夸克流

$$\begin{aligned}
 J_\mu &= \frac{\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn}}{\sqrt{2}} \left\{ u_j^T C \gamma_5 c_k \bar{d}_m \gamma_\mu C \bar{c}_n^T - u_j^T C \gamma_\mu c_k \bar{d}_m \gamma_5 C \bar{c}_n^T \right\}, \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ i\bar{c}i\gamma_5 c \bar{d}\gamma_\mu u - i\bar{c}\gamma_\mu c \bar{d}i\gamma_5 u + \bar{c}u \bar{d}\gamma_\mu \gamma_5 c - \bar{c}\gamma_\mu \gamma_5 u \bar{d}c \right. \\
 &\quad \left. - i\bar{c}\gamma^\nu \gamma_5 c \bar{d}\sigma_{\mu\nu} u + i\bar{c}\sigma_{\mu\nu} c \bar{d}\gamma^\nu \gamma_5 u - i\bar{c}\sigma_{\mu\nu} \gamma_5 u \bar{d}\gamma^\nu c + i\bar{c}\gamma^\nu u \bar{d}\sigma_{\mu\nu} \gamma_5 c \right\}, \quad (1)
 \end{aligned}$$

where the  $i, j, k, m, n$  are color indices.

双夸克-反双夸克型的四夸克流与四夸克态耦合

色单态-色单态型的四夸克流与分子态耦合

如果QCD求和规则做四夸克态可信，那么做分子态也可信，反之亦然

QCD求和规则，首先要做算符乘积展开。真空凝聚是夸克胶子算符的真空期望值，到目前为止，人们做XYZ粒子，算符乘积展开计算到 $\mathcal{O}(\alpha_s)$ 阶，如果我们把强耦合常数吸收到真空凝聚里面，那么，计算到 $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$ 阶，也就是说，没有计算微扰修正。

2019年，W.Lucha, D.Melikhov, H.Sazdjian 在

Phys. Rev. **D100** (2019) 014010; Phys. Rev. **D100** (2019) 074029 中  
亮明观点：

对于色单态-色单态型的四夸克流，算符乘积展开计算到 $\mathcal{O}(\alpha_s^k)$ 阶， $k \leq 1$ ，费曼图在颜色空间可因子化，完全被介子-介子散射态贡献抵消，对分子态没有贡献。算符乘积展开计算到 $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ 阶，不可因子化的费曼图如果有朗道奇点，则开始对分子态有贡献；可因子化的费曼图依然对分子态没有贡献。

**如果按照这个标准，目前所有QCD求和规则的计算都是错误的。**

## 2 为什么 QCD 求和规则做四夸克分子态可信

- 介子-介子散射态与四夸克分子态都有四个价夸克，这四个价夸克可因子化为两个色单态的集团，我们不能仅凭两个色单态的集团，就断言可因子化的费曼图只对介子-介子散射态有贡献。

- 夸克胶子是色禁闭物体，不在质壳上，不能断言朗道方程对于夸克胶子束缚态的计算适用。如果我们坚持用朗道方程，那么我们就应该协调地应用极点质量，对于传统的粲偶素和美偶素，我们取粒子表中极点质量，朗道奇点出现在

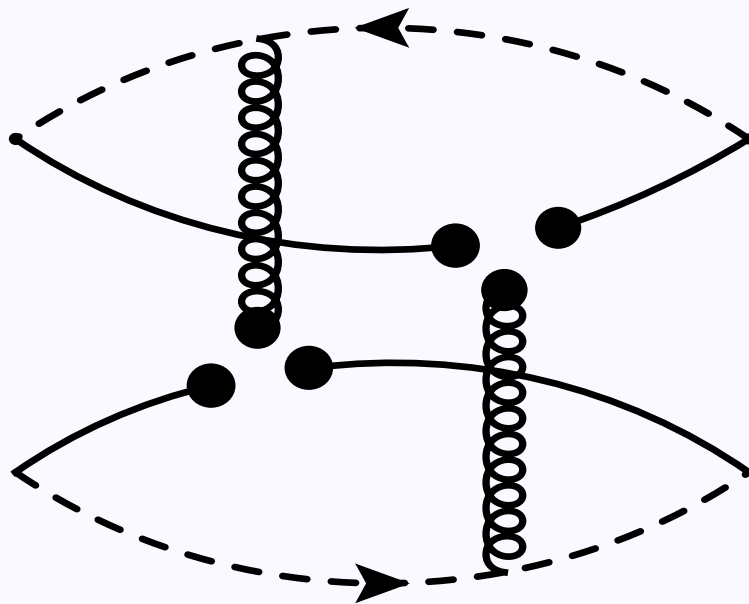
$$\sqrt{s} = \sqrt{p^2} = 2\hat{m}_c = 3.34 \pm 0.14 \text{ GeV} > m_{\eta_c} \text{ and } m_{J/\psi};$$

$$\sqrt{s} = \sqrt{p^2} = 2\hat{m}_b = 9.56 \pm 0.12 \text{ GeV} > m_{\eta_b} \text{ and } m_{\Upsilon}.$$

这显然是有问题。

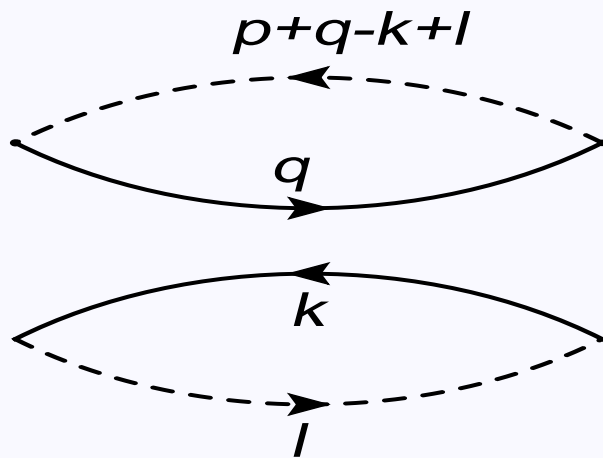
- 如果不可因子化费曼图有朗道奇点，则对四夸克分子态有贡献，那么贡献开始在  $\mathcal{O}(\alpha_s^0/\alpha_s^1)$  阶，而不是  $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$  阶，见下面对真空凝聚  $\bar{q}q_g G q \bar{q} q_g G q$  有贡献的费曼图。

这个费曼图显然在颜色空间不可因子化，如果强行应用朗道方程，可以得到s道奇点， $\sqrt{s} = \sqrt{p^2} = 2\hat{m}_c$





- 朗道方程是运动学方程，独立于颜色空间中的可因子化与不可因子化，如果不事先排除颜色空间可因子化费曼图的贡献，即使在最低阶，强行应用朗道方程，依然会得到朗道奇点。在动量空间，根本就不可因子化。



这种费曼图，积分一般可以化为这种形式，

$$\int d^4q d^4k d^4l \frac{1}{(p+q-k+l)^2 - m_c^2} \frac{1}{q^2 - m_q^2} \frac{1}{k^2 - m_q^2} \frac{1}{l^2 - m_c^2}. \quad (2)$$

有 s 道朗道奇点  $s = p^2 = (\hat{m}_u + \hat{m}_d + \hat{m}_c + \hat{m}_c)^2$ 。事先排除这些图的贡献，**选择性地应用朗道方程根本就不对。**

关于朗道方程，可以参考文献

F.K. Guo, X.H. Liu, S. Sakai, Prog.Part.Nucl.Phys. 112 (2020) 103757.

● Lucha, Melikhov and Sazdjian只是得到了形式上的QCD求和规则，没有任何具体计算表明“只取 $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ 阶贡献可以得到可行的QCD求和规则”。

● 在做算符乘积展开时，我们取深度欧氏空间 $P^2 = -p^2 \rightarrow \infty$ 或者 $\gg \Lambda_{QCD}^2$ ，然后通过色散关系得到物理谱密度。朗道奇异性要求 $p^2 = (\hat{m}_u + \hat{m}_d + \hat{m}_c + \hat{m}_c)^2$ ，在这个量级，算符乘积展开不可行。

上述观点见：Z.G.Wang, Phys.Rev.D101 (2020) 074011 [arXiv:2001.04095]

### 3 具体两个例子

In the following, we write down the two-point correlation functions  $\Pi_{\mu\nu}(p)$  and  $\Pi_{\mu\nu\alpha\beta}(p)$  in the QCD sum rules,

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = i \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T \{ J_\mu(x) J_\nu^\dagger(0) \} | 0 \rangle, \quad (3)$$

$$\Pi_{\mu\nu\alpha\beta}(p) = i \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | T \{ J_{\mu\nu}(x) J_{\alpha\beta}^\dagger(0) \} | 0 \rangle, \quad (4)$$

where

$$J_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \bar{u}(x) i \gamma_5 c(x) \bar{c}(x) \gamma_\mu d(x) + \bar{u}(x) \gamma_\mu c(x) \bar{c}(x) i \gamma_5 d(x) \right], \quad (5)$$

$$J_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \bar{s}(x) \gamma_\mu c(x) \bar{c}(x) \gamma_\nu \gamma_5 s(x) - \bar{s}(x) \gamma_\nu \gamma_5 c(x) \bar{c}(x) \gamma_\mu s(x) \right]. \quad (6)$$

强子谱表示,

$$\Pi_{\mu\nu}(p) = \Pi(p^2) \left( -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) + \dots, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu\alpha\beta}(p) = & \Pi_-(p^2) \left( g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\mu\alpha} \frac{p_\nu p_\beta}{p^2} - g_{\nu\beta} \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2} + g_{\mu\beta} \frac{p_\nu p_\alpha}{p^2} + g_{\nu\alpha} \frac{p_\mu p_\beta}{p^2} \right) \\ & + \Pi_+(p^2) \left( -g_{\mu\alpha} \frac{p_\nu p_\beta}{p^2} - g_{\nu\beta} \frac{p_\mu p_\alpha}{p^2} + g_{\mu\beta} \frac{p_\nu p_\alpha}{p^2} + g_{\nu\alpha} \frac{p_\mu p_\beta}{p^2} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

where

$$\begin{aligned} \Pi(p^2) &= \frac{\lambda_Z^2}{M_Z^2 - p^2} + \Pi_{TW}(p^2) + \dots, \\ \Pi_-(p^2) &= \frac{\lambda_{X^-}^2}{M_{X^-}^2 - p^2} + \Pi_{TW}^-(p^2) + \dots, \\ \Pi_+(p^2) &= \frac{\lambda_{X^+}^2}{M_{X^+}^2 - p^2} + \dots, \end{aligned} \quad (9)$$

我们研究 $\Pi(p^2)$ 和 $\Pi_-(p^2)$ , 分别对应 $J^{PC} = 1^{+-}$ 与 $1^{-+}$ 四夸克分子态或介子-介子散射态。详细计算见: Z.G.Wang, Phys.Rev.D101 (2020) 074011 [arXiv:2001.04095]。

# 用散射态满足QCD求和规则

$$\Pi_{TW}(T^2) = \kappa \int_{4m_c^2}^{s_0} ds \rho_{Z,QCD}(s) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right), \quad (10)$$

$$\Pi_{TW}^-(T^2) = \kappa \int_{4m_c^2}^{s_0} ds \rho_{X,QCD}(s) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right), \quad (11)$$

$$-\frac{d\Pi_{TW}(T^2)}{d(1/T^2)} = -\kappa \frac{d}{d(1/T^2)} \int_{4m_c^2}^{s_0} ds \rho_{Z,QCD}(s) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right), \quad (12)$$

$$-\frac{d\Pi_{TW}^-(T^2)}{d(1/T^2)} = -\kappa \frac{d}{d(1/T^2)} \int_{4m_c^2}^{s_0} ds \rho_{X,QCD}(s) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right). \quad (13)$$

引进参数 $\kappa$ ,  $\kappa$  偏离1, 标志着散射态不能满足求和规则。

- 数值结果如下，此外，没有布莱尔平台

$J^{PC}$	$T^2(\text{GeV}^2)$	$\sqrt{s_0}(\text{GeV})$	$\mu(\text{GeV})$	pole	$\kappa_{\text{I}}$	$\kappa_{\text{II}}$
$1^{+-} (\bar{u}c\bar{c}d)$	2.7 – 3.1	$4.40 \pm 0.10$	1.3	(40 – 63)%	$1.55 \pm 0.40$	$1.37 \pm 0.40$
$1^{-+} (\bar{s}c\bar{c}s)$	3.7 – 4.1	$5.15 \pm 0.10$	2.9	(42 – 60)%	$0.50 \pm 0.09$	$0.46 \pm 0.09$

下标 I(II) 代表 QCD 求和规则从方程 12、13(10,11) 获得。

散射态不能满足求和规则。

# 用分子态满足QCD求和规则

$$\lambda_Z^2 \exp\left(-\frac{M_Z^2}{T^2}\right) = \int_{4m_c^2}^{s_0} ds \rho_{Z,QCD}(s) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right), \quad (14)$$

$$\lambda_X^2 \exp\left(-\frac{M_X^2}{T^2}\right) = \int_{4m_c^2}^{s_0} ds \rho_{X,QCD}(s) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right). \quad (15)$$

$$M_Z^2 = \frac{-\frac{d}{d(1/T^2)} \int_{4m_c^2}^{s_0} ds \rho_{Z,QCD}(s) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right)}{\int_{4m_c^2}^{s_0} ds \rho_{Z,QCD}(s) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right)}, \quad (16)$$

$$M_X^2 = \frac{-\frac{d}{d(1/T^2)} \int_{4m_c^2}^{s_0} ds \rho_{X,QCD}(s) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right)}{\int_{4m_c^2}^{s_0} ds \rho_{X,QCD}(s) \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right)}. \quad (17)$$



● 数值结果如下，出现很好的布莱尔平台

$J^{PC}$	$T^2(\text{GeV}^2)$	$\sqrt{s_0}(\text{GeV})$	$\mu(\text{GeV})$	pole	$M(\text{GeV})$	$\lambda(10^{-2}\text{GeV}^5)$
$1^{+-}(\bar{u}c\bar{c}d)$	2.7 – 3.1	$4.40 \pm 0.10$	1.3	(40 – 63)%	$3.89 \pm 0.09$	$1.72 \pm 0.30$
$1^{-+}(\bar{s}c\bar{c}s)$	3.7 – 4.1	$5.15 \pm 0.10$	2.9	(42 – 60)%	$4.67 \pm 0.08$	$6.87 \pm 0.84$

分子态能满足求和规则。在分子态基础上，加入分子态的宽度，可以把散射态效应包括进来，修正极点留数，不影响分子态质量。 $1^{-+}(\bar{s}c\bar{c}s)$ 与LHCb发现的 $X(4630)$ 符合非常好。

更深层的原因，我们在QCD求和规则中，用定域四夸克流，而传统介子有一定的尺度，比如：

$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.41 \text{ fm}$  (0.42 fm) for the  $J/\psi$ ,  $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = 0.63 \text{ fm}$  for the  $\phi(1020)$ .

Tetraquark states have the average spatial sizes  $\langle r \rangle = 0.5 \sim 0.7 \text{ fm}$ .

The  $J/\psi$ ,  $\phi(1020)$ ,  $X(4140)$  and  $X(4685)$  have average spatial sizes of the same order, the couplings to the continuum states  $J/\psi\phi$  et al can be neglected, as the overlappings of the wave-functions are small enough.

## 4 总结和展望

- 下面的断言是完全错误的：

对于色单态-色单态型的四夸克流，算符乘积展开计算到 $\mathcal{O}(\alpha_s^k)$ 阶， $k \leq 1$ ，费曼图在颜色空间可因子化，完全被两介子散射态贡献抵消，对分子态没有贡献。算符乘积展开计算到 $\mathcal{O}(\alpha_s^2)$ 阶，不可因子化的费曼图如果有朗道奇点，则开始对分子态有贡献。

- 其错误的根源在于选择性地应用朗道方程。

- 目前，QCD求和规则计算四夸克态和分子态的工作是可信的。

**谢谢大家， 欢迎批评指正！**