

# CEPC加速器平衡极化度的模拟 及自旋旋转器相关设计

夏文昊

On Behalf of CEPC Polarization Working Group  
2021年02月05日



# 平衡极化 度的模拟 计算

● 我们这里主要利用了三种算法：

1. SLIM (First-order)
2. MonteCarlo方法(Higher-order)
3. 自旋共振强度定义公式法(Higher-order)

1. 只考虑一阶自旋共振时：SLIM

我们在Bmad/PTC中，根据给定的lattice得到 $\hat{n}_0$ ,  $\frac{\partial \hat{n}}{\partial \delta}$ ，之后利用DKM公式得到平衡极化度 $P_{dk}$ ，及其他的一些重要参数。

$$P_{dk} = \frac{-\frac{8}{5\sqrt{3}} \times \oint ds \left\langle \frac{1}{|\rho(s)|^3} \hat{b} \cdot \left( \hat{n} - \frac{\partial \hat{n}}{\partial \delta} \right) \right\rangle_s}{\oint ds \left\langle \frac{1}{|\rho(s)|^3} \left( 1 - \frac{2}{9} (\hat{n} \cdot \hat{s})^2 + \frac{11}{18} \left( \frac{\partial \hat{n}}{\partial \delta} \right)^2 \right) \right\rangle_s}$$

$$\vec{P}_{bks} = -\frac{8}{5\sqrt{3}} \hat{n}_0 \frac{\oint ds \frac{\hat{n}_0(s) \cdot \hat{b}(s)}{|\rho(s)|^3}}{\oint ds \frac{[1 - \frac{2}{9} (\hat{n}_0(s) \cdot \hat{s})^2]}{|\rho(s)|^3}}$$

$$\tau_{bks}^{-1} = \frac{5\sqrt{3} r_e \gamma^5 \hbar}{8 m_e C} \oint ds \frac{[1 - \frac{2}{9} (\hat{n}_0 \cdot \hat{s})^2]}{|\rho(s)|^3}$$

## 2. 考虑高阶自旋共振时: MonteCarlo方法

✓利用Bmad/PTC,通过MC对极化束流的极化度进行追踪,可以得到 $\lambda_d$ :

$$P(t) = \exp\left(-\frac{2\pi c t}{C} \lambda_d\right)$$

✓利用以下公式,得到平衡极化度 $P_{eq}$ :

$$P_{eq} \approx \frac{P_\infty}{1 + \lambda_d/\lambda_p},$$
$$P_\infty \approx -\frac{8}{5\sqrt{3}} \frac{\oint d\theta \frac{1}{|\rho|^3} \hat{b} \cdot \hat{n}_0}{\oint d\theta \frac{1}{|\rho|^3} [1 - \frac{2}{9}(\hat{n}_0 \cdot \hat{s})^2]},$$
$$\lambda_p = \frac{5\sqrt{3} r_e \gamma^5 \hbar}{8 m_e} \frac{C}{2\pi c} \oint d\theta \left\langle \frac{1 - \frac{2}{9}(\hat{n} \cdot \hat{\beta})^2}{|\rho|^3} \right\rangle$$

其中 $P_\infty$ ,  $\lambda_p$ 可以通过SLIM得到, 分别对应于Pbks, 1/tao\_bks

### 3. 考虑高阶自旋共振时：自旋共振强度定义公式法

- ✓ 直接利用SAD相关参数，可以得到，自旋共振强度 $w_k$ ：  
Z能区  $k=103,104$ 贡献最大。

$$\omega_k = \frac{v}{2\pi} \int_0^{2\pi} y''_0 e^{-iv\phi} d\theta$$

- ✓ 平衡极化度  $P_{eq} = G * P_{bks}$ , 其中G的表达式为：

$$G \approx \left\{ 1 + \frac{11v^2}{18} \sum_{k,l} \frac{|w_k|^2 I_l(\sigma_v^2 / v_\gamma^2) \exp(-\sigma_v^2 / v_\gamma^2)}{[(|v-k| - l v_\gamma)^2 - v_\gamma^2]^2} \right\}^{-1}$$

$l$ : order of sideband resonance;

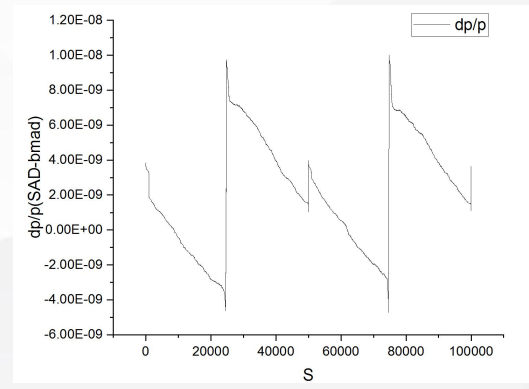
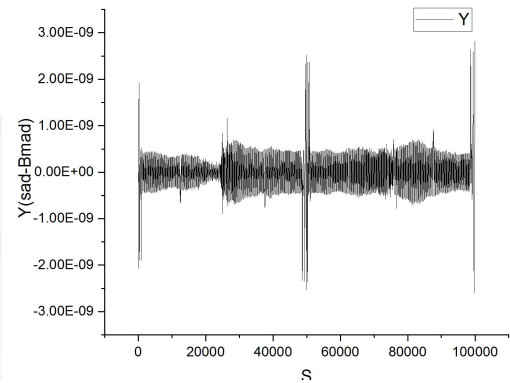
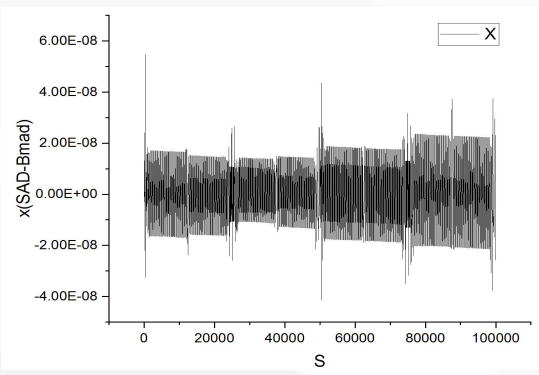
$I_l$ : modified Bessel function,  $v_\gamma = 0.028$  for CEPC Z-mode.

$\delta v$ : 自旋能散  $\delta v = nu(\text{自旋工作点}) \times \delta e$  相对能散

● 实际误差矫正的CEPC lattice的平衡极化度:

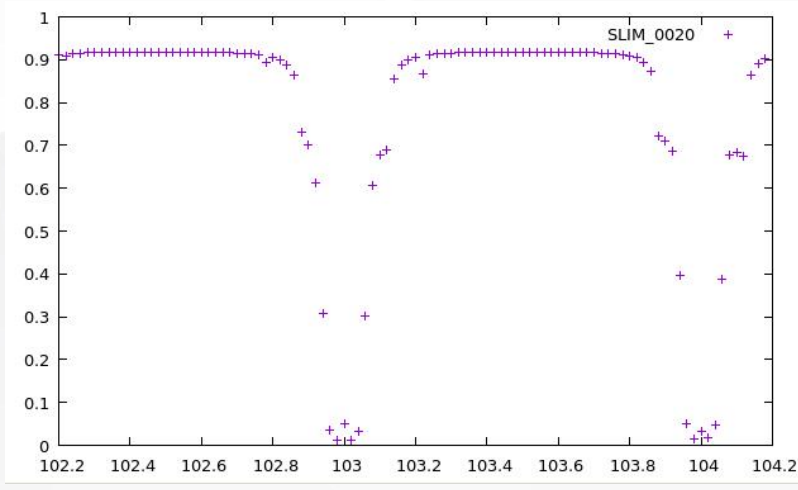
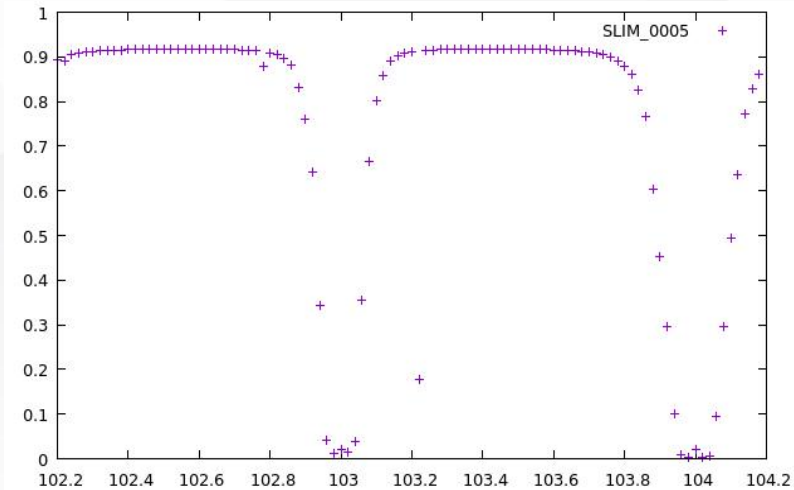
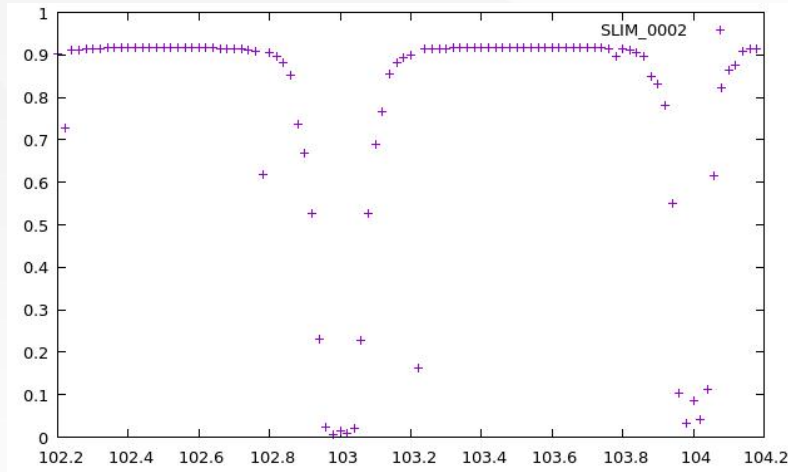
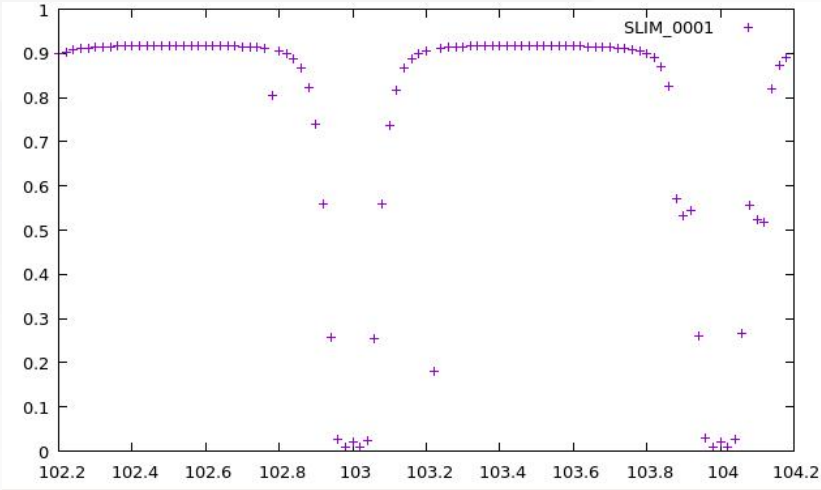
- ✓ 20个不同的随机种子误差矫正CEPC lattice, 120GeV, sad 格式 (from 王斌)  
最终聚焦段准直误差: 50微米; 其他地方: 100微米。
- ✓ SAD: 120GeV->45.5GeV, 高频接受度1.7%, 关掉高频区下游高频腔
- ✓ SAD to Bmad.

SAD和Bmad 的对比



|          | EMITX[m]  | EMITY[m]  | EMITZ[m] | $\nu_x$ | $\nu_y$ | $\nu_z$ |
|----------|-----------|-----------|----------|---------|---------|---------|
| SAD      | 1.755E-10 | 2.473E-15 | 8.885E-7 | 0.109   | 0.216   | -0.028  |
| Bmad/PTC | 1.753E-10 | 2.513E-15 | 8.885E-7 | 0.109   | 0.216   | -0.028  |

- **SLIM:实际误差修正的CEPC lattice的平衡极化度**  
我们对多个随机种子都进行了计算，平衡极化度的分布基本相同。

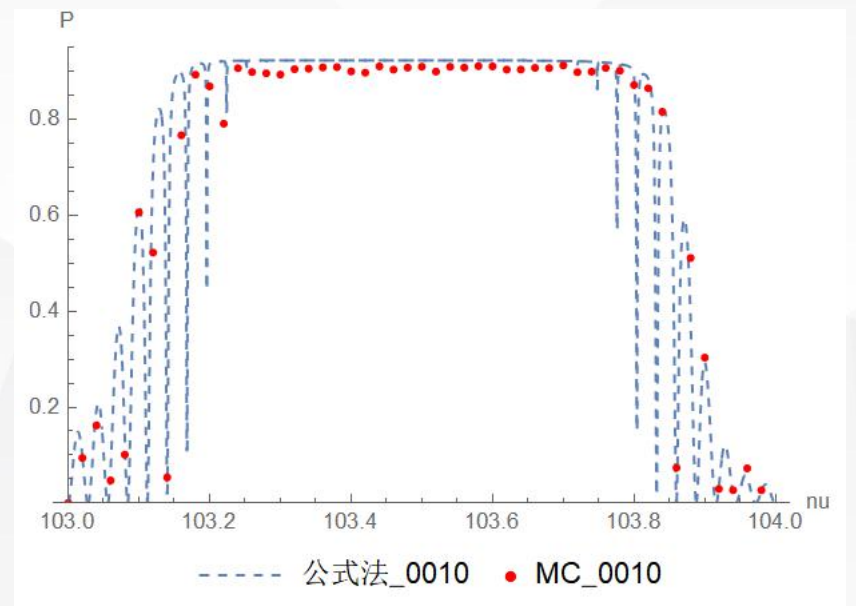
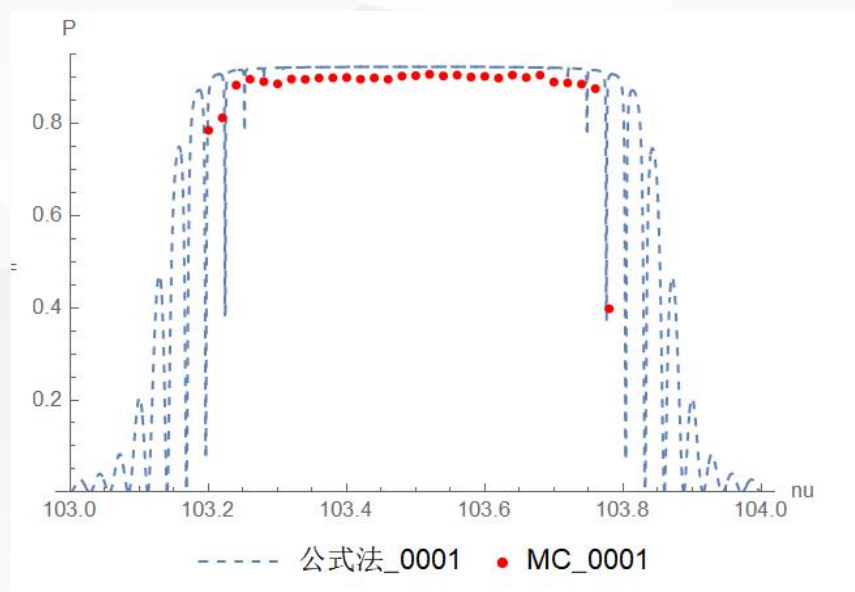


● MonteCarlo方法和自旋共振强度定义公式:

表 1-1 整数自旋谐波振幅 $w_k$ 的计算及相关参数

|           | 同步工作点 $Q_s$ | 相对能散 $\frac{\sigma_E}{E}$ | 方法一 $w_k$   |
|-----------|-------------|---------------------------|---|
| CEPC_0001 | 0.028       | $3.75855E - 4$            | $ w_{103} ^2 = 2.709E - 9$<br>$ w_{104} ^2 = 2.652E - 9$  |
| CEPC_0010 | 0.028       | $3.58604E - 4$            | $ w_{103} ^2 = 4.194E - 10$<br>$ w_{104} ^2 = 1.805E - 9$ |

MC结果与公式法结果基本吻合。



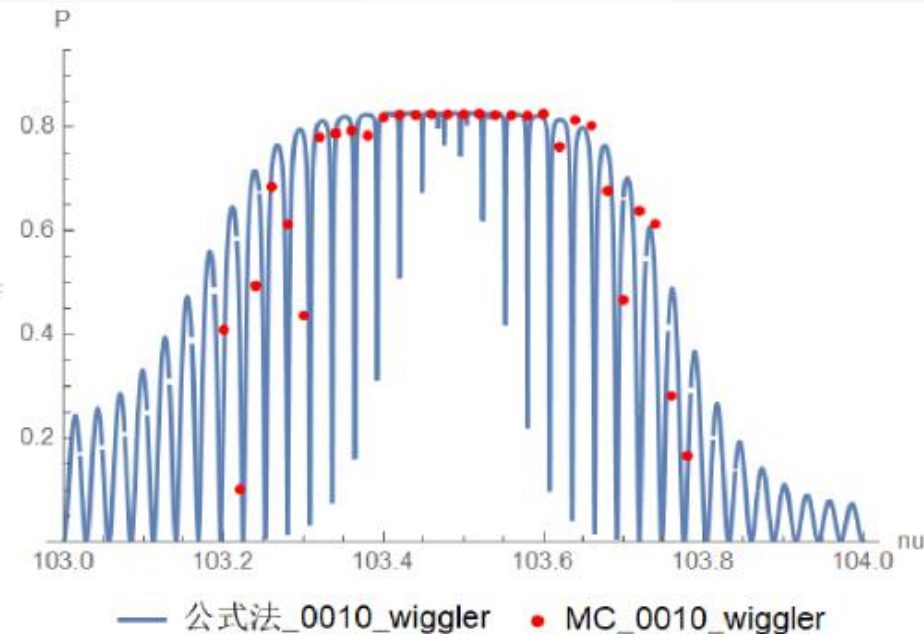
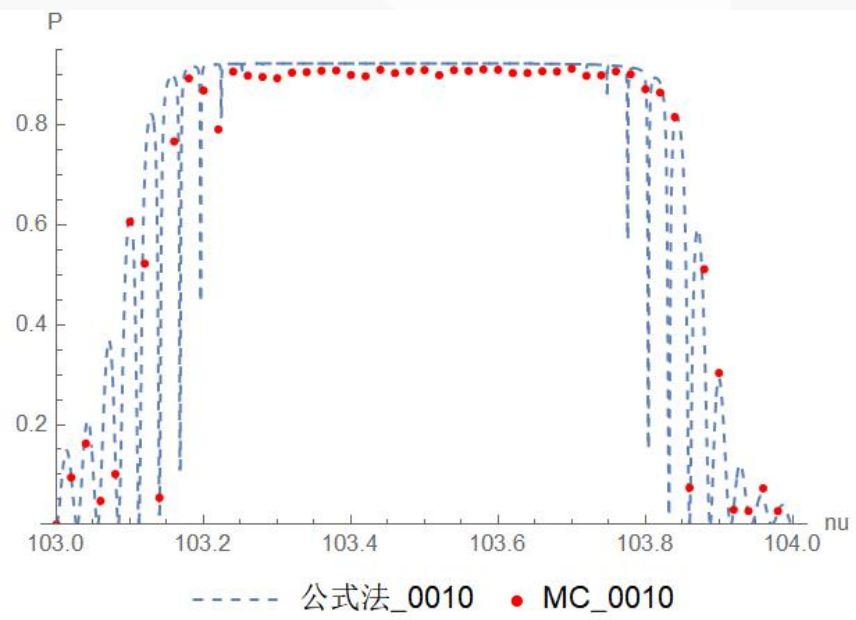


● Wiggler对平衡极化度的影响:

表 1-2 CEPC Z 能区分对称扭摆器的相关参数

| $B_+$ | $L_+$ | $B_-$ | $L_-$ | $\tau_p(h)$ | $U_0(\text{MeV})$ | 相对能散 $\frac{\sigma_E}{E}$ | $P_{max}$ | $ w_{103} ^2$ | $ w_{104} ^2$ |
|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------------|---------------------------|-----------|---------------|---------------|
| 0.6T  | 1m    | 0.15T | 2m    | 19.6h       | 44                | 9.5E-4                    | 0.828     | 4.20E-10      | 1.81E-9       |

相对能散增加， $U_0$ 增加，自极化时间缩短。

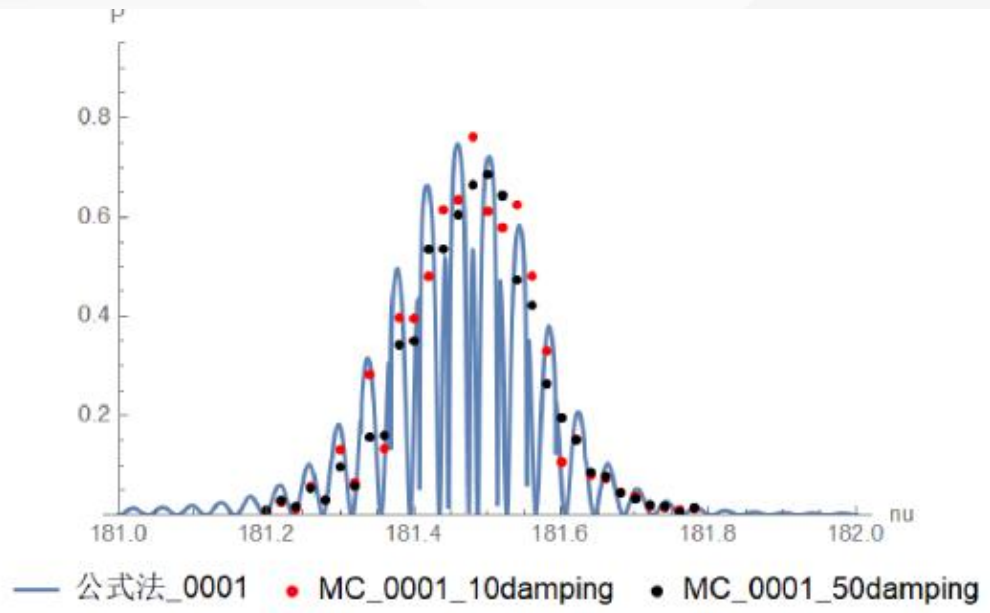
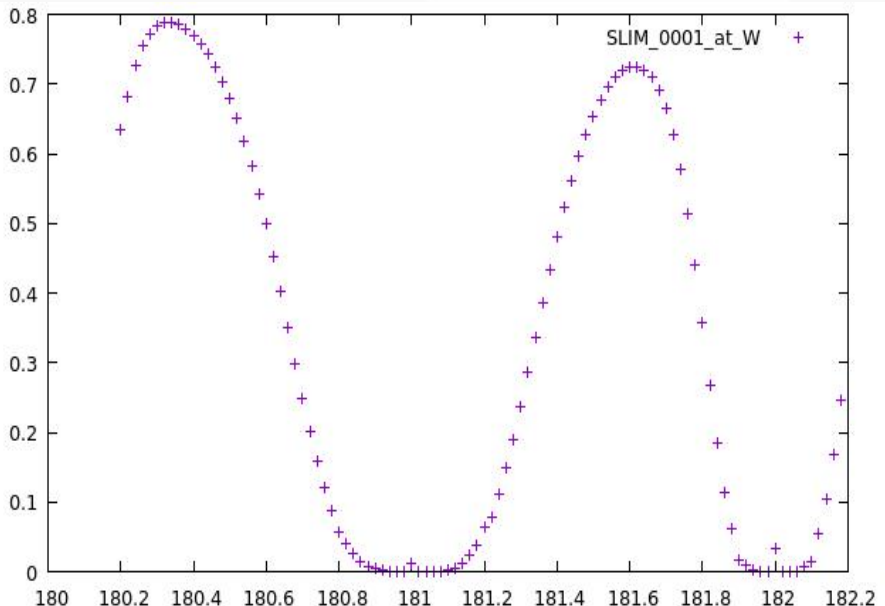


● W能区的平衡极化度:

表 1-4 W 能区,整数自旋谐波振幅 $w_k$ 的计算及相关参数

|           | 同步工作点 $Q_s$ | 相对能散 $\frac{\sigma_E}{E}$ | $w_k$  |
|-----------|-------------|---------------------------|--|
| CEPC_0001 | 0.0395      | $6.60775E - 4$            | $ w_{181} ^2 = 1.287E - 8$<br>$ w_{182} ^2 = 5.198E - 8$ |

W能区平衡极化度小于Z能区





# 自旋旋转 器的相关 设计

- CEPC Z能区纵向极化方案:

- 纵向极化束流对撞:

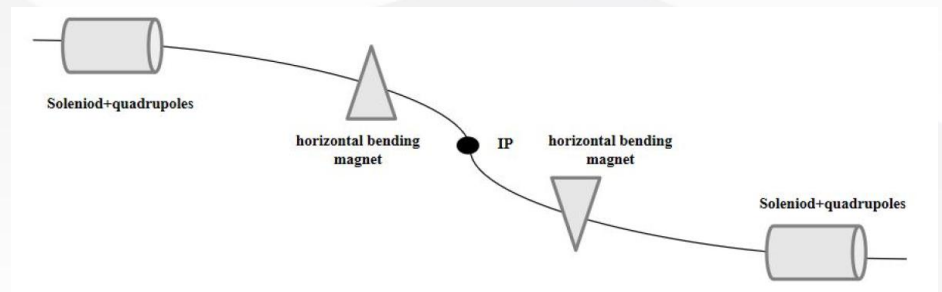
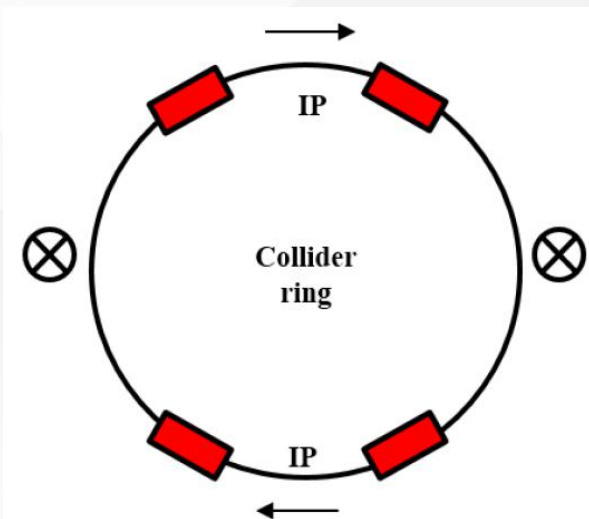
- ✓ 自旋旋转器:

自旋旋转器可以将极化方向从横向旋转为纵向，经过IP之后，再将极化方向旋转回来。

基于螺线管的自旋旋转器:

① 螺线管区域:  $\int B_{sol} dl \cong 30m \times 8T$

② 偏转磁铁区域: 水平偏转角度0.015rad



➤ 螺线管区域:

I. x-y 解耦合结构单元。

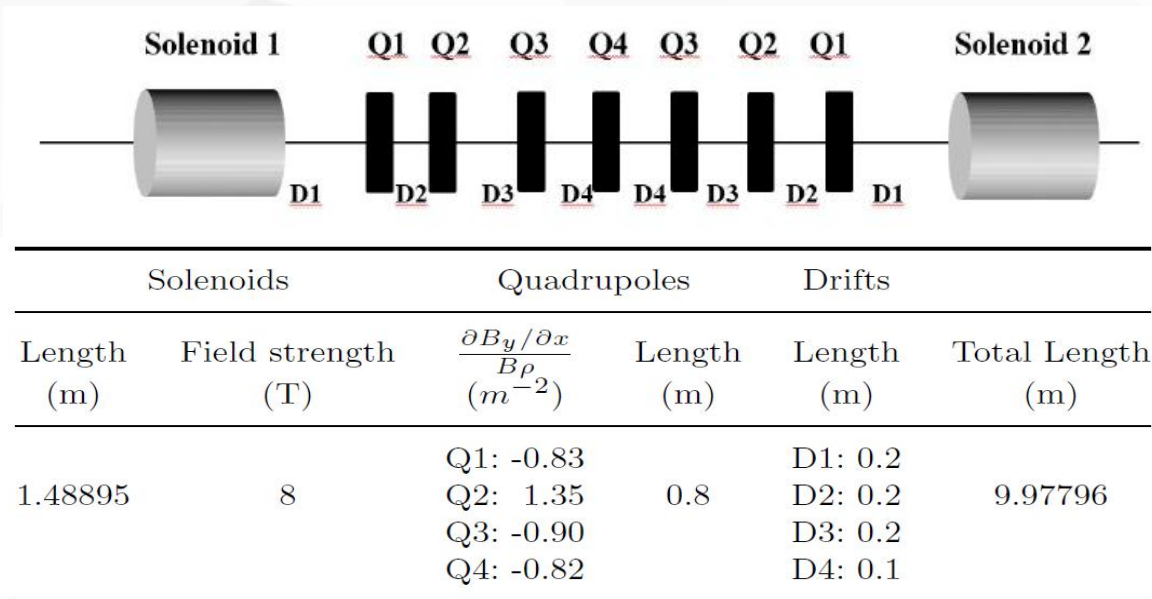
II. 每个自旋旋转器由10个相同的单元组成。  $\int B_{sol} dl \cong 30m \times 8T$

III. 传输矩阵:

$$\begin{pmatrix} 1 & L_{tot} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -L_{tot} \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

IV. 该结构单元对轨道运动相当于:

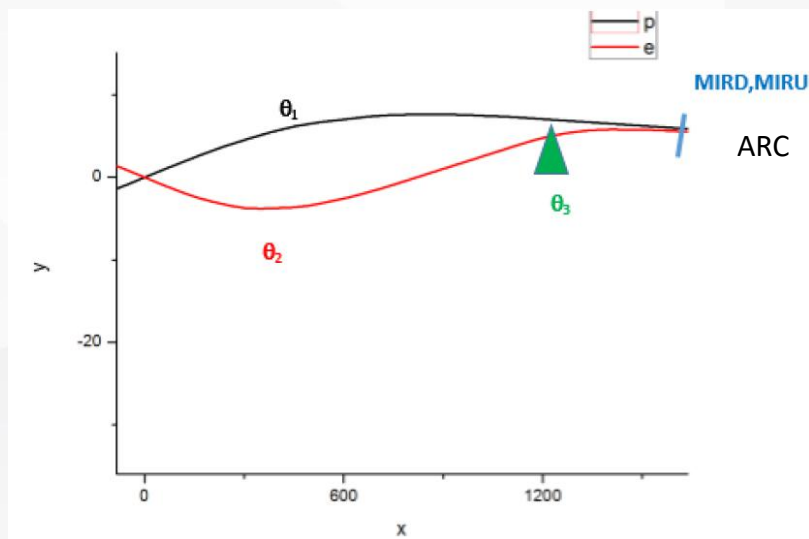
一个等长的漂移管&垂直方向的相移 $0.5 \times 2\pi$



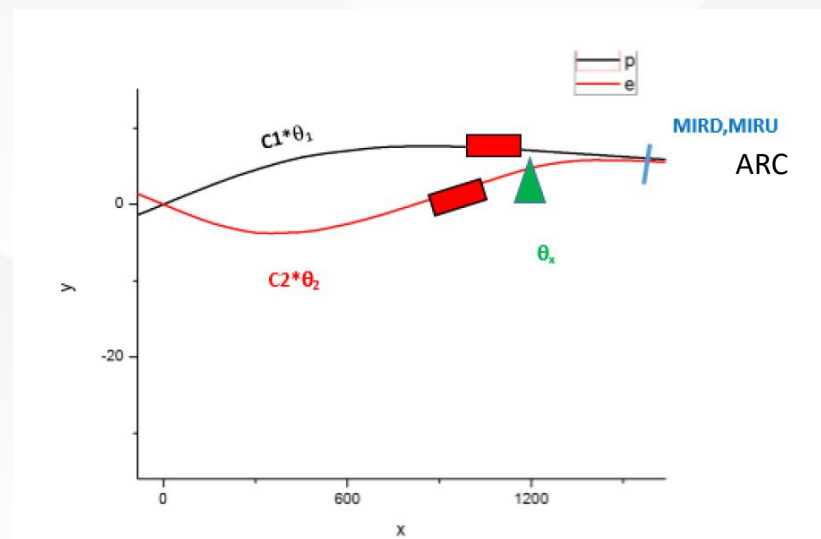
Vladimir N. Litvinenko and Alexander A. Zholents, arXiv:1809.11138 [physics.acc-ph](2018).

➤ 偏转磁铁区域:

- I. 改变对撞区原有的几何结构。
- II. 保持弧区正负电子环的距离为 $D=0.35\text{m}$
- III. 原版:  $\theta_1=-0.01921[\text{rad}]$ ,  $\theta_2=0.02935[\text{rad}]$ ,  $\theta_2+\theta_3=0.01379 [\text{rad}]$
- IV. 之后:  $-c_1*\theta_1=c_2*\theta_2=0.015[\text{rad}]$ ,  $\theta_x=0.0025[\text{rad}]$

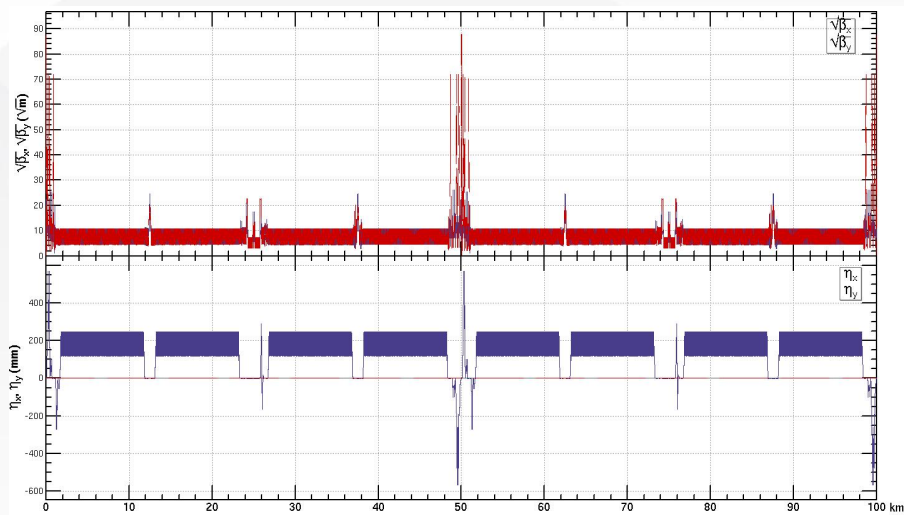


w/o spin rotator

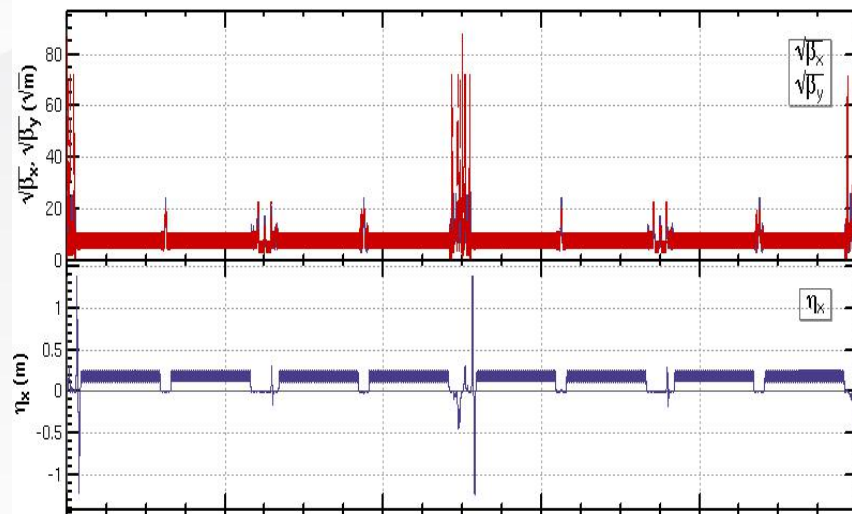


w/ spin rotator

- 自旋旋转器对轨道运动的影响：



w/o spin rotator



w/ spin rotator

|                            | $U_0$<br>(MeV) | Emittance $\epsilon_x$<br>(nmrad) | Energy spread $\sigma_\gamma$ | Betatron tune $\nu_x/\nu_y$ |
|----------------------------|----------------|-----------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| Original lattice           | 36.0           | 0.18                              | $3.75 \times 10^{-4}$         | 363.11/365.22               |
| Lattice with spin rotators | 39.3           | 1.1                               | $4.09 \times 10^{-4}$         | 363.11/385.22               |

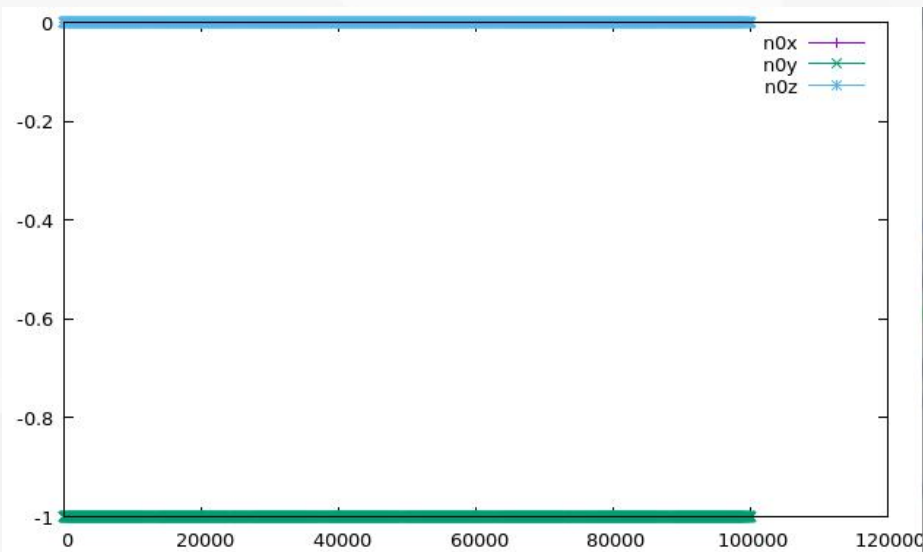
自旋旋转器参数和储存环磁聚焦结构需要进一步优化。

● Bmad/PTC模拟计算:

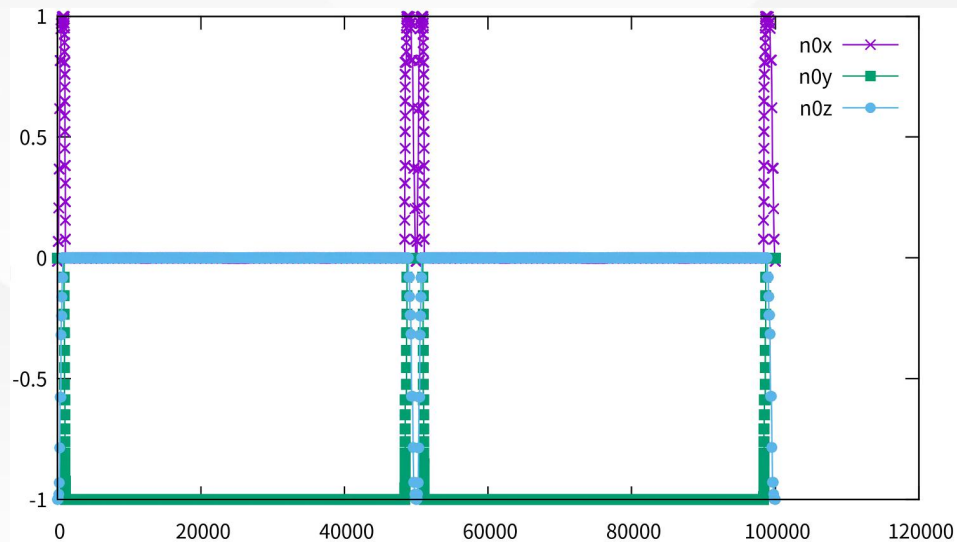
➤ 极化方向 $\vec{n}_0$ 沿全环的分布  $\vec{n}_0(\theta) = \vec{n}_0(\theta + 2\pi)$

I. 没有自旋旋转器时: 全环都是垂直方向;

II. 加入自旋旋转器: 垂直->纵向(IP)->垂直



W/o Spin Rotators



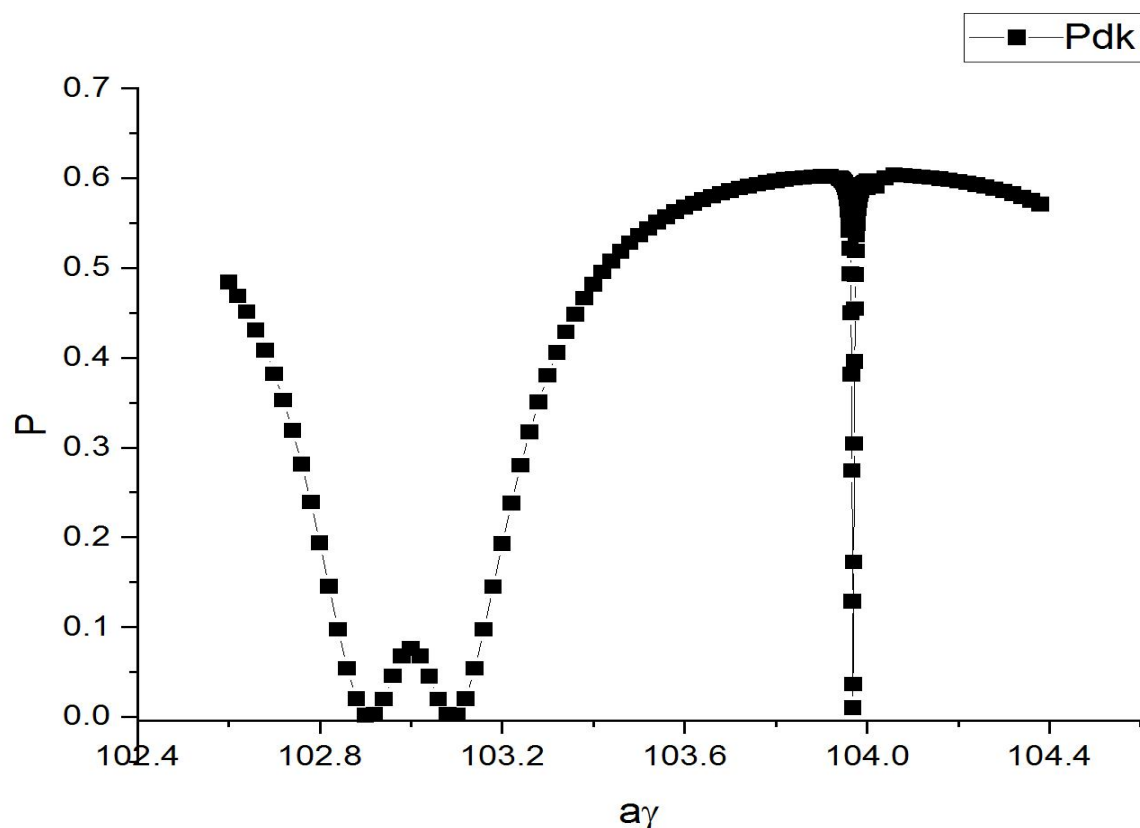
W/ Spin Rotators



● Bmad/PTC模拟计算，基于SLIM:

➤ 平衡极化度  $P_{dk}$ :

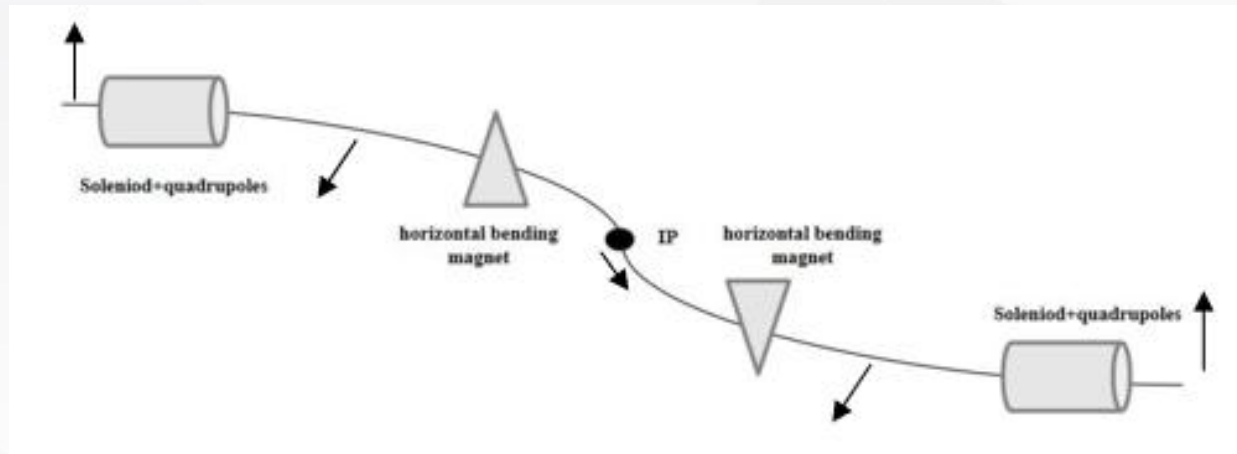
$$P_{dk} = \frac{-\frac{8}{5\sqrt{3}} \times \oint ds \left\langle \frac{1}{|\rho(s)|^3} \hat{b} \cdot \left( \hat{n} - \frac{\partial \hat{n}}{\partial s} \right) \right\rangle_s}{\oint ds \left\langle \frac{1}{|\rho(s)|^3} \left( 1 - \frac{2}{9} (\hat{n} \cdot \hat{s})^2 + \frac{11}{18} \left( \frac{\partial \hat{n}}{\partial s} \right)^2 \right) \right\rangle_s}$$



仅考虑一阶自旋共振的情况下，CEPC Z能区平衡极化度。

MC在追踪过程中粒子会丢失，所以重新CEPC Z lattice的重新设计十分有必要。

- 自旋旋转器对新 CEPC Z lattice 设计的基本要求



- Solenoid+quadrupoles直线节的长度:

现在我们仅仅实现了SOL的decouple功能，长度100m，今后，为了减小Q铁的强度，spin matching, 及与主环的匹配。直线节的长度需要和王毅伟师兄具体讨论。

- 从对撞点到直线节的总的horizontal bending偏转角度:

$$\theta = \pm 0.015[\text{rad}],$$

从而可以实现自旋 $\pi/2$ 的偏转



# 自旋旋转 器的自旋 匹配

✓ 轨道和自旋运动的8\*8矩阵:

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{6 \times 6} & \mathbf{0}_{6 \times 2} \\ \mathbf{G}_{2 \times 6} & \mathbf{D}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad \hat{n}(\vec{u}; s) = \hat{n}_0(s) + \alpha(\vec{u}; s)\hat{m}(s) + \beta(\vec{u}; s)\hat{l}(s)$$

作用在  $(\vec{u}, \alpha, \beta)$ , 对自旋的扰动通过G矩阵来体现。

G=0时, 就实现了完全的自旋匹配。

$$\mathbf{G} = (g_x, g_z, g_s),$$

不同元素的8\*8矩阵:

漂移管:

$$M_{\text{drift}} = \begin{pmatrix} 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad g_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad g_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

四极铁:

$$M_{\text{quad}} = \begin{pmatrix} C_x & S_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hat{C}_x & \hat{S}_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_z & S_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{C}_z & \hat{S}_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

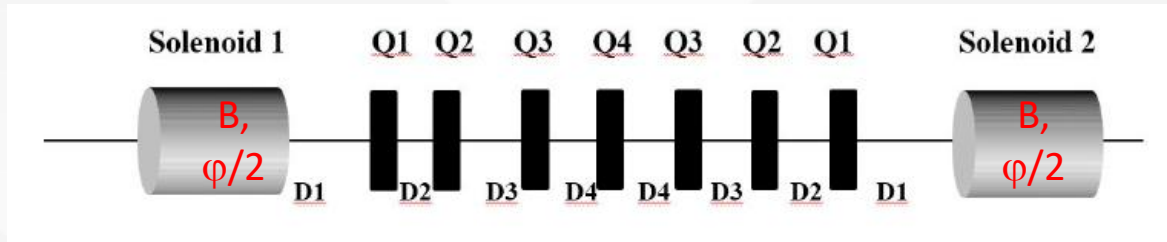
$$g_x = \begin{pmatrix} (1+a\gamma)\hat{C}_x \mathbf{l}_z & (1+a\gamma)(\hat{S}_x - 1)\mathbf{l}_z \\ -(1+a\gamma)\hat{C}_x \mathbf{m}_z & -(1+a\gamma)(\hat{S}_x - 1)\mathbf{m}_z \end{pmatrix}$$

$$g_z = \begin{pmatrix} -(1+a\gamma)\hat{C}_z \mathbf{l}_x & -(1+a\gamma)(\hat{S}_z - 1)\mathbf{l}_x \\ (1+a\gamma)\hat{C}_z \mathbf{m}_x & (1+a\gamma)(\hat{S}_z - 1)\mathbf{m}_x \end{pmatrix}$$

$$g_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

✓ 参考I.A.Koop的设计方案:

通过自旋匹配, 消除自旋扰动的影响。



$$r = pc / eB$$

$$T_x = -T_y$$

For x-y decouple

$$T_x = \begin{pmatrix} -\cos \varphi & -2r \sin \varphi \\ (2r)^{-1} \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \text{ - for the spin transparency!}$$

(Koop et al., SPIN2006)

例子:eRHIC project, E=7.5GeV, Lsol=3m.

Tx=

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{8L}{\pi} \\ \frac{\pi}{8L} & 0 \end{pmatrix}$$

|                            |                            |                           |                            |      |      |          |      |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|------|------|----------|------|
| $-3.16856 \times 10^{-17}$ | $-7.63944$                 | $0.$                      | $6.66134 \times 10^{-16}$  | $0.$ | $0.$ | $0.$     | $0.$ |
| $0.1309$                   | $-2.91434 \times 10^{-16}$ | $1.04237 \times 10^{-17}$ | $-1.11022 \times 10^{-16}$ | $0.$ | $0.$ | $0.$     | $0.$ |
| $0.$                       | $8.88178 \times 10^{-16}$  | $6.07511 \times 10^{-17}$ | $7.63944$                  | $0.$ | $0.$ | $0.$     | $0.$ |
| $1.22403 \times 10^{-17}$  | $-1.11022 \times 10^{-16}$ | $-0.1309$                 | $2.77556 \times 10^{-16}$  | $0.$ | $0.$ | $0.$     | $0.$ |
| $0.$                       | $0.$                       | $0.$                      | $0.$                       | $1.$ | $0.$ | $0.$     | $0.$ |
| $0.$                       | $0.$                       | $0.$                      | $0.$                       | $0.$ | $1.$ | $0.$     | $0.$ |
| $0.$                       | $0.$                       | $0.$                      | $0.$                       | $0.$ | $0.$ | $1.5708$ | $1.$ |
| $2.35886$                  | $4.77982 \times 10^{-6}$   | $-3.49966$                | $-18.0203$                 | $0.$ | $0.$ | $0.$     | $1.$ |

✓ CEPC Z solenoid section的8\*8矩阵:

10个相同的decouple unit(SOL\_MOD);

Q铁;

Drift;

|         |           |           |       |        |        |        |        |  |  |
|---------|-----------|-----------|-------|--------|--------|--------|--------|--|--|
| SOL_MOD | SOL_MOD   |           |       |        |        |        |        |  |  |
| QFCIRD  | DRCIRDSOL |           |       |        |        |        |        |  |  |
| SOL_MOD | SOL_MOD   |           |       |        |        |        |        |  |  |
| QDCIRD  | DRC0IRD   | MTELEMIRD |       |        | DM0IRD |        |        |  |  |
| QM1IRD  | DMIRD     | QM2IRD    | DMIRD | QM3IRD | DM0IRD | DM0IRD | DM0IRD |  |  |
| QM4IRD  | DMIRD     | QM5IRD    | DMIRD | QM6IRD | DM0IRD | DM0IRD | DM0IRD |  |  |
| QM7IRD  | DM2IRDSOL |           |       |        |        |        |        |  |  |
| SOL_MOD | SOL_MOD   |           |       |        |        |        |        |  |  |
| QM8IRD  | DM2IRDSOL |           |       |        |        |        |        |  |  |
| SOL_MOD | SOL_MOD   |           |       |        |        |        |        |  |  |
| QM9IRD  | DM0IRD    | DM0IRD    |       |        |        |        |        |  |  |
| QM10IRD | DM2IRDSOL |           |       |        |        |        |        |  |  |
| SOL_MOD | SOL_MOD   |           |       |        |        |        |        |  |  |

整个 $\pi/2$  SOL section的G矩阵元素比较大。

计划: 不调整SOL\_MOD,

只调整QM1RD->QM6IRD的强度, 令G矩阵为零。

|                          |                           |                           |                            |    |        |    |    |
|--------------------------|---------------------------|---------------------------|----------------------------|----|--------|----|----|
| 0.138702                 | 37.7325                   | $3.10792 \times 10^{-15}$ | $9.77046 \times 10^{-14}$  | 0. | 0.     | 0. | 0. |
| -0.0193346               | 1.94991                   | $3.37896 \times 10^{-17}$ | $-5.03854 \times 10^{-17}$ | 0. | 0.     | 0. | 0. |
| $-5.318 \times 10^{-16}$ | $1.30423 \times 10^{-14}$ | -0.429922                 | -19.688                    | 0. | 0.     | 0. | 0. |
| $2.9272 \times 10^{-16}$ | $4.6032 \times 10^{-16}$  | 0.375901                  | 14.8882                    | 0. | 0.     | 0. | 0. |
| 0.                       | 0.                        | 0.                        | 0.                         | 1. | 0.     | 0. | 0. |
| 0.                       | 0.                        | 0.                        | 0.                         | 0. | 1.     | 0. | 0. |
| 0.                       | 0.                        | 0.                        | 0.                         | 0. | 1.5708 | 1. | 0. |
| -3.57017                 | 230.513                   | 1.46056                   | -45.5281                   | 0. | 0.     | 0. | 1. |

## ✓ 小结:

- 平衡极化度的模拟：我们已经完成了误差矫正之后lattice的平衡极化度模拟分析。针对Wiggler对平衡极化度的影响进行了初步分析。同时也观察了W能区的平衡极化度。
- 关于自旋旋转器，我们已经实现了自旋偏转的功能。相关lattice 有待于进一步修改和优化。
- 掌握了Solenoid section的自旋匹配方法。下一步需要重新设计一个既能解耦合，又能自旋匹配的Solenoid section.



**THANKS**