应用QCD求和规则研究四夸克态的性质

王志刚

华北电力大学物理系

保定　071003

zgwang@aliyun.com

感谢吕晓睿老师与郑阳恒老师的邀请！

报告提纲

- 引言
- QCD求和规则的基础
- QCD求和规则一般计算步骤
- QCD求和规则中参数的选取
- 散射态的贡献，求和规则可信度问题
- 双夸克-反双夸克型四夸克态质量谱的计算
- 色单态-色单态型四夸克态质量谱的计算
- 如何计算四夸克态的衰变
- 总结

1 引言

自2003年，Belle数据组在 $B \to XK$，$X(3872) \to J/\psi\pi^+\pi^-$ 衰变中发现 $X(3872)$ 以来，世界各大数据组陆续发现了许多类粲介子。

粗略地说，对现有的类粲介子大概有五种解释：

1. 反色三重态-色三重态型四夸克态(即双夸克-反双夸克型四夸克态) $\surd$

2. 色单态-色单态型四夸克态(分子态) $\surd$

3. 阈值效应，散射效应，Cusp效应

4. 混杂态 $\surd$

5. 强子粲偶素(即 $c\bar{c}q\bar{q}$ 型四夸克态) $\surd$.

2 QCD求和规则的基础

夸克流–强子对偶：构造有特定量子数的夸克流$\longrightarrow$研究有特定量子数的强子

1. 传统介子(夸克-反夸克型介子)，可以构造标量、赝标、矢量、轴矢、张量流，来研究$J^{PC}=0^{++}$，0^{-+}，1^{--}，1^{++}，2^{++}的介子。例如：

$$\langle 0|\bar{q}(0)i\gamma_5 c(0)|D(p)\rangle = \frac{f_D m_D^2}{m_q+m_c}$$

$$\langle 0|\bar{q}(0)\gamma_\mu c(0)|D^*(p)\rangle = f_{D^*} m_{D^*}\varepsilon_\mu$$

衰变常数的计算，十分成熟，PDG中“Leptonic Decays of Charged Pseudoscalar Mesons”，除了引用格点的数值，余下基本就是引用QCD求和规则的理论值了。

2. 传统重子(即双夸克-夸克型重子)，可以构造$J^P = \frac{1}{2}^{\pm}$，$\frac{3}{2}^{\pm}$，$\frac{5}{2}^{\pm}$的流来研究相应的重子。例如：

$$\langle 0|\varepsilon^{ijk} q_i^T(0) C\gamma_\mu q'_j(0)\gamma^\mu\gamma_5 c(0)|\Sigma_c(p)\rangle = \lambda_{\Sigma_c} U(p)$$

$$\langle 0|\varepsilon^{ijk} q_i^T(0) C\gamma_\mu q'_j(0) c(0)|\Sigma_c^*(p)\rangle = \lambda_{\Sigma_c^*} U_\mu(p)$$

研究重子质量与极点留数的工作，只要在算符乘积展开中，真空凝聚算到应有的维度，还是相当成功的。如果效果不理想，一般来说，就是计算中漏项了。

3. 双夸克-反双夸克型四夸克态。从夸克出发，可以构造标量、赝标、矢量、轴矢、张量双夸克算符，进而构造四夸克流，来研究四夸克态。

$\varepsilon^{ijk}q^T_jC\Gamma q'_k$, where $C\Gamma = C\gamma_5$, C, $C\gamma_\mu\gamma_5$, $C\gamma_\mu$ and $C\sigma_{\mu\nu}$ (or $C\sigma_{\mu\nu}\gamma_5$) for the scalar (S), pseudoscalar (P), vector (V), axialvector (A) and tensor (T) diquarks, respectively, the i, j, k are color indexes.

The tensor diquarks have both $J^P = 1^+$ and 1^- components, we project out them explicitly, and denote the corresponding $J^P = 1^+$ and 1^- diquarks as $\widetilde{A}$ and $\widetilde{V}$, respectively.

对于四夸克态的价夸克结构，

同位旋$I=1$：$c\bar{c}u\bar{d}$，$c\bar{c}d\bar{u}$，$c\bar{c}\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$，

同位旋$I=0$：$c\bar{c}\frac{u\bar{u}+d\bar{d}}{\sqrt{2}}$，

以QCD求和规则而言，一般取同位旋极限，这四个态的质量与极点留数相同，为了计算方便，一般取$c\bar{c}u\bar{d}$或$c\bar{c}d\bar{u}$。

$c\bar{c}\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$与$c\bar{c}\frac{u\bar{u}+d\bar{d}}{\sqrt{2}}$有确定电荷共轭，我们保留了电荷共轭，即根据$J^{PC}$构造四夸克流。

研究四夸克态的基态，一般采用标量(S)与轴矢$(A,\ \widetilde{A})$双夸克算符构造四夸克流。

● 四夸克态-流对应关系：Phys.Rev. D102 (2020) 014018

Z_c	J^{PC}	Currents
$[uc]_S[\overline{dc}]_S$	0^{++}	$J_{SS}(x)$
$[uc]_A[\overline{dc}]_A$	0^{++}	$J_{AA}(x)$
$[uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_{\tilde{A}}$	0^{++}	$J_{\tilde{A}\tilde{A}}(x)$
$[uc]_V[\overline{dc}]_V$	0^{++}	$J_{VV}(x)$
$[uc]_{\tilde{V}}[\overline{dc}]_{\tilde{V}}$	0^{++}	$J_{\tilde{V}\tilde{V}}(x)$
$[uc]_P[\overline{dc}]_P$	0^{++}	$J_{PP}(x)$
$[uc]_S[\overline{dc}]_A-[uc]_A[\overline{dc}]_S$	1^{+-}	$J^{SA}_{-,\mu}(x)$
$[uc]_A[\overline{dc}]_A$	1^{+-}	$J^{AA}_{-,\mu\nu}(x)$
$[uc]_S[\overline{dc}]_{\tilde{A}}-[uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_S$	1^{+-}	$J^{S\tilde{A}}_{-,\mu\nu}(x)$
$[uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_A-[uc]_A[\overline{dc}]_{\tilde{A}}$	1^{+-}	$J^{\tilde{A}A}_{-,\mu}(x)$
$[uc]_{\tilde{V}}[\overline{dc}]_V+[uc]_V[\overline{dc}]_{\tilde{V}}$	1^{+-}	$J^{\tilde{V}V}_{-,\mu}(x)$
$[uc]_V[\overline{dc}]_V$	1^{+-}	$J^{VV}_{-,\mu\nu}(x)$
$[uc]_P[\overline{dc}]_V+[uc]_V[\overline{dc}]_P$	1^{+-}	$J^{PV}_{-,\mu}(x)$
$[uc]_S[\overline{dc}]_A+[uc]_A[\overline{dc}]_S$	1^{++}	$J^{SA}_{+,\mu}(x)$
$[uc]_S[\overline{dc}]_{\tilde{A}}+[uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_S$	1^{++}	$J^{S\tilde{A}}_{+,\mu\nu}(x)$
$[uc]_{\tilde{V}}[\overline{dc}]_V-[uc]_V[\overline{dc}]_{\tilde{V}}$	1^{++}	$J^{\tilde{V}V}_{+,\mu}(x)$
$[uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_A+[uc]_A[\overline{dc}]_{\tilde{A}}$	1^{++}	$J^{\tilde{A}A}_{+,\mu}(x)$
$[uc]_P[\overline{dc}]_V-[uc]_V[\overline{dc}]_P$	1^{++}	$J^{PV}_{+,\mu}(x)$
$[uc]_A[\overline{dc}]_A$	2^{++}	$J^{AA}_{+,\mu\nu}(x)$
$[uc]_V[\overline{dc}]_V$	2^{++}	$J^{VV}_{+,\mu\nu}(x)$

4. 色单态-色单态型四夸克态。从夸克出发，可以构造标量、赝标、矢量、轴矢、张量色单态算符，进而构造四夸克流，研究四夸克态。

$\bar{q}\Gamma q'$ ， where $\Gamma = 1, i\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_\mu\gamma_5$ and $\sigma_{\mu\nu}$

对于色单态-色单态型的隐粲四夸克流，

一般形式： $\bar{q}(x)\Gamma c(x)\bar{c}(x)\Gamma' q'(x)$

通过菲兹变换，双夸克-反双夸克型四夸克流与色单态-色单态型四夸克流之间可以互换：

$$J_\mu(x) = \frac{\varepsilon^{ijk}\varepsilon^{imn}}{\sqrt{2}}\Big[u^{Tj}(x)C\gamma_5 c^k(x)\bar{d}^m(x)\gamma_\mu C\bar{c}^{Tn}(x) - u^{Tj}(x)C\gamma_\mu c^k(x)\bar{d}^m(x)\gamma_5 C\bar{c}^{Tn}(x)\Big], \quad (1)$$

the i, j, k, m, n are color indices. 对于$J^{PC}=1^{+-}$的轴矢流做菲兹变换，

$$\begin{aligned} J_\mu &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big\{ i\bar{c}i\gamma_5 c\,\bar{d}\gamma_\mu u - i\bar{c}\gamma_\mu c\,\bar{d}i\gamma_5 u + \bar{c}u\,\bar{d}\gamma_\mu\gamma_5 c - \bar{c}\gamma_\mu\gamma_5 u\,\bar{d}c \\ &\quad - i\bar{c}\gamma^\nu\gamma_5 c\,\bar{d}\sigma_{\mu\nu}u + i\bar{c}\sigma_{\mu\nu}c\,\bar{d}\gamma^\nu\gamma_5 u - i\bar{c}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 u\,\bar{d}\gamma^\nu c + i\bar{c}\gamma^\nu u\,\bar{d}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 c \Big\}, \end{aligned} \quad (2)$$

3 QCD求和规则一般计算步骤

首先写出关联函数

1. 对于隐粲(或隐美或双重)四夸克流$J(x)$,

$$\Pi(p^2) = i\int d^4x e^{ip\cdot x}\langle 0|T\left\{J(x)J^\dagger(0)\right\}|0\rangle\,, \quad (3)$$

做维克收缩，得到四个完全传播子，两个重夸克传播子，两个轻夸克传播子。如果每个重夸克传播子贡献一个胶子，每个轻夸克传播子贡献一个夸克对，则得到一个维度为10 的算符，所以算符乘积展开应该到维度为10的真空凝聚。

2. 对于隐粲(或隐美或双重)五夸克流$J(x)$,

$$\Pi(p) = i\int d^4x e^{ip\cdot x}\langle 0|T\Big\{J(x)\bar{J}(0)\Big\}|0\rangle\,, \qquad (4)$$

做维克收缩，得到五个完全传播子，两个重夸克传播子，三个轻夸克传播子。如果每个重夸克传播子贡献一个胶子，每个轻夸克传播子贡献一个夸克对，则得到一个维度为13 的算符，所以算符乘积展开应该到维度为13的真空凝聚。

算符乘积展开如果达不到指定的维度，影响计算的准确度。对于高维真空凝聚，采取因子化的假设，因子化为低维真空凝聚。

完成算符乘积展开后，通过色散关系，得到夸克胶子层次上的谱密度。

$$\Pi(p^2) = \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{4m_Q^2}^{s_0} ds \frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{s-p^2}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{s-p^2}}, \quad (5)$$

s_0为连续态阈值参数，第一项为基态贡献，第二项为连续态与激发态的贡献。

我们对算符乘积展开收敛采取严苛的条件，最高维凝聚，对四夸克态来说，即维度为10的凝聚，对基态的贡献大约为1%左右。

基态贡献，即极点项贡献，大约$(40-60)\%$，中心值大于50%，这就是极点为主。

考虑到极点为主与算符乘积展开收敛的不确定性，上述条件可以适度调整。我们对隐粲、隐美、双重四夸克态、分子态、五夸克态等，采取同样的条件，这样理论预言就比较可信。

在强子层次，关联函数照样可以写成：

$$
\begin{aligned}
\Pi(p^2) &= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{4m_Q^2}^{s_0} ds \frac{\mathrm{Im}\Pi_H(s)}{s-p^2}} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\mathrm{Im}\Pi_H(s)}{s-p^2}}, \\
&= \frac{\lambda_Z^2}{M_Z^2-p^2} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\mathrm{Im}\Pi_H(s)}{s-p^2}}
\end{aligned} \tag{6}
$$

where $\langle 0|J(0)|Z_c(p) = \lambda_Z$.

完成强子-夸克对偶：

$$
\frac{\lambda_Z^2}{M_Z^2-p^2} = \frac{1}{\pi}\int_{4m_Q^2}^{s_0} ds \frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{s-p^2}. \tag{7}
$$

做布莱尔变换：

$$\lambda_Z^2 \exp\left(-\frac{M_Z^2}{T^2}\right) = \int_{4m_Q^2}^{s_0} ds \frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{\pi} \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right) \quad (8)$$

消去极点留数：

$$M_Z^2 = -\frac{\frac{d}{d\tau}\int_{4m_Q^2}^{s_0} ds \mathrm{Im}\Pi(s) \exp(-s\tau)}{\int_{4m_Q^2}^{s_0} ds \mathrm{Im}\Pi(s) \exp(-s\tau)} \Big|_{\tau=\frac{1}{T^2}} . \quad (9)$$

4 QCD求和规则中参数的选取

The correlation functions $\Pi(p^2)$ do not depend on the energy scale μ, that is

$$\frac{d}{d\mu}\Pi(p^2) \ = \ 0\,, \tag{10}$$

但并不能保证基态贡献不依赖能标，$\rho_{QCD}(s,\mu)=\frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{\pi}$，

$$\frac{d}{d\mu}\int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds\frac{\rho_{QCD}(s,\mu)}{s-p^2} \rightarrow 0\,, \tag{11}$$

due to the following two reasons inherited from the QCD sum rules:

- 微扰修正项被略去，高维真空凝聚因子化为低维真空凝聚，高维真空凝聚的能标依赖性被修正了；
- 引入截断 s_0，阈值 $4m_Q^2(\mu)$ 和连续态阈值 s_0 之间的关联是未知的，强子-夸克对偶只是一个假设。

我们得不到不依赖于能标的QCD求和规则，但我们有一个经验的能标公式，可以协调地把QCD谱密度的能标定下来。

We perform the Borel transformation with respect to the variable $P^2 = -p^2$ and obtain

$$\int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \frac{\rho_{QCD}(s,\mu)}{s-p^2} \to \int_{4m_Q^2(\mu)}^{s_0} ds \frac{\rho_{QCD}(s,\mu)}{T^2} \exp\left(-\frac{s}{T^2}\right) . \quad (12)$$

Now the QCD sum rules have two typical energy scales $\underbrace{\mu^2 \text{ and } T^2}$, where the T^2 is the Borel parameter. The integrals in Eq.(12) are sensitive to the heavy quark masses m_Q.

重夸克质量的变化，或者说能标的变化，可以引起积分区间 $\underbrace{4m_Q^2(\mu) - s_0}$ 和QCD谱密度 $\underbrace{\rho_{QCD}(s,\mu)}$ 的变化，这也就引起布莱尔窗口的变化，并由此产生强子质量和极点留数的变化。具体的计算表明：微小的重夸克质量 m_Q 变化，可以起比较大强子质量变化。

从上面的分析，我们可以得出结论：能标的选取很重要，对结果影响很大。

我们采用双势阱模型来描述四夸克系统 $q\bar{q}'Q\bar{Q}$ 。 在四夸克系统 $q\bar{q}'Q\bar{Q}$ 中， 重夸克 Q 作为一个静态的势阱， 吸引轻夸克 q 形成反色三重态的双夸克态 $\mathcal{D}^i_{qQ}$，

$$q + Q \;\to\; \mathcal{D}^i_{qQ} \,, \tag{13}$$

或者吸引轻夸克 $\bar{q}'$ 形成色单态或者色八重态，

$$\bar{q}' + Q \;\to\; \bar{q}'Q \; (\bar{q}'\lambda^a Q) \,. \tag{14}$$

重夸克 $\bar{Q}$ 作为另外一个静态势阱， 吸引轻夸克 $\bar{q}'$ 形成色三重态的双夸克态 $\mathcal{D}^i_{\bar{q}'\bar{Q}}$，

$$\bar{q}' + \bar{Q} \;\to\; \mathcal{D}^i_{\bar{q}'\bar{Q}} \,, \tag{15}$$

或者吸引轻夸克 q， 形成色单态或者色八重态，

$$q + \bar{Q} \;\to\; \bar{Q}q \; (\bar{Q}\lambda^a q) \,, \tag{16}$$

where the i is color index, the λ^a is Gell-Mann matrix.

Then

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^i_{qQ} + \mathcal{D}^i_{\bar{q}'\bar{Q}} &\to \bar{3}3 - \text{type} \;\; \text{tetraquark} \;\; \text{states}\,, \\
\bar{q}'Q + \bar{Q}q &\to 11 - \text{type} \;\; \text{tetraquark} \;\; \text{states}\,, \\
\bar{q}'\lambda^a Q + \bar{Q}\lambda^a q &\to 88 - \text{type} \;\; \text{tetraquark} \;\; \text{states}\,, \qquad (17)
\end{aligned}$$

the two heavy quarks Q and $\bar{Q}$ stabilize the four-quark systems $q\bar{q}'Q\bar{Q}$.

这也就导致了隐粲和隐美四夸克态的QCD求和规则，可以同时满足极点为主和算符乘积展开收敛。

The heavy four-quark systems are characterized by the effective heavy quark masses $\mathbb{M}_Q$ (or constituent quark masses) and the virtuality $V = \sqrt{M^2_{X/Y/Z} - (2\mathbb{M}_Q)^2}$, where the $X/Y/Z$ denote the four-quark systems $q\bar{q}'Q\bar{Q}$.

四夸克态$Q\bar{Q}q'\bar{q}$的QCD求和规则有三个特征能标：μ^2，T^2，V^2.

我们很自然地取

$$\mu^2 = V^2 = M^2_{X/Y/Z} - (2\mathbb{M}_Q)^2 = \mathcal{O}(T^2)\,. \quad (18)$$

我们首次研究了四夸克态 $q\bar{q}'Q\bar{Q}$ 的QCD求和规则的能标依赖性，发现能标公式Eq.(28)适用于所有四夸克系统 $q\bar{q}'Q\bar{Q}$与五夸克系统 $qq'q''Q\bar{Q}$。

我们把所有夸克质量和真空凝聚演化到这个特定的能标μ，然后提取强子质量$M_{X/Y/Z}$和极点留数。或者说μ和$M_{X/Y/Z}$满足一个特定的关系，参数$\mathbb{M}_Q$是一定的，对所有过程适用。

The vacuum condensates are taken to be the $\underbrace{\text{standard values}}$ $\langle\bar{q}q\rangle=-(0.24\pm 0.01\,\text{GeV})^3$, $\langle\bar{s}s\rangle=(0.8\pm 0.1)\langle\bar{q}q\rangle$, $\langle\bar{q}g_s\sigma Gq\rangle=m_0^2\langle\bar{q}q\rangle$, $\langle\bar{s}g_s\sigma Gs\rangle=m_0^2\langle\bar{s}s\rangle$, $m_0^2=(0.8\pm 0.1)\,\text{GeV}^2$, $\langle\frac{\alpha_s GG}{\pi}\rangle=(0.33\,\text{GeV})^4$ at the energy scale $\mu=1\,\text{GeV}$.

并考虑随能标的演化：

$$\begin{aligned}
\langle\bar{q}q\rangle(\mu) &= \langle\bar{q}q\rangle(1\text{GeV})\left[\frac{\alpha_s(1\text{GeV})}{\alpha_s(\mu)}\right]^{\frac{12}{33-2n_f}}, \\
\langle\bar{s}s\rangle(\mu) &= \langle\bar{s}s\rangle(1\text{GeV})\left[\frac{\alpha_s(1\text{GeV})}{\alpha_s(\mu)}\right]^{\frac{12}{33-2n_f}}, \\
\langle\bar{q}g_s\sigma Gq\rangle(\mu) &= \langle\bar{q}g_s\sigma Gq\rangle(1\text{GeV})\left[\frac{\alpha_s(1\text{GeV})}{\alpha_s(\mu)}\right]^{\frac{2}{33-2n_f}}, \\
\langle\bar{s}g_s\sigma Gs\rangle(\mu) &= \langle\bar{s}g_s\sigma Gs\rangle(1\text{GeV})\left[\frac{\alpha_s(1\text{GeV})}{\alpha_s(\mu)}\right]^{\frac{2}{33-2n_f}},
\end{aligned} \tag{19}$$

We take the $\overline{MS}$ masses $m_c(m_c) = (1.275 \pm 0.025)\,\mathrm{GeV}$, $m_b(m_b) = (4.18 \pm 0.03)\,\mathrm{GeV}$ and $m_s(\mu = 2\,\mathrm{GeV}) = (0.095 \pm 0.005)\,\mathrm{GeV}$ from the Particle Data Group, and take into account the energy-scale dependence of the $\overline{MS}$ masses from the renormalization group equation,

$$
\begin{aligned}
m_Q(\mu) &= m_Q(m_Q)\left[\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(m_Q)}\right]^{\frac{12}{33-2n_f}}\,, \\
m_s(\mu) &= m_s(2\mathrm{GeV})\left[\frac{\alpha_s(\mu)}{\alpha_s(2\mathrm{GeV})}\right]^{\frac{12}{33-2n_f}}\,, \\
\alpha_s(\mu) &= \frac{1}{b_0 t}\left[1 - \frac{b_1}{b_0^2}\frac{\log t}{t} + \frac{b_1^2(\log^2 t - \log t - 1) + b_0 b_2}{b_0^4 t^2}\right]\,. \qquad (20)
\end{aligned}
$$

简单小结： We use the energy scale formula

$$\mu = \sqrt{M^2_{X/Y/Z/P} - (2\mathbb{M}_Q)^2} \tag{21}$$

to determine the optimal energy scales of the hidden-charm (and hidden-bottom) tetraquark states and molecular states in QCD sum rules。我们把所有夸克质量和真空凝聚演化到这个特定的能标 μ，然后提取强子质量和极点留数。下面举例说明这个能标公式物理价值。

如果我们用流 $J_\mu(x)$ 研究 $Z_c(3900)$，那么最佳的能标是 $\mu = 1.4\,\mathrm{GeV}$，

$$J_\mu(x) = \frac{\epsilon^{ijk}\epsilon^{imn}}{\sqrt{2}}\left\{u^j(x)C\gamma_5 c^k(x)\bar{d}^m(x)\gamma_\mu C\bar{c}^n(x) - u^j(x)C\gamma_\mu c^k(x)\bar{d}^m(x)\gamma_5 C\bar{c}^n(x)\right\} \tag{22}$$

QCD求和规则可以再现 $Z_c(3900)$ 的质量。

如果我们用流 $\eta_\mu(x)$ 研究 $Y(4140)$，那么最佳的能标是 $\mu = 2.0\,\mathrm{GeV}$，

$$\eta_\mu(x) = \frac{\epsilon^{ijk}\epsilon^{imn}}{\sqrt{2}}\left\{s^j(x)C\gamma_5 c^k(x)\bar{s}^m(x)\gamma_\mu C\bar{c}^n(x) + s^j(x)C\gamma_\mu c^k(x)\bar{s}^m(x)\gamma_5 C\bar{c}^n(x)\right\} \tag{23}$$

QCD求和规则不能再现 $Y(4140)$ 的质量，而能再现质量的能标是 $\mu = 1.1\,\mathrm{GeV}$。我们可以得出结论，把 $Z_c(3900)$ 和 $Y(4140)$ 同时看做轴矢四夸克态是有问题的。

5 双粒子散射态的贡献，QCD求和规则的可信度问题

举例说明：色单态-色单态型四夸克轴矢流$J_\mu(x)$，

$$J_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\bar{u}(x)i\gamma_5 c(x)\bar{c}(x)\gamma_\mu d(x) + \bar{u}(x)\gamma_\mu c(x)\bar{c}(x)i\gamma_5 d(x)\Big] \tag{24}$$

可以进行玻色化，在强子层次，写成如下形式：

$$\begin{aligned} J_\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{f_D m_D^2}{m_c} f_{D^*} m_{D^*}\left[D^0(x)D_\mu^{*-}(x) + D_\mu^{*0}(x)D^-(x)\right] \\ &+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{f_D m_D^2}{m_c} f_{D_0}\left[D^0(x)i\partial_\mu D_0^-(x) + i\partial_\mu D_0^0(x)D^-(x)\right] \\ &+\lambda_Z Z_{c,\mu}(x) + \cdots \,, \end{aligned} \tag{25}$$

从中可以看出，$J_\mu(x)$不光与轴矢四夸克态Z_c有耦合，而且与介子对也有耦合。

具体计算表明，在强子层次，介子对的贡献，可以等效为对Z_c贡献一个有限的宽度，这个有限宽度的效应，可以吸收进极点留数λ_Z里面，而不影响质量。

取两个极限：单纯介子对的贡献，不能满足求和规则；单纯四夸克态的贡献，可以满足求和规则。(Phys.Rev. D101 (2020) 074011)

深层次原因(arXiv:2102.07520)，无论介子还是多夸克态，都有平均半径$\langle r\rangle$。我们用定域流$J_\mu(x)$，四个价夸克处于同一空间位置，形不成介子对，但四个价夸克作为一个整体，可以与Z_c有耦合。进行玻色化时，

$$
\begin{aligned}
J_\mu(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{f_D m_D^2}{m_c} f_{D^*} m_{D^*}\left[D^0(x) D_\mu^{*-}(x) + D_\mu^{*0}(x) D^-(x)\right](\times) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{f_D m_D^2}{m_c} f_{D_0}\left[D^0(x) i\partial_\mu D_0^-(x) + i\partial_\mu D_0^0(x) D^-(x)\right](\times) \\
&+ \lambda_Z Z_{c,\mu}(x)(\surd) + \cdots \,. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

6 QCD求和规则对双夸克-反双夸克型四夸克态质量谱的计算

首先给出夸克结构、J^{PC}、布莱尔参数、QCD谱密度能标(满足能标公式)、阈值参数、极点贡献、最高维凝聚贡献

其次给出质量的理论值以及对现有X、Y、Z粒子的可能确认。

- Phys.Rev. D102 (2020) 014018

$Z_c(X_c)$	J^{PC}	$T^2(\text{GeV}^2)$	$\sqrt{s_0}(\text{GeV})$	$\mu(\text{GeV})$	pole	$\lvert D(10)\rvert$
$[uc]_S[\overline{dc}]_S$	0^{++}	$2.7-3.1$	4.40 ± 0.10	1.3	$(40-63)\%$	$<1\%$
$[uc]_A[\overline{dc}]_A$	0^{++}	$2.8-3.2$	4.52 ± 0.10	1.5	$(40-63)\%$	$\leq1\%$
$[uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_{\tilde{A}}$	0^{++}	$3.1-3.5$	4.55 ± 0.10	1.6	$(42-62)\%$	$<1\%$
$[uc]_V[\overline{dc}]_V$	0^{++}	$3.7-4.1$	5.22 ± 0.10	2.9	$(41-60)\%$	$\ll1\%$
$[uc]_{\tilde{V}}[\overline{dc}]_{\tilde{V}}$	0^{++}	$4.9-5.7$	5.90 ± 0.10	3.9	$(41-61)\%$	$\ll1\%$
$[uc]_P[\overline{dc}]_P$	0^{++}	$5.2-6.0$	6.03 ± 0.10	4.1	$(40-60)\%$	$\ll1\%$
$[uc]_S[\overline{dc}]_A-[uc]_A[\overline{dc}]_S$	1^{+-}	$2.7-3.1$	4.40 ± 0.10	1.4	$(40-63)\%$	$<1\%$
$[uc]_A[\overline{dc}]_A$	1^{+-}	$3.3-3.7$	4.60 ± 0.10	1.7	$(40-59)\%$	$\ll1\%$
$[uc]_S[\overline{dc}]_{\tilde{A}}-[uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_S$	1^{+-}	$3.3-3.7$	4.60 ± 0.10	1.7	$(40-59)\%$	$\ll1\%$
$[uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_A-[uc]_A[\overline{dc}]_{\tilde{A}}$	1^{+-}	$3.2-3.6$	4.60 ± 0.10	1.7	$(41-61)\%$	$\ll1\%$
$[uc]_{\tilde{V}}[\overline{dc}]_V+[uc]_V[\overline{dc}]_{\tilde{V}}$	1^{+-}	$3.7-4.1$	5.25 ± 0.10	2.9	$(41-60)\%$	$\ll1\%$
$[uc]_V[\overline{dc}]_V$	1^{+-}	$5.1-5.9$	6.00 ± 0.10	4.1	$(41-60)\%$	$\ll1\%$
$[uc]_P[\overline{dc}]_V+[uc]_V[\overline{dc}]_P$	1^{+-}	$5.1-5.9$	6.00 ± 0.10	4.1	$(41-60)\%$	$\ll1\%$
$[uc]_S[\overline{dc}]_A+[uc]_A[\overline{dc}]_S$	1^{++}	$2.7-3.1$	4.40 ± 0.10	1.4	$(40-62)\%$	$\ll1\%$
$[uc]_S[\overline{dc}]_{\tilde{A}}+[uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_S$	1^{++}	$3.3-3.7$	4.60 ± 0.10	1.7	$(40-59)\%$	$\ll1\%$
$[uc]_{\tilde{V}}[\overline{dc}]_V-[uc]_V[\overline{dc}]_{\tilde{V}}$	1^{++}	$2.8-3.2$	4.62 ± 0.10	1.8	$(40-63)\%$	$<2\%$
$[uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_A+[uc]_A[\overline{dc}]_{\tilde{A}}$	1^{++}	$4.6-5.3$	5.73 ± 0.10	3.7	$(40-60)\%$	$\ll1\%$
$[uc]_P[\overline{dc}]_V-[uc]_V[\overline{dc}]_P$	1^{++}	$5.1-5.9$	6.00 ± 0.10	4.1	$(40-60)\%$	$\ll1\%$
$[uc]_A[\overline{dc}]_A$	2^{++}	$3.3-3.7$	4.65 ± 0.10	1.8	$(40-60)\%$	$<1\%$
$[uc]_V[\overline{dc}]_V$	2^{++}	$5.0-5.8$	5.95 ± 0.10	4.0	$(40-60)\%$	$\ll1\%$

- Phys.Rev. D102 (2020) 014018 ; Chin.Phys. C44 (2020) 063105

$Z_c(X_c)$	J^{PC}	M_Z(GeV)	Assignments	Z_c' (X_c')
$[uc]_S[\overline{dc}]_S$	0^{++}	3.88 ± 0.09	? $X(3860)$	
$[uc]_A[\overline{dc}]_A$	0^{++}	3.95 ± 0.09	? $X(3915)$	
$[uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_{\tilde{A}}$	0^{++}	3.98 ± 0.08		
$[uc]_V[\overline{dc}]_V$	0^{++}	4.65 ± 0.09		
$[uc]_{\tilde{V}}[\overline{dc}]_{\tilde{V}}$	0^{++}	5.35 ± 0.09		
$[uc]_P[\overline{dc}]_P$	0^{++}	5.49 ± 0.09		
$[uc]_S[\overline{dc}]_A - [uc]_A[\overline{dc}]_S$	1^{+-}	3.90 ± 0.08	? $Z_c(3900)$	? $Z_c(4430)$
$[uc]_A[\overline{dc}]_A$	1^{+-}	4.02 ± 0.09	? $Z_c(4020/4055)$	? $Z_c(4600)$
$[uc]_S[\overline{dc}]_{\tilde{A}} - [uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_S$	1^{+-}	4.01 ± 0.09	? $Z_c(4020/4055)$	? $Z_c(4600)$
$[uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_A - [uc]_A[\overline{dc}]_{\tilde{A}}$	1^{+-}	4.02 ± 0.09	? $Z_c(4020/4055)$	? $Z_c(4600)$
$[uc]_{\tilde{V}}[\overline{dc}]_V + [uc]_V[\overline{dc}]_{\tilde{V}}$	1^{+-}	4.66 ± 0.10	? $Z_c(4600)$	
$[uc]_V[\overline{dc}]_V$	1^{+-}	5.46 ± 0.09		
$[uc]_P[\overline{dc}]_V + [uc]_V[\overline{dc}]_P$	1^{+-}	5.45 ± 0.09		
$[uc]_S[\overline{dc}]_A + [uc]_A[\overline{dc}]_S$	1^{++}	3.91 ± 0.08	? $X(3872)$	
$[uc]_S[\overline{dc}]_{\tilde{A}} + [uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_S$	1^{++}	4.02 ± 0.09	? $Z_c(4050)$	
$[uc]_{\tilde{V}}[\overline{dc}]_V - [uc]_V[\overline{dc}]_{\tilde{V}}$	1^{++}	4.08 ± 0.09	? $Z_c(4050)$	
$[uc]_{\tilde{A}}[\overline{dc}]_A + [uc]_A[\overline{dc}]_{\tilde{A}}$	1^{++}	5.19 ± 0.09		
$[uc]_P[\overline{dc}]_V - [uc]_V[\overline{dc}]_P$	1^{++}	5.46 ± 0.09		
$[uc]_A[\overline{dc}]_A$	2^{++}	4.08 ± 0.09	? $Z_c(4050)$	
$[uc]_V[\overline{dc}]_V$	2^{++}	5.40 ± 0.09		

- arXiv:2011.10959；基于SU(3)对称性破缺获得质量谱

$Z_c(X_c)$	J^{PC}	$M_Z(\mathrm{GeV})$	Assignments
$[uc]_S[\overline{sc}]_S$	0^{++}	3.97 ± 0.09	
$[uc]_A[\overline{sc}]_A$	0^{++}	4.04 ± 0.09	
$[uc]_{\tilde{A}}[\overline{sc}]_{\tilde{A}}$	0^{++}	4.07 ± 0.08	
$[uc]_V[\overline{sc}]_V$	0^{++}	4.74 ± 0.09	
$[uc]_{\tilde{V}}[\overline{sc}]_{\tilde{V}}$	0^{++}	5.44 ± 0.09	
$[uc]_P[\overline{sc}]_P$	0^{++}	5.58 ± 0.09	
$[uc]_S[\overline{sc}]_A - [uc]_A[\overline{sc}]_S$	1^{+-}	3.99 ± 0.09	$?\, Z_{cs}(3985)$
$[uc]_A[\overline{sc}]_A$	1^{+-}	4.11 ± 0.09	
$[uc]_S[\overline{sc}]_{\widetilde{A}} - [uc]_{\widetilde{A}}[\overline{sc}]_S$	1^{+-}	4.10 ± 0.09	
$[uc]_{\widetilde{A}}[\overline{sc}]_A - [uc]_A[\overline{sc}]_{\widetilde{A}}$	1^{+-}	4.11 ± 0.09	
$[uc]_{\widetilde{V}}[\overline{sc}]_V + [uc]_V[\overline{sc}]_{\widetilde{V}}$	1^{+-}	4.75 ± 0.10	
$[uc]_V[\overline{sc}]_V$	1^{+-}	5.55 ± 0.09	
$[uc]_P[\overline{sc}]_V + [uc]_V[\overline{sc}]_P$	1^{+-}	5.54 ± 0.09	
$[uc]_S[\overline{sc}]_A + [uc]_A[\overline{sc}]_S$	1^{++}	3.99 ± 0.09	$?\, Z_{cs}(3985)$
$[uc]_S[\overline{sc}]_{\widetilde{A}} + [uc]_{\widetilde{A}}[\overline{sc}]_S$	1^{++}	4.11 ± 0.09	
$[uc]_{\widetilde{V}}[\overline{sc}]_V - [uc]_V[\overline{sc}]_{\widetilde{V}}$	1^{++}	4.17 ± 0.09	
$[uc]_{\widetilde{A}}[\overline{sc}]_A + [uc]_A[\overline{sc}]_{\widetilde{A}}$	1^{++}	5.28 ± 0.09	
$[uc]_P[\overline{sc}]_V - [uc]_V[\overline{sc}]_P$	1^{++}	5.55 ± 0.09	
$[uc]_A[\overline{dc}]_A$	2^{++}	4.17 ± 0.09	
$[uc]_V[\overline{dc}]_V$	2^{++}	5.49 ± 0.09	

- The vector tetraquark states, possible assignments and the corresponding vector tetraquark currents, where the mixing effects are neglected ; Eur.Phys.J. C79 (2019) 29

$\vert S_{qc}, S_{\bar{q}\bar{c}}; S, L; J\rangle$	Maiani	Ali-Maiani	Currents
$\vert 0, 0; 0, 1; 1\rangle$	$Y(4008)$	$Y(4220)$	$J^1_\mu(x)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\vert 1, 0; 1, 1; 1\rangle + \vert 0, 1; 1, 1; 1\rangle)$	$Y(4260)$	$Y(4330)$	$J_{\mu\nu}(x)$
$\vert 1, 1; 0, 1; 1\rangle$	$Y(4290/4220)$	$Y(4390)$	$J^2_\mu(x)$
$\vert 1, 1; 2, 1; 1\rangle$	$Y(4630)$	$Y(4660)$	$J^3_\mu(x)$
$\vert 1, 1; 2, 3; 1\rangle$			

- Eur.Phys.J. C79 (2019) 29；基于修正的能标公式，极点项贡献提高了

$\vert S_{qc}, S_{\bar{q}\bar{c}}; S, L; J\rangle$	$\mu(\mathrm{GeV})$	$T^2(\mathrm{GeV}^2)$	$\sqrt{s_0}(\mathrm{GeV})$	pole	$D(10)$
$\vert 0,0;0,1;1\rangle$	1.1	$2.2-2.8$	4.80 ± 0.10	$(49-81)\%$	$\leq 1\%$
$\vert 1,1;0,1;1\rangle$	1.2	$2.2-2.8$	4.85 ± 0.10	$(45-79)\%$	$(1-5)\%$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\vert 1,0;1,1;1\rangle+\vert 0,1;1,1;1\rangle)$	1.3	$2.6-3.2$	4.90 ± 0.10	$(46-75)\%$	$\ll 1\%$
$\vert 1,1;2,1;1\rangle$	1.4	$2.6-3.2$	4.90 ± 0.10	$(40-71)\%$	$\leq 1\%$

- Eur.Phys.J. C79 (2019) 29；到目前为止，QCD求和规则能获得的最低矢量四夸克态质量谱。对于其它矢量类粲介子，如Y(4660)的研究，参考Eur.Phys.J. C76 (2016) 387

$\lvert S_{qc}, S_{\bar{q}\bar{c}}; S, L; J\rangle$	$M_Y(\text{GeV})$	This Work	Ali-Maiani
$\lvert 0,0;0,1;1\rangle$	4.24 ± 0.10	$Y(4220)$	$Y(4220)$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 1,0;1,1;1\rangle + \lvert 0,1;1,1;1\rangle)$	4.31 ± 0.10	$Y(4320/4390)$	$Y(4330)$
$\lvert 1,1;0,1;1\rangle$	4.28 ± 0.10	$Y(4220/4320)$	$Y(4390)$
$\lvert 1,1;2,1;1\rangle$	4.33 ± 0.10	$Y(4320/4390)$	$Y(4660)$

- Eur.Phys.J. C79 (2019) 489

Z_b	J^{PC}	$T^2(\mathrm{GeV}^2)$	$\sqrt{s_0}(\mathrm{GeV})$	$\mu(\mathrm{GeV})$	pole	$\lvert D(10)\rvert$
$[ub]_S[\overline{db}]_S$	0^{++}	$7.0-8.0$	11.16 ± 0.10	2.40	$(44-66)\%$	$\leq 3\%$
$[ub]_A[\overline{db}]_A$	0^{++}	$6.4-7.4$	11.14 ± 0.10	2.30	$(44-68)\%$	$\leq 11\%$
$[ub]_{\tilde{A}}[\overline{db}]_{\tilde{A}}$	0^{++}	$7.2-8.2$	11.17 ± 0.10	2.40	$(45-66)\%$	$\leq 4\%$
$[ub]_{\tilde{V}}[\overline{db}]_{\tilde{V}}$	0^{++}	$11.4-12.8$	12.22 ± 0.10	5.40	$(44-61)\%$	$\ll 1\%$
$[ub]_S[\overline{db}]_A-[ub]_A[\overline{db}]_S$	1^{+-}	$7.0-8.0$	11.16 ± 0.10	2.40	$(44-66)\%$	$< 4\%$
$[ub]_A[\overline{db}]_A$	1^{+-}	$7.1-8.1$	11.17 ± 0.10	2.40	$(44-65)\%$	$\leq 4\%$
$[ub]_{\tilde{A}}[\overline{db}]_A-[ub]_A[\overline{db}]_{\tilde{A}}$	1^{+-}	$6.9-7.9$	11.17 ± 0.10	2.40	$(44-66)\%$	$\leq 7\%$
$[ub]_S[\overline{db}]_{\tilde{A}}-[ub]_{\tilde{A}}[\overline{db}]_S$	1^{+-}	$7.1-8.1$	11.17 ± 0.10	2.40	$(44-66)\%$	$\leq 4\%$
$[ub]_S[\overline{db}]_A+[ub]_A[\overline{db}]_S$	1^{++}	$7.1-8.1$	11.18 ± 0.10	2.45	$(44-65)\%$	$\leq 3\%$
$[ub]_{\tilde{V}}[\overline{db}]_V-[ub]_V[\overline{db}]_{\tilde{V}}$	1^{++}	$6.8-7.8$	11.19 ± 0.10	2.50	$(44-66)\%$	$\leq 4\%$
$[ub]_{\tilde{A}}[\overline{db}]_A+[ub]_A[\overline{db}]_{\tilde{A}}$	1^{++}	$9.7-11.1$	11.99 ± 0.10	4.90	$(44-63)\%$	$\ll 1\%$
$[ub]_A[\overline{db}]_A$	2^{++}	$7.2-8.2$	11.19 ± 0.10	2.50	$(44-65)\%$	$< 4\%$

极点贡献提高，算符乘积展开收敛性变差

- Eur.Phys.J. C79 (2019) 489

Z_b	J^{PC}	$M_Z(\mathrm{GeV})$	$\lambda_Z(\mathrm{GeV}^5)$
$[ub]_S[\overline{db}]_S$	0^{++}	10.61 ± 0.09	$(1.10 \pm 0.17) \times 10^{-1}$
$[ub]_A[\overline{db}]_A$	0^{++}	10.60 ± 0.09	$(1.61 \pm 0.25) \times 10^{-1}$
$[ub]_{\tilde{A}}[\overline{db}]_{\tilde{A}}$	0^{++}	10.61 ± 0.09	$(1.81 \pm 0.27) \times 10^{-1}$
$[ub]_{\tilde{V}}[\overline{db}]_{\tilde{V}}$	0^{++}	11.66 ± 0.12	3.03 ± 0.31
$[ub]_S[\overline{db}]_A - [ub]_A[\overline{db}]_S$	1^{+-}	10.61 ± 0.09	$(1.08 \pm 0.16) \times 10^{-1}$
$[ub]_A[\overline{db}]_A$	1^{+-}	10.62 ± 0.09	$(1.07 \pm 0.16) \times 10^{-1}$
$[ub]_{\widetilde{A}}[\overline{db}]_A - [ub]_A[\overline{db}]_{\widetilde{A}}$	1^{+-}	10.62 ± 0.09	$(2.12 \pm 0.31) \times 10^{-1}$
$[ub]_S[\overline{db}]_{\widetilde{A}} - [ub]_{\widetilde{A}}[\overline{db}]_S$	1^{+-}	10.62 ± 0.09	$(1.08 \pm 0.16) \times 10^{-1}$
$[ub]_S[\overline{db}]_A + [ub]_A[\overline{db}]_S$	1^{++}	10.63 ± 0.09	$(1.17 \pm 0.17) \times 10^{-1}$
$[ub]_{\widetilde{V}}[\overline{db}]_V - [ub]_V[\overline{db}]_{\widetilde{V}}$	1^{++}	10.63 ± 0.09	$(1.22 \pm 0.20) \times 10^{-1}$
$[ub]_{\widetilde{A}}[\overline{db}]_A + [ub]_A[\overline{db}]_{\widetilde{A}}$	1^{++}	11.45 ± 0.14	$(8.52 \pm 1.02) \times 10^{-1}$
$[ub]_A[\overline{db}]_A$	2^{++}	10.65 ± 0.09	$(1.72 \pm 0.24) \times 10^{-1}$

其它成功描述:

$$
\begin{aligned}
X(4500) &= [cs]_A[\overline{cs}]_A \ (2\mathrm{S}) \ (\text{with } 0^{++})\,, \\
X(4700) &= [cs]_V[\overline{cs}]_V \ (\text{with } 0^{++})\,, \\
Y(4140) &= \frac{1}{\sqrt{2}}([cs]_{\tilde{V}}[\overline{cs}]_V - [cs]_V[\overline{cs}]_{\tilde{V}}) \ (\text{with } 1^{++})\,, \\
Y(4274) &= \frac{1}{\sqrt{2}}([cs]_A[\overline{cs}]_V - [cs]_V[\overline{cs}]_A) \ (\text{with } 1^{++})\,, \\
Y(4660/4630) &= \frac{1}{\sqrt{2}}([cs]_A[\overline{cs}]_P - [cs]_P[\overline{cs}]_A) \ \text{ or } \ \frac{1}{\sqrt{2}}([cs]_V[\overline{cs}]_S + [cs]_S[\overline{cs}]_V) \ (\text{with } 1^{--})\,, \\
Y(10750) &= [bq]_S \overleftrightarrow{\partial}_\mu [\overline{bq}]_S \ (\text{with } 1^{--})\,,
\end{aligned}
\tag{27}
$$

7 QCD求和规则对色单态-色单态型四夸克态质量谱的计算

利用QCD求和规则做计算，用的是定域流。对于色单态-色单态型的四夸克流，有两个色中性的集团，每个集团和一个介子有相同的量子数，虽然这个集团，我们也用介子描述，但并不是真正的物理介子。我们说的分子态，确切地说，应该叫做色单态-色单态型四夸克态。

如果一个或两个色中性集团含有P波，那么QCD求和规则计算出来的四夸克态质量大于或远大于相应两个介子的阈值。QCD求和规则不支持把$Y(4260)$看做$D\bar{D}_1$分子态。

- 矢量分子态质量： Chin.Phys. C41 (2017) 083103

	$T^2(\mathrm{GeV}^2)$	$\sqrt{s_0}(\mathrm{GeV})$	pole	$\mu(\mathrm{GeV})$	$M_Y(\mathrm{GeV})$	$\lambda_Y(10^{-2}\mathrm{GeV}^5)$
$D\bar{D}_1\ (1^{--})$	$3.2-3.6$	4.9 ± 0.1	$(45-65)\%$	2.3	4.36 ± 0.08	3.97 ± 0.54
$D\bar{D}_1\ (1^{-+})$	$3.5-3.9$	5.1 ± 0.1	$(44-63)\%$	2.7	4.60 ± 0.08	5.26 ± 0.65
$D^*\bar{D}_0^*\ (1^{--})$	$4.0-4.4$	5.3 ± 0.1	$(44-61)\%$	3.0	4.78 ± 0.07	7.56 ± 0.84
$D^*\bar{D}_0^*\ (1^{-+})$	$3.8-4.2$	5.2 ± 0.1	$(44-61)\%$	2.9	4.73 ± 0.07	6.83 ± 0.84

- arXiv:2012.11869

$Z_c(X_c)$	J^{PC}	$T^2(\text{GeV}^2)$	$\sqrt{s_0}(\text{GeV})$	$\mu(\text{GeV})$	pole	$\lvert D(10)\rvert$
$D^*\bar{D}^*$	0^{++}	$2.8-3.2$	4.55 ± 0.10	1.6	$(40-62)\%$	$\leq 1\%$
$D^*\bar{D}_s^*$	0^{++}	$2.9-3.3$	4.65 ± 0.10	1.6	$(41-63)\%$	$< 1\%$
$D_s^*\bar{D}_s^*$	0^{++}	$3.1-3.5$	4.75 ± 0.10	1.6	$(40-61)\%$	$\ll 1\%$
$D\bar{D}^*-D^*\bar{D}$	1^{++}	$2.7-3.1$	4.40 ± 0.10	1.3	$(40-63)\%$	$\ll 1\%$
$D\bar{D}_s^*-D^*\bar{D}_s$	1^{++}	$2.9-3.3$	4.55 ± 0.10	1.3	$(41-63)\%$	$\ll 1\%$
$D_s\bar{D}_s^*-D_s^*\bar{D}_s$	1^{++}	$3.0-3.4$	4.65 ± 0.10	1.3	$(42-63)\%$	$\ll 1\%$
$D\bar{D}^*+D^*\bar{D}$	1^{+-}	$2.7-3.1$	4.40 ± 0.10	1.3	$(40-63)\%$	$\ll 1\%$
$D\bar{D}_s^*+D^*\bar{D}_s$	1^{+-}	$2.9-3.3$	4.55 ± 0.10	1.3	$(41-63)\%$	$\ll 1\%$
$D_s\bar{D}_s^*+D_s^*\bar{D}_s$	1^{+-}	$3.0-3.4$	4.65 ± 0.10	1.3	$(42-63)\%$	$\ll 1\%$
$D^*\bar{D}^*$	1^{+-}	$3.0-3.4$	4.55 ± 0.10	1.6	$(42-63)\%$	$< 1\%$
$D^*\bar{D}_s^*$	1^{+-}	$3.2-3.6$	4.65 ± 0.10	1.6	$(41-61)\%$	$\ll 1\%$
$D_s^*\bar{D}_s^*$	1^{+-}	$3.3-3.7$	4.75 ± 0.10	1.6	$(42-61)\%$	$\ll 1\%$
$D^*\bar{D}^*$	2^{++}	$3.0-3.4$	4.55 ± 0.10	1.6	$(41-62)\%$	$< 1\%$
$D^*\bar{D}_s^*$	2^{++}	$3.2-3.6$	4.65 ± 0.10	1.6	$(40-60)\%$	$\ll 1\%$
$D_s^*\bar{D}_s^*$	2^{++}	$3.3-3.7$	4.75 ± 0.10	1.6	$(41-61)\%$	$\ll 1\%$

- arXiv:2012.11869

$Z_c(X_c)$	J^{PC}	M_Z(GeV)	Assignments
$D^*\bar{D}^*$	0^{++}	4.02 ± 0.09	
$D^*\bar{D}_s^*$	0^{++}	4.10 ± 0.09	
$D_s^*\bar{D}_s^*$	0^{++}	4.20 ± 0.09	
$D\bar{D}^* - D^*\bar{D}$	1^{++}	3.89 ± 0.09	? $X_c(3872)$
$D\bar{D}_s^* - D^*\bar{D}_s$	1^{++}	3.99 ± 0.09	
$D_s\bar{D}_s^* - D_s^*\bar{D}_s$	1^{++}	4.07 ± 0.09	
$D\bar{D}^* + D^*\bar{D}$	1^{+-}	3.89 ± 0.09	? $Z_c(3900)$
$D\bar{D}_s^* + D^*\bar{D}_s$	1^{+-}	3.99 ± 0.09	? $Z_{cs}(3985)$
$D_s\bar{D}_s^* + D_s^*\bar{D}_s$	1^{+-}	4.07 ± 0.09	
$D^*\bar{D}^*$	1^{+-}	4.02 ± 0.09	? $Z_c(4020)$
$D^*\bar{D}_s^*$	1^{+-}	4.11 ± 0.09	
$D_s^*\bar{D}_s^*$	1^{+-}	4.19 ± 0.09	
$D^*\bar{D}^*$	2^{++}	4.02 ± 0.09	
$D^*\bar{D}_s^*$	2^{++}	4.11 ± 0.09	
$D_s^*\bar{D}_s^*$	2^{++}	4.19 ± 0.09	

8 QCD求和规则计算四夸克态的衰变

构造三点关联函数

$$\Pi(p,q) = i^2\int d^4x d^4y e^{ipx}e^{iqy}\langle 0|T\left\{J_B(x)J_C(y)J_A^{\dagger}(0)\right\}|0\rangle\,, \quad (28)$$

where the currents $J_A(0)$ interpolate the tetraquark states A, the $J_B(x)$ and $J_C(y)$ interpolate the conventional mesons B and C, respectively,

$$\begin{aligned}\langle 0|J_A(0)|A(p')\rangle &= \lambda_A\,,\\ \langle 0|J_B(0)|B(p)\rangle &= \lambda_B\,,\\ \langle 0|J_C(0)|C(q)\rangle &= \lambda_C\,,\end{aligned} \quad (29)$$

the λ_A, λ_B and λ_C are the pole residues or decay constants.

We write the correlation functions $\Pi_H(p'^2, p^2, q^2)$ at the hadron side as

$$\Pi_H(p'^2, p^2, q^2) = \int_{(m_B+m_C)^2}^{s_A^0} ds' \int_{\Delta_s^2}^{s_B^0} ds \int_{\Delta_u^2}^{u_C^0} du \frac{\rho_H(s', s, u)}{(s'-p'^2)(s-p^2)(u-q^2)} + \int_{s_A^0}^{\infty} ds' \int_{\Delta_s^2}^{s_B^0} ds \int_{\Delta_u^2}^{u_C^0} du \frac{\rho_H(s', s, u)}{(s'-p'^2)(s-p^2)(u-q^2)} + \cdots \tag{30}$$

through dispersion relation, where the $\rho_H(s', s, u)$ are the hadronic spectral densities.

We carry out the operator product expansion at the QCD side, and write the correlation functions $\Pi_{QCD}(p'^2, p^2, q^2)$ as

$$\Pi_{QCD}(p'^2, p^2, q^2) = \int_{\Delta_s^2}^{s_B^0} ds \int_{\Delta_u^2}^{u_C^0} du \frac{\rho_{QCD}(p'^2, s, u)}{(s-p^2)(u-q^2)} + \cdots \,, \quad (31)$$

through dispersion relation, where the $\rho_{QCD}(p'^2, s, u)$ are the QCD spectral densities.

积掉四夸克态道的贡献，获得严格对偶，也是唯一正确的方法。这是我们的工作，见Eur.Phys.J. C78 (2018) 14；Eur.Phys.J. C79 (2019) 184。

$$\int_{\Delta_s^2}^{s_B^0} ds \int_{\Delta_u^2}^{u_C^0} du \frac{\rho_{QCD}(s,u)}{(s-p^2)(u-q^2)} = \int_{\Delta_s^2}^{s_B^0} ds \int_{\Delta_u^2}^{u_C^0} du \frac{1}{(s-p^2)(u-q^2)} \left[\int_{\Delta^2}^{\infty} ds' \frac{\rho_H(s',s,u)}{s'-p'^2}\right], \tag{32}$$

the Δ^2 denotes the thresholds $(m_B+m_C)^2$.

9 总结

- 利用QCD求和规则计算四夸克态、分子态的质量谱，比较成功。几乎可以协调再现所有已知XYZ粒子的质量。宽度的计算，目前工作比较少。

- 四夸克态的容纳能力远远大于分子态的容纳能力。

- 对于含P波组分的分子态，目前的计算需要改进，更需要高能物理实验数据支持。

- 由于算符乘积展开的复杂性，要获得完整的质量谱，至少8年左右。

谢谢大家，欢迎批评指正！