

2021.07.12



色散关系的反问题

Inverse problem of dispersion relation

导师：于福升、魏婷

学生：熊傲昇



目录

01

研究动机

Research Motivation

02

反问题介绍

The Introduction of
Inverse Problem

03

适定性研究

The Study of
Well-posedness

04

正则化方法

Regularization Methods

05

数值结果

Numerical Results

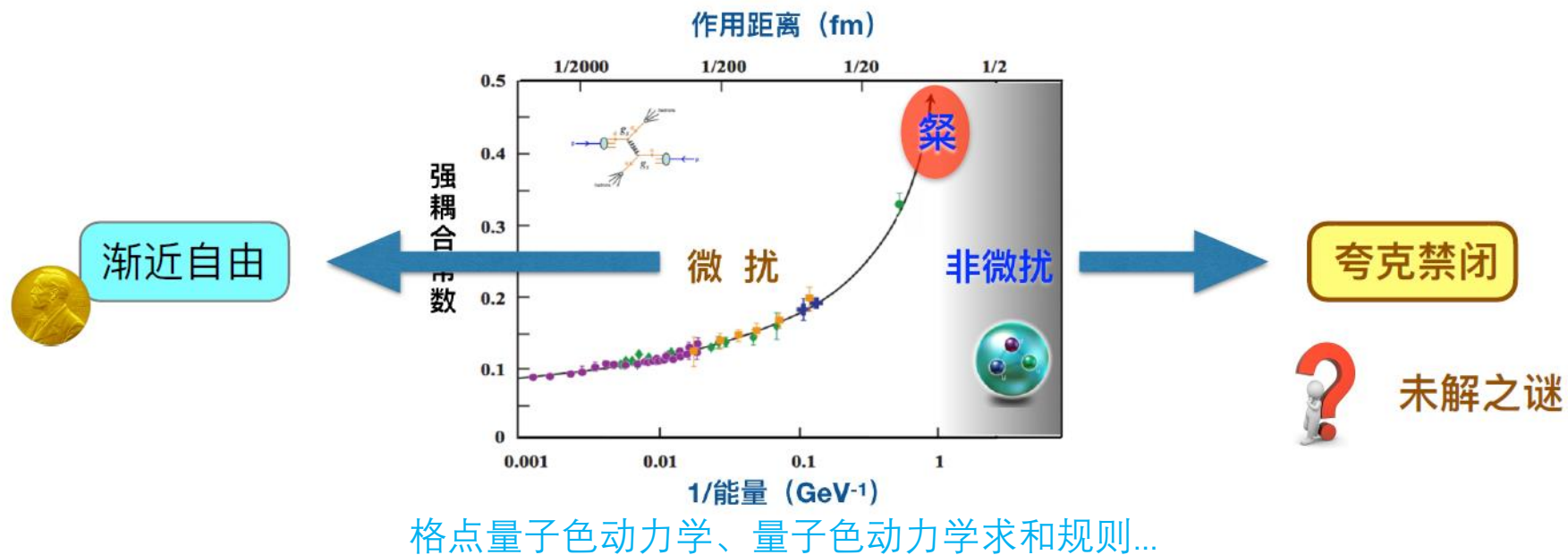
06

总结

Summary



在标准模型之中，计算**非微扰量**。



在标准模型之外，帮助寻找**新物理**。



色散关系: $Re[\Pi(s)] = \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \frac{Im[\Pi(s')]}{s-s'} ds';$

$$P \int_0^\Lambda \frac{Im[\Pi(s')]}{s-s'} ds' = \pi Re[\Pi(s)] - P \int_\Lambda^\infty \frac{Im[\Pi(s')]}{s-s'} ds'$$

非微扰未知
微扰计算得到

$$\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = g(y), y \in [c, d], c > b$$

$A: L^2(a, b) \rightarrow L^2(c, d)$ 是线性有界算子



色散关系: $Re[\Pi(s)] = \frac{1}{\pi} P \int_0^\infty \frac{Im[\Pi(s')]}{s-s'} ds';$

$$P \int_0^\Lambda \frac{Im[\Pi(s')]}{s-s'} ds' = \pi Re[\Pi(s)] - P \int_\Lambda^\infty \frac{Im[\Pi(s')]}{s-s'} ds'$$

非微扰未知
微扰计算得到

$$\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = g(y), y \in [c, d], c > b$$

$A: L^2(a, b) \rightarrow L^2(c, d)$ 是线性有界算子

当需要根据观察结果来寻找未知原因时，反问题就出现了！

- 反问题体现的是一种逆向思维；
 - 与反问题成对比的是正问题。
- (1) 扫描成像；
 - (2) 物质探测；
 - (3) 逆时反演。

刘继军.2005
肖庭延.2003



适定与不适定的概念，最初是从研究数学物理方程定解问题提出的。法国数学家对数学物理方程定解问题提出了适定性定义，是指问题具有如下三个条件：

- **解的存在性**；
- **解的唯一性**；
- **解的稳定性**，即解连续依赖于定解条件，当定解数据变化很小时，相应的解变化很小。

不满足上述三个条件之一的问题称为**不适定问题**。



适定与不适定的概念，最初是从研究数学物理方程定解问题提出的。法国数学家对数学物理方程定解问题提出了适定性定义，是指问题具有如下三个条件：

- **解的存在性**；
- **解的唯一性**；
- **解的稳定性**，即解连续依赖于定解条件，当定解数据变化很小时，相应的解变化很小。

不满足上述三个条件之一的问题称为**不适定问题**。

线性方程组的一般形式为：

$$M_{n \times n} x_{n \times 1} = m_{n \times 1}$$

上式有解当且仅当 $r_M = r_{(M, m)}$ ；当有解时，解唯一当且仅当 $r_M = n$ 。

但当矩阵 $M_{n \times n}$ 的**条件数**很大时，称该矩阵为**病态矩阵**。

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 2x_1 + 3.00001x_2 = 8.00002 \end{cases}$$

该方程组的解为 $x_1 = 1, x_2 = 2$ ；

而

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 2x_1 + 3.00001x_2 = 8.00003 \end{cases}$$

的解为 $x_1 = -0.5, x_2 = 3$ 。



不适定性是反问题的重点。解决反问题的首要是要确定是何种不适定性问题！



不适定性是反问题的重点。解决反问题的首要是要确定是何种不适定性问题！

解的存在性： 物理背景要求其解一定存在。

$$\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = g(y), y \in [c, d], c > b$$



不适定性是反问题的重点。解决反问题的首要是要确定是何种不适定性问题！

解的存在性： 物理背景要求其解一定存在。

$$\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = g(y), y \in [c, d], c > b$$

解的唯一性： 只需证明 $\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = 0$ ，只有零解。



不适定性是反问题的重点。解决反问题的首要是要确定是何种不适定性问题！

解的存在性： 物理背景要求其解一定存在。

$$\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = g(y), y \in [c, d], c > b$$

解的唯一性： 只需证明 $\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = 0$, 只有零解。

$$\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = \int_a^b \frac{1}{y} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^k f(x) dx$$

因为 $|\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^k f(x)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{b}{c}\right)^k |f(x)|, \forall x \in [a, b]$

故可由控制收敛定理得到 $y \int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{y^k} \int_a^b x^k f(x) dx = 0, \forall y \in [c, d]$

当 $d = \infty$ 时, 令 $y \rightarrow \infty$, 则可以得到 $\int_a^b f(x) dx = 0$ 。

以此类推可得 $\int_a^b x^k f(x) dx = 0, k = 0, 1, 2, 3, \dots$

当 $d < \infty$ 时, 根据其解析延拓性也可得到 $\int_a^b x^k f(x) dx = 0, k = 0, 1, 2, 3, \dots$



解的存在性： 物理背景要求其解一定存在。

解的唯一性： 只需证明 $\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = 0$, 只有零解。

$$\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = g(y), y \in [c, d], c > b$$

由于 $C[a, b]$ 在 $L^2(a, b)$ 中稠密: $\|f(x) - \tilde{f}(x)\|_{L^2(a, b)} < \varepsilon$,

由 Weierstrass 定理: $\|P_n - \tilde{f}\|_{C[a, b]} < \varepsilon$,

故可以得到: $\|f - P_n\|_{L^2(a, b)} \leq \|f - \tilde{f}\|_{L^2(a, b)} + \|\tilde{f} - P_n\|_{L^2(a, b)} \leq \varepsilon + \sqrt{b-a}\varepsilon$,

且无论 $d = \infty$ 或 $d < \infty$ 均有 $\int_a^b f(x)P_n(x) dx = 0$.

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(a, b)}^2 &= \int_a^b f^2(x) dx = \int_a^b [f^2(x) - f(x)P_n(x)] dx \leq \int_a^b |f(x)| |f(x) - P_n(x)| dx \\ &\leq \left[\int_a^b f^2(x) dx \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \|f\|_{L^2(a, b)} (\varepsilon + \sqrt{b-a}\varepsilon). \end{aligned}$$

综上, 我们得到了 $\|f\|_{L^2(a, b)} < \varepsilon + \sqrt{b-a}\varepsilon$. 即 $f(x) = 0. a. e. x \in (a, b)$.



解的存在性： 物理背景要求其解一定存在。

解的唯一性： 只需证明 $\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = 0$ ，只有零解。

$$\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = g(y), y \in [c, d], c > b$$

解的稳定性： 设 $f_1(x)$ 是对应 $g_1(y)$ 的一个解，不妨再令 $f_2(x) = f_1(x) + \sin(wx)$ ，则它对应于 $g_2(y) = g_1(y) + \int_a^b \frac{\sin(wx)}{y-x} dx$ 的解。

由Rieman-Lebesgue引理易知

$$\|g_2(y) - g_1(y)\|_{L^2}^2 = \left\{ \int_c^d \left[\int_a^b \frac{\sin(wx)}{y-x} dx \right]^2 dy \right\} \rightarrow 0, w \rightarrow \infty,$$

然而 $\|f_2(x) - f_1(x)\|_{L^2}^2$ 却不能任意小，即

$$\|f_2(x) - f_1(x)\|_{L^2}^2 = \frac{b-a}{2} - \frac{1}{2w} \sin[w(b-a)] \cos[w(b+a)],$$

$$\text{即 } \|f_2(x) - f_1(x)\|_{L^2}^2 \rightarrow \frac{b-a}{2}, w \rightarrow \infty.$$



解的存在性： 物理背景要求其解一定存在。

解的唯一性： 只需证明 $\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = 0$, 只有零解。

$$\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = g(y), y \in [c, d], c > b$$

解的稳定性： 不满足。



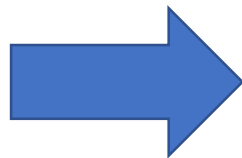
解的存在性：物理背景要求其解一定存在。

解的唯一性：只需证明 $\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = 0$ ，只有零解。

$$\int_a^b \frac{f(x)}{y-x} dx = g(y), y \in [c, d], c > b$$

解的稳定性：不满足。

解的存在性：✓
解的唯一性：✓
解的稳定性：✗



色散关系的反问题是**不适定性问题**
解的稳定性是求解的关键!



由于得到的数据一定是存在误差的

$$\|b^\delta - b\| \leq \delta$$

$Ax = b$ 为线性反问题的算子形式

如何用 b^δ 来求解 x 的近似值 x^δ ?

不能直接求解 $Ax^\delta = b^\delta$, 原因如下:

(1) 当 $b^\delta \notin A(x)$, 该方程无解;

(2) 即使 $b^\delta \in A(x)$, 由于 A^{-1} 是无界的, 当 $\delta \rightarrow 0$, 无法保证 $x^\delta \rightarrow x$ 。

同时, 为对 $b^\delta \notin A(x)$ 也能适用的方法构造近似解, 并保证 x^δ 对 b^δ 的连续性 必须构造 $A^{-1}: A(X) \rightarrow X$ 的有界近似算子 $R: B \rightarrow X$ 。



由于得到的数据一定是存在误差的

$$\|b^\delta - b\| \leq \delta$$

$Ax = b$ 为线性反问题的算子形式

如何用 b^δ 来求解 x 的近似值 x^δ ?

不能直接求解 $Ax^\delta = b^\delta$, 原因如下:

(1) 当 $b^\delta \notin A(x)$, 该方程无解;

(2) 即使 $b^\delta \in A(x)$, 由于 A^{-1} 是无界的, 当 $\delta \rightarrow 0$, 无法保证 $x^\delta \rightarrow x$ 。

同时, 为对 $b^\delta \notin A(x)$ 也能适用的方法构造近似解, 并保证 x^δ 对 b^δ 的连续性 必须构造 $A^{-1}: A(X) \rightarrow X$ 的有界近似算子 $R: B \rightarrow X$ 。

正则化算子: 一族有界线性算子 $R_\alpha: B \rightarrow X, \alpha > 0$ 称为**正则化算子**, 如果它满足

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha Ax = x$$

对于所有的 $x \in X$ 成立, α 称为**正则化参数**。



由于得到的数据一定是存在误差的

$$\|b^\delta - b\| \leq \delta$$

$Ax = b$ 为线性反问题的算子形式

如何用 b^δ 来求解 x 的近似值 x^δ ?

不能直接求解 $Ax^\delta = b^\delta$, 原因如下:

(1) 当 $b^\delta \notin A(x)$, 该方程无解;

(2) 即使 $b^\delta \in A(x)$, 由于 A^{-1} 是无界的, 当 $\delta \rightarrow 0$, 无法保证 $x^\delta \rightarrow x$ 。

同时, 为对 $b^\delta \notin A(x)$ 也能适用的方法构造近似解, 并保证 x^δ 对 b^δ 的连续性 必须构造 $A^{-1}: A(X) \rightarrow X$ 的有界近似算子 $R: B \rightarrow X$ 。

正则化算子: 一族有界线性算子 $R_\alpha: B \rightarrow X, \alpha > 0$ 称为**正则化算子**, 如果它满足

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha Ax = x$$

对于所有的 $x \in X$ 成立, α 称为**正则化参数**。

不适定性的
反问题

正则化方法

适定性的近
似反问题



从正则化算子的定义可以看出，对于精确数据 b ，当 $\alpha \rightarrow 0$ 时，正则化解 $R_\alpha y$ 能够收敛于精确解，但数据永远是存在误差的。



从正则化算子的定义可以看出，对于精确数据 b ，当 $\alpha \rightarrow 0$ 时，正则化解 $R_\alpha y$ 能够收敛于精确解，但数据永远是存在误差的。

令 $b \in A(X)$ 是精确数据，而 $b^\delta \in B$ 是误差数据。定义 $x^{\alpha,\delta} = R_\alpha y^\delta$ 是由扰动数据 b^δ 构造的 $Ax = b$ 的精确解的近似值。则有下列估计

$$\begin{aligned} \|x_\alpha^\delta - x\| &\leq \|R_\alpha b^\delta - R_\alpha b\| + \|R_\alpha Ax - x\| \leq \|R_\alpha\| \|b^\delta - b\| + \|R_\alpha Ax - x\| \\ &\leq \|R_\alpha\| \delta + \|R_\alpha Ax - x\| \end{aligned}$$

当 α 趋于零时，第一项会趋于无穷，第二项会趋于零。

需要选取合适的正则化参数 α ，使得上述误差估计极小，且在 $\delta \rightarrow 0$ 时， $\|x_\alpha^\delta - x\| \rightarrow 0$ 。



从正则化算子的定义可以看出，对于精确数据 b ，当 $\alpha \rightarrow 0$ 时，正则化解 $R_\alpha y$ 能够收敛于精确解，但数据永远是存在误差的。

令 $b \in A(X)$ 是精确数据，而 $b^\delta \in B$ 是误差数据。定义 $x^{\alpha,\delta} = R_\alpha y^\delta$ 是由扰动数据 b^δ 构造的 $Ax = b$ 的精确解的近似值。则有下列估计

$$\begin{aligned} \|x_\alpha^\delta - x\| &\leq \|R_\alpha b^\delta - R_\alpha b\| + \|R_\alpha Ax - x\| \leq \|R_\alpha\| \|b^\delta - b\| + \|R_\alpha Ax - x\| \\ &\leq \|R_\alpha\| \delta + \|R_\alpha Ax - x\| \end{aligned}$$

当 α 趋于零时，第一项会趋于无穷，第二项会趋于零。

需要选取合适的正则化参数 α ，使得上述误差估计极小，且在 $\delta \rightarrow 0$ 时， $\|x_\alpha^\delta - x\| \rightarrow 0$ 。

正则化方法的**两大支柱**：

- 1、合适的正则化算子 R_α ；
- 2、合适的正则化参数 α 。

对于不同的反问题，寻找合适的 R_α 和 α 是重点！



从正则化算子的定义可以看出，对于精确数据 b ，当 $\alpha \rightarrow 0$ 时，正则化解 $R_\alpha y$ 能够收敛于精确解，但数据永远是存在误差的。

令 $b \in A(X)$ 是精确数据，而 $b^\delta \in B$ 是误差数据。定义 $x^{\alpha,\delta} = R_\alpha y^\delta$ 是由扰动数据 b^δ 构造的 $Ax = b$ 的精确解的近似值。则有下列估计

$$\begin{aligned} \|x_\alpha^\delta - x\| &\leq \|R_\alpha b^\delta - R_\alpha b\| + \|R_\alpha Ax - x\| \leq \|R_\alpha\| \|b^\delta - b\| + \|R_\alpha Ax - x\| \\ &\leq \|R_\alpha\| \delta + \|R_\alpha Ax - x\| \end{aligned}$$

当 α 趋于零时，第一项会趋于无穷，第二项会趋于零。

需要选取合适的正则化参数 α ，使得上述误差估计极小，且在 $\delta \rightarrow 0$ 时， $\|x_\alpha^\delta - x\| \rightarrow 0$ 。

正则化方法的**两大支柱**：

- 1、合适的正则化算子 R_α ；
- 2、合适的正则化参数 α 。

对于不同的反问题，寻找合适的 R_α 和 α 是重点！

所有的正则化方法在 $\delta \rightarrow 0$ 时，均有很好的**收敛性证明**。但在实际运用中则很难实现，故需要对于不同的正则化方法进行测试。



目前主要是在运用**Tikhonov正则化方法**来进行求解该反问题，该正则化方法是目前很多正则化方法的基础。

- 主要思想是求解Tikhonov泛函

$$\|Ax_\alpha^\delta - b^\delta\|_B^2 + \alpha \|x_\alpha^\delta\|_X^2$$

的极小元。该泛函的极小元是精确解的近似值。

- 该泛函的第一项是最小二乘法，第二项是**罚项**。
- **罚项使得不适定性问题转化成近似的适定性问题。**
- Tikhonov正则化方法中的泛函具有以下**等价形式**：

$$(A^*A + \alpha I)x_\alpha^\delta = A^*b^\delta$$

进行求解运算。



目前主要是在运用**Tikhonov正则化方法**来进行求解该反问题，该正则化方法是目前很多正则化方法的基础。

- 主要思想是求解Tikhonov泛函

$$\|Ax_\alpha^\delta - b^\delta\|_B^2 + \alpha \|x_\alpha^\delta\|_X^2$$

的极小元。该泛函的极小元是精确解的近似值。

- 该泛函的第一项是最小二乘法，第二项是**罚项**。
- **罚项使得不适定性问题转化成近似的适定性问题。**
- Tikhonov正则化方法中的泛函具有以下**等价形式**：

$$(A^*A + \alpha I)x_\alpha^\delta = A^*b^\delta$$

进行求解运算。

$$x_\alpha^\delta = (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*b^\delta = R_\alpha b^\delta$$

运用**奇异系统**证明 R_α 是正则化算子



目前主要是在运用**Tikhonov正则化方法**来进行求解该反问题，该正则化方法是目前很多正则化方法的基础。

- 主要思想是求解Tikhonov泛函

$$\|Ax_\alpha^\delta - b^\delta\|_B^2 + \alpha \|x_\alpha^\delta\|_X^2$$

的极小元。该泛函的极小元是精确解的近似值。

- 该泛函的第一项是最小二乘法，第二项是**罚项**。
- **罚项使得不适定性问题转化成近似的适定性问题。**
- Tikhonov正则化方法中的泛函具有以下**等价形式**：

$$(A^*A + \alpha I)x_\alpha^\delta = A^*b^\delta$$

进行求解运算。

$$x_\alpha^\delta = (A^*A + \alpha I)^{-1}A^*b^\delta = R_\alpha b^\delta$$

运用**奇异系统**证明 R_α 是正则化算子

正则化参数 α 有**先验和后验**选取两种方式。

- 先验取法需要知道精确解的某些条件，在实际运用中会遇到诸多困难；
- 后验取法则只需要知道 b^δ 和 δ 或 b^δ 即可。

目前运用较广的则是后验选取的偏差原理：

$$\alpha^* = \sup \left\{ \alpha > 0 : \|Ax_\alpha^\delta - b^\delta\| \leq \tau\delta, \tau > 1 \right\}$$



由Tikhonov泛函的等价形式，可得到

$$\int_c^d \int_a^b \frac{f^*(x)}{(y-x)(y-z)} dx dy + \alpha f^*(z) = \int_c^d \frac{g^\delta(y)}{y-z} dy$$

对 $f^*(x)$ 做有限元插值，将上述积分式离散，即得到数值解。



由Tikhonov泛函的等价形式, 可得到

$$\int_c^d \int_a^b \frac{f^*(x)}{(y-x)(y-z)} dx dy + \alpha f^*(z) = \int_c^d \frac{g^\delta(y)}{y-z} dy$$

对 $f^*(x)$ 做有限元插值, 将上述积分式离散, 即得到数值解。

再运用偏差原理

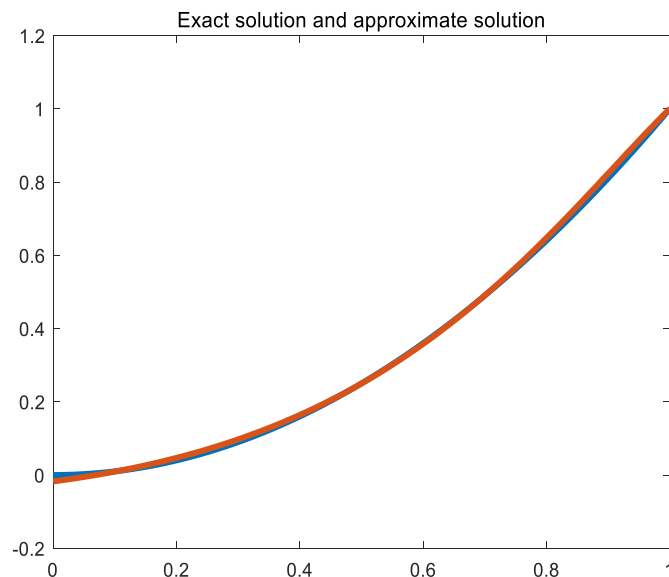
$$\sqrt{\int_c^d \left[\int_a^b \frac{f^*(x)}{y-x} dx - g^\delta(y) \right]^2 dy} \leq \tau \delta, \tau > 1$$

确认正则化参数 α 。

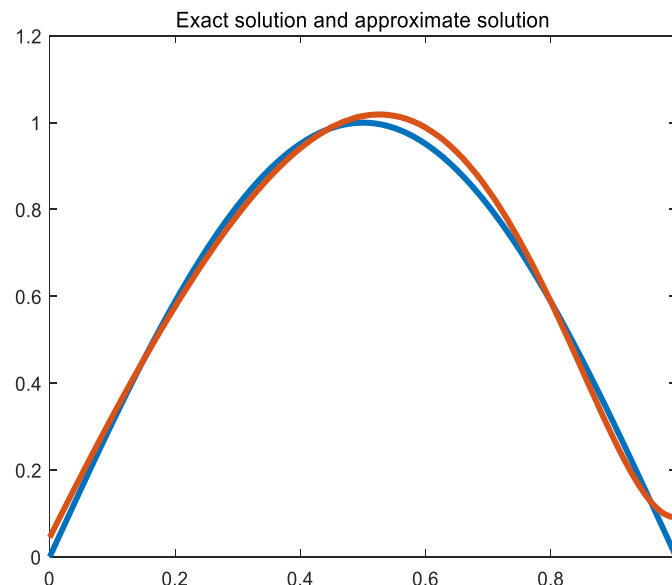


运用Tikhonov正则化方法对该反问题进行求解。并令 $a = 0, b = 1, c = 2, d = 3$ 。
我们分别令 $f(x) = x^2, f(x) = \sin(\pi x), f(x) = e^x + 1$, 并以此来验证该正则化方法的有效性。

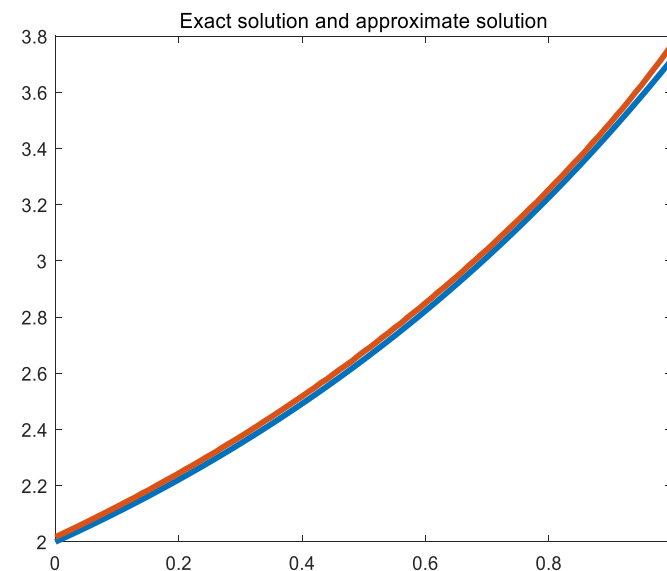
$$\int_0^1 \frac{f(x)}{y-x} dx = g(y), y \in [2, 3]$$



$$f(x) = x^2, \delta = 0.01$$



$$f(x) = \sin(\pi x), \delta = 0.01$$



$$f(x) = e^x + 1, \delta = 0.01$$



- 确定色散关系反问题的适定性;
- 运用正则化方法将不适定性问题转化成近似的适定性问题;
- 数值计算验证正则化方法的有效性。

- 计算非微扰过程的新方法, 帮助理解色禁闭;
- 对粲物理能标, 激发态和连续谱均有很高的适用性;
- 寻找新物理。



Thank You!