QCD 求和规则

杨茂志

南开大学物理科学学院

粒子物理基本专题讲座， 2021年 7 月 13 日 于河南师范大学

一）简介

- QCD求和规则（sum rule)是基于QCD的计算强子非微扰参数的唯象方法

（1）QCD求和规则创立于1970年代后期

Shifman, Vainshtein and Zakharov

（2）可计算的非微扰参数包括：强子质量，衰变常数，形状因子，强子耦合参数等

（3）目前QCD求和规则被广泛用于涉及强子的唯象研究领域

（4）几篇重要文献：

1. M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B 147, 385 (1979).

2. M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B 147, 448 (1979).

3. L.J. Reinders, H. Rubinstein and S. Yazaki, Phys. Reprots 127, No. 1 (1985) 1-97

4. A review paper: P. Colangelo, A. Khodjamirian, eprint hep-ph/0010175

QCD求和规则的基本要点

（1）强子用量子数相同的内插流来表达

矢量粒子：　$\bar{q}_1\gamma_\mu q_2$

标量粒子：　$\bar{q}_1 q_2$

赝标量粒子:　$\bar{q}_1\gamma_\mu\gamma_5 q_2$ 或 $\bar{q}_1 i\gamma_5 q_2$

（2）考虑关联函数（Correlation function) 的计算

例如：两个矢量流的关联函数定义如下：

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i\int d^4 x e^{iq\cdot x}\langle 0|T\{j_\mu(x)j_\nu(0)\}|0\rangle$$

利用算符乘积展开（OPE）将微扰和非微扰贡献分开

- 微扰部分采用微扰QCD进行计算

- 非微扰部分参数化为算符的真空凝聚或强子的光锥分布振幅

- 另一方面，关联函数也可以通过色散关系表达成强子态求和的形式

- 将QCD的计算与强子态求和表达式相匹配，可以提取出强子相关参数，如：强子质量、衰变常数、形状因子等。

- QCD求和规则的计算精度一般会在20%~30%左右

二）矢量粒子质量和衰变常数的计算

两个矢量流的关联函数为：

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \mathrm{i}\int d^4x e^{iq\cdot x}\langle 0|T\{j_\mu(x)j_\nu(0)\}|0\rangle$$
$$= (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})\Pi(q^2)$$

其中矢量流 $j_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi$

费米子场 $\psi = u, d, s, c, b$

关联函数可以在强子水平上用一系列强子态表达出来，也可以在夸克胶子水平上用QCD计算出来，微扰贡献用微扰QCD进行计算，非微扰部分用夸克、胶子凝聚表达出来

1）关联函数的强子表示

在关联函数中插入由一系列强子态构成的完备集

$$\sum_n \int d\tau_n |n\rangle\langle n| = 1$$

$$d\tau_n = \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^2 2E_n}$$

则可以证明：

$$2\mathrm{Im}\Pi_{\mu\nu}(q) = \sum_n \int d\tau_n \langle 0|j_\mu(0)|n\rangle\langle n|j_\nu(0)|0\rangle(2\pi)^4\delta^4(q-p_n)$$

证明：

$$\prod_{\mu\nu}(q) = \mathrm{i}\int d^4 x e^{iq\cdot x}\left\langle 0\left|T\{j_\mu(x)j_\nu(0)\}\right|0\right\rangle$$

$$T\{j_\mu(x)j_\nu(0)\} = \theta(x_0)j_\mu(x)j_\nu(0) + \theta(-x_0)j_\mu(0)j_\nu(x)$$

$$\begin{aligned}\prod_{\mu\nu}(q) &= i\int d^4 x e^{iq\cdot x}\left\langle 0\left|\theta(x_0)j_\mu(x)j_\nu(0) + \theta(-x_0)j_\mu(0)j_\nu(x)\right|0\right\rangle \\ &= i\sum_n\int d^4 x\int d\tau_n e^{iq\cdot x}[\theta(x_0)\left\langle 0\left|j_\mu(x)\right|n\right\rangle\left\langle n\left|j_\nu(0)\right|0\right\rangle \\ &\qquad + \theta(-x_0)\left\langle 0\left|j_\mu(0)\right|n\right\rangle\left\langle n\left|j_\nu(x)\right|0\right\rangle]\end{aligned}$$

$$j_\mu(x) = e^{i\hat{p}\cdot x}j_\mu(0)e^{-i\hat{p}\cdot x}$$

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i\sum_n \int d^4x \left[\int d\tau_n e^{iq\cdot x - ip_x\cdot x}\theta(x_0)\langle 0|j_\mu(0)|n\rangle\langle n|j_\nu(0)|0\rangle \right.$$

$$\left. + \int d\tau_n e^{iq\cdot x + ip_x\cdot x}\theta(-x_0)\langle 0|j_\mu(0)|n\rangle\langle n|j_\nu(0)|0\rangle \right]$$

$$\boxed{\delta^4(q+p_x) \to \vec{q}+\vec{p}_x = 0}$$

impossible

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i\sum_n \int d^4x \int d\tau_n e^{iq\cdot x - ip_x\cdot x}\theta(x_0)\langle 0|j_\mu(0)|n\rangle\langle n|j_\nu(0)|0\rangle$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 e^{iq_0\cdot x_0 - ip_{x0}\cdot x_0}\theta(x_0) = \int_0^{+\infty} dx_0 e^{iq_0\cdot x_0 - ip_{x0}\cdot x_0} = \int_0^{+\infty} dx_0 e^{i(q_0 - p_{x0} + i\varepsilon)\cdot x_0}$$

$$= \frac{i}{q_0 - p_{x0} + i\varepsilon}$$

$$\Pi_{\mu\nu}(q)=\sum_n\int d\tau_n \frac{-1}{q_0-p_{x0}+i\varepsilon}\langle 0|j_\mu(0)|n\rangle\langle n|j_\nu(0)|0\rangle(2\pi)^3\delta^3(q-p_x)$$

$$\frac{-1}{q_0-p_{x0}+i\varepsilon}=\mathrm{P}\frac{-1}{q_0-p_{x0}}+i\pi\delta(q_0-p_{x0})$$

两边取虚部，得

$$2\mathrm{Im}\Pi_{\mu\nu}(q)=\sum_n\int d\tau_n\langle 0|j_\mu(0)|n\rangle\langle n|j_\nu(0)|0\rangle(2\pi)^4\delta^4(q-p_n)$$

插入强子态完备集后，得到的仅是关联函数的虚部

此式称为幺正关系

考虑一个矢量粒子V

$$\langle \mathrm{V}(q)|j_\mu|0\rangle = f_\mathrm{V} m_\mathrm{V} \varepsilon_\mu^{\mathrm{V}*}$$

衰变常数　　极化矢量　　$\varepsilon^\mathrm{V}\cdot q = 0$

矢量粒子对幺正关系的贡献是

$$\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\prod_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - m_\mathrm{V}^2 g_{\mu\nu}) f_\mathrm{V}^2 \delta(q^2 - m_\mathrm{V}^2)$$

通常幺正关系是由一系列强子态和连续态贡献的总和

幺正关系总可以写成基态粒子和其它高激发态粒子以及连续态求和的形式

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\Pi(q^2) = f_V^2\delta(q^2 - m_V^2) + \rho^h(q^2)\theta(q^2 - s_0^h)$$

$s_0^h \longleftarrow$ 称为最低连续态的阈值

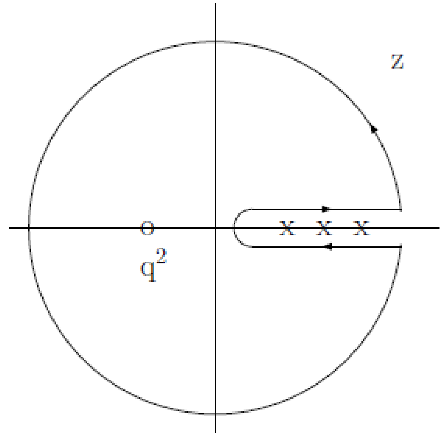
$\rho^h(q^2) \longleftarrow$ 称为谱函数

色散关系：

对任何一个解析函数Π(q^2)，根据柯西公式

$$\Pi(q^2)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C dz\frac{\Pi(z)}{z-q^2}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=R} dz\frac{\Pi(z)}{z-q^2}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^R dz\frac{\Pi(z+i\varepsilon)-\Pi(z-i\varepsilon)}{z-q^2}$$



关联函数在复平面上的围道积分图，图中$q^2<0$点在QCD中可微扰计算，$q^2>0$的正实轴上超过阈值会出现强子态的贡献，表现为关联函数的奇点

- 如果当$q^2\to\infty$时，Π(q^2)足够快地趋于0，则第一项的贡献为零
- 第二项可以表达成Π(q^2)的虚部

$$\Pi(q^2+i\varepsilon)-\Pi(q^2-i\varepsilon)=2i\,\mathrm{Im}\,\Pi(q^2)\qquad \text{at } q^2>t_{\min}$$

得到色散关系：
$$\Pi(q^2)=\frac{1}{\pi}\int_{t_{\min}}^{\infty} ds\frac{\mathrm{Im}\,\Pi(s)}{s-q^2-i\varepsilon}$$

如果关联函数虚部在s→∞时不趋于零，则色散积分是发散的，此时需要定义一个剪除后的关联函数

$$\overline{\Pi}(q^2)=\Pi(q^2)-\Pi(0)$$

色散关系变成

$$\overline{\Pi}(q^2)=\frac{q^2}{\pi}\int_{t_{\min}}^{\infty} ds\,\frac{\mathrm{Im}\,\Pi(s)}{s(s-q^2)}$$

利用幺正关系，得

$$\Pi(q^2)=\frac{q^2 f_{\mathrm{V}}^2}{m_{\mathrm{V}}^2(m_{\mathrm{V}}^2-q^2)}+q^2\int_{s_0^h}^{\infty} ds\,\frac{\rho^h(s)}{s(s-q^2)}+\Pi(0)$$

Borel 变换:

●上式的求和规则中包含知之甚少的谱函数和未知的剪除项，因此这不是一个便于应用的表达式

●Borel变换是为了解决这个问题而采取的数学步骤

这个变换的定义是:

$$\Pi(M^2) \equiv B_{M^2}\Pi(q^2) = \lim_{\substack{-q^2, n\to\infty \\ -q^2/n=M^2}} \frac{(-q^2)^{(n+1)}}{n!}\left(\frac{d}{dq^2}\right)^n \Pi(q^2)$$

两个常用的变换结果:

$$B_{M^2}(q^2)^k = 0$$

$$B_{M^2}\frac{1}{(s-q^2)^k} = \frac{1}{(k-1)!}\frac{1}{M^{2(k-1)}}e^{-s/M^2}$$

for k>0

对幺正关系给出的求和规则作Borel变换

$$\Pi(q^2) = \frac{q^2 f_V^2}{m_V^2(m_V^2 - q^2)} + q^2 \int_{s_0^h}^{\infty} ds \frac{\rho^h(s)}{s(s-q^2)} + \Pi(0)$$

得

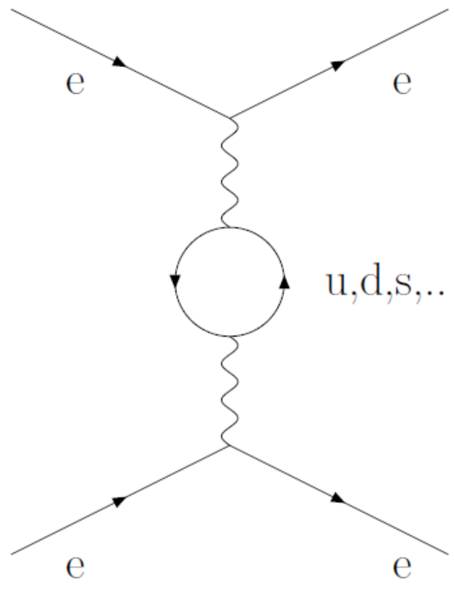
$$\Pi(M^2) = f_V^2 e^{-m_V^2/M^2} + \int_{s_0^h}^{\infty} ds \rho^h(s) e^{-s/M^2}$$

- Borel变换去掉了未知的减除项并e指数型压低了高激发态和连续态的贡献

2）在QCD中计算关联函数

$$\Pi_{\mu\nu}(q)=\mathrm{i}\int d^4x e^{iq\cdot x}\langle 0|T\{j_\mu(x)j_\nu(0)\}|0\rangle$$

$$Q^2\equiv -q^2$$



e-e 散射过程中正反夸克产生与湮灭贡献的图

- 在 Q^2取值很大的区域，正反夸克远离质壳，关联函数以QCD微扰效应为主，此时关联函数可用微扰理论计算

关联函数中的编时乘积算符可以作算符乘积展开，按算符量纲从低到高排列

$$i\int d^4x e^{iq\cdot x} T\{j_\mu(x) j_\nu(0)\}$$

$$= (q_\mu q_\nu - q^2 g_{\mu\nu})(C_0 I + C_3\overline{\psi}\psi + C_4 G^a_{\alpha\beta}G^{a\alpha\beta} + C_5\overline{\psi}\sigma_{\alpha\beta}T^a G^{a\alpha\beta}\psi$$

$$+ C_6\overline{\psi}\Gamma\psi\overline{\psi}\Gamma'\psi + \cdots$$

其中的C_i称为Wilson系数

$I \longleftarrow$ 为单位算符，量纲为0

$\overline{\psi}\psi \longleftarrow$ 为正反夸克算符，量纲为3

$G^a_{\alpha\beta}G^{a\alpha\beta} \longleftarrow$ 为胶子复合算符，量纲为4

$\overline{\psi}\sigma_{\alpha\beta}T^a G^{a\alpha\beta}\psi \longleftarrow$ 为夸克胶子混合算符，量纲为5

$\overline{\psi}\Gamma\psi\overline{\psi}\Gamma'\psi \longleftarrow$ 为4夸克算符，量纲为6

求上述算符乘积展开的真空期望值，就会得到关联函数的QCD表达式

$$\Pi_{\mu\nu}(q)=\boldsymbol{i}\int d^4xe^{iq\cdot x}\langle 0|T\{j_\mu(x)j_\nu(0)\}|0\rangle$$

$$=(q_\mu q_\nu-q^2g_{\mu\nu})(C_0I+C_3\langle 0|\overline{\psi}\psi|0\rangle+C_4\langle 0|G^a_{\alpha\beta}G^{a\alpha\beta}|0\rangle+C_5\langle 0|\overline{\psi}\sigma_{\alpha\beta}T^aG^{a\alpha\beta}$$

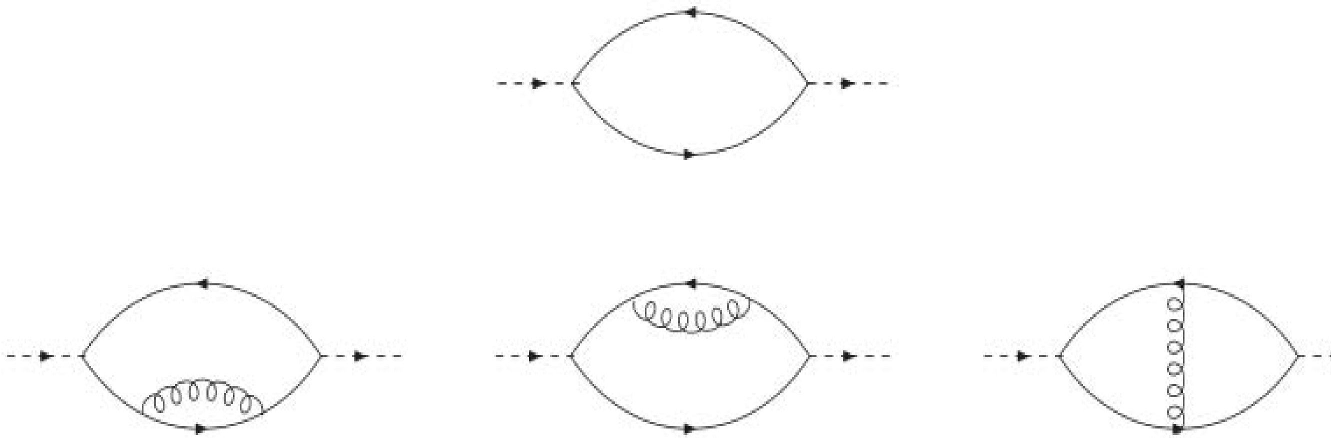
$$+C_6\langle 0|\overline{\psi}\Gamma\psi\overline{\psi}\Gamma'\psi|0\rangle+\cdots$$

Vacuum condensates

Γ，Γ' ← 代表可能的颜色空间和旋量空间的矩阵

(a) 单位算符I的贡献（微扰贡献）：

单位算符的贡献可以采用微扰QCD如右图所示的费曼图加以计算



$$I^0(q^2) \approx \frac{q^2}{4\pi^2}(1+\frac{\alpha_s}{\pi})\int_{4m^2}^{\infty}\frac{ds}{s(s-q^2)}$$

$$\approx -\frac{1}{4\pi^2}(1+\frac{\alpha_s}{\pi})\ln\frac{-q^2}{4m^2}$$

$m^2 << Q^2$

微扰贡献图，第一行为 QCD零阶贡献，第二行为 QCD1阶贡献

(b) QCD真空凝聚的贡献

●QCD系统是个高度非线性的相互作用系统，其真空态中充满着长程振荡模式的夸克、胶子场

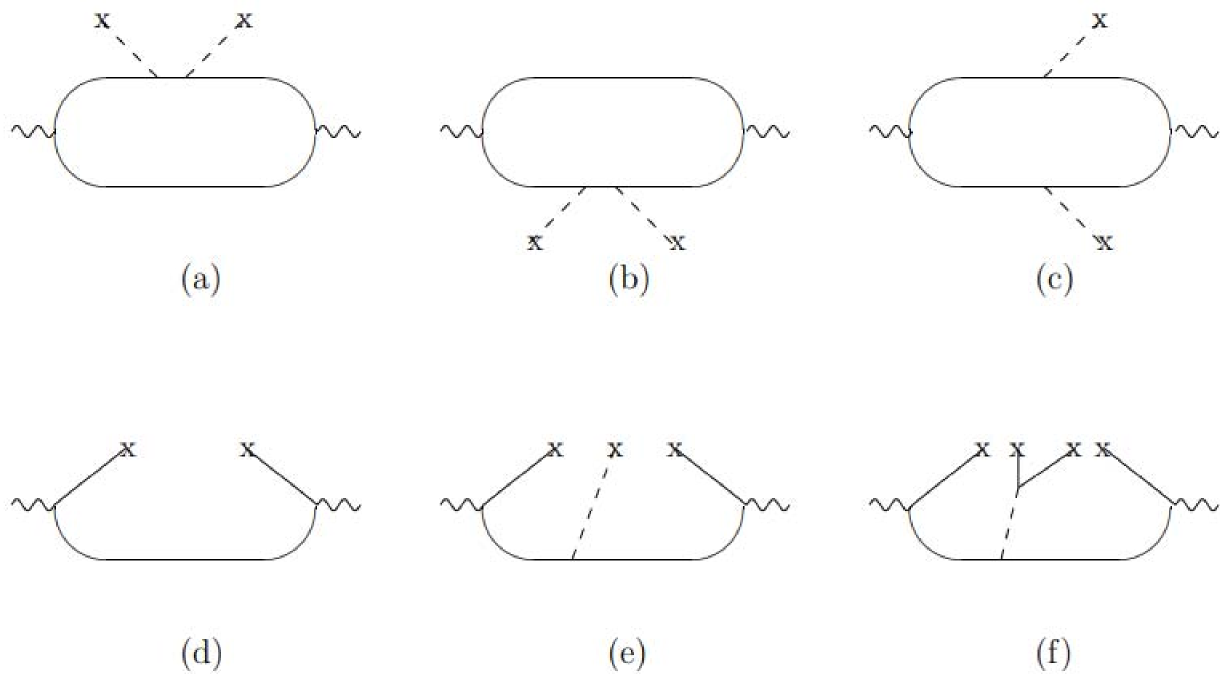
振荡波长～$1/\Lambda_{QCD}$

●在QCD真空中传播的夸克、胶子会与真空模式的夸克、胶子发生相互作用

a) 对于大$Q^2 >> \Lambda^2_{QCD}$，关联函数中正反夸克对的产生和湮灭点之间是短程的，不改变真空的长程性质

b) 具有大动量的夸克近乎与静态的真空中的夸克胶子场发生相互作用

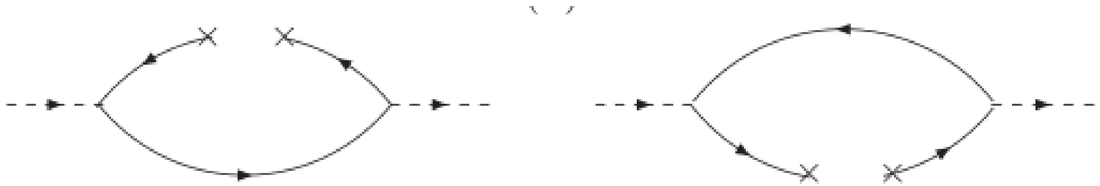
c) 对应的相互作用图如下一页



真空中胶子场 (a,b,c)，夸克场 (d)，夸克-胶子 (e)，4-夸克场 (f) 对关联函数的贡献

对于重夸克，由于其超短程性，重夸克场与真空中软场的相互作用极小，可以忽略

夸克凝聚图的计算



$$\Pi_{\mu\nu}^{(\overline{\psi}\psi)}(q)=i\int d^4x e^{iq\cdot x}\langle 0|\{\overline{\psi}^i(x)\gamma_\mu S^{ij}(x,0)\gamma_\nu\psi^j(0)$$
$$+\overline{\psi}^j(0)\gamma_\nu S^{ji}(0,x)\gamma_\mu\psi^i(x)|0\rangle$$

$S_{\alpha\beta}^{ij}(x,0) \longleftarrow$ 是坐标空间夸克传播子

i，j 是颜色指标，α，β是狄拉克旋量指标

Ψ作为外场，它与真空中的软场交换动量，因此其动量可忽略

$$
\begin{aligned}
\Pi_{\mu\nu}^{(\overline{\psi}\psi)}(q) &= i\int d^4x e^{iq\cdot x}\langle 0|\{\overline{\psi}^i(x)\gamma_\mu S^{ij}(x,0)\gamma_\nu \psi^j(0) \\
&\qquad + \overline{\psi}^j(0)\gamma_\nu S^{ji}(0,x)\gamma_\mu \psi^i(x)|0\rangle \\
&= i\int d^4x e^{iq\cdot x}\{\langle 0|\{\overline{\psi}_\alpha^i(x)\psi_\beta^j(0)|0\rangle[\gamma_\mu S^{ij}(x,0)\gamma_\nu]_{\alpha\beta} \\
&\qquad + \langle 0|\overline{\psi}_\alpha^j(0)\psi_\beta^i(x)|0\rangle[\gamma_\nu S^{ji}(0,x)\gamma_\mu]_{\alpha\beta}\}
\end{aligned}
$$

$\psi(x)$, $\overline{\psi}(x)$ **可以在*x*=0点展开，展开时考虑到QCD相互作用**

$$\psi(x) = \psi(0) + x^{\rho} D_{\rho} \psi(0) + \cdots$$

$$\overline{\psi}(x) = \overline{\psi}(0) + \overline{\psi}(0) \overleftarrow{D}_{\rho} x^{\rho} + \cdots$$

$\boldsymbol{D_{\rho}}$是协变导数

$$D_{\rho} = \partial_{\rho} - igT^{a} A_{\mu}^{a}$$

把场的展开式代入关联函数，会遇到如下的矩阵元

$$\left\langle 0 \middle| \overline{\psi}_{\alpha}^{i} \psi_{\beta}^{j} \middle| 0 \right\rangle$$

$$\left\langle 0 \middle| \overline{\psi}_{\alpha}^{i} \vec{D}_{\rho} \psi_{\beta}^{j} \middle| 0 \right\rangle \qquad \left\langle 0 \middle| \overline{\psi}_{\alpha}^{i} \overleftarrow{D}_{\rho} \psi_{\beta}^{j} \middle| 0 \right\rangle$$

考虑到洛伦兹协变性，上述场的矩阵元只能由

$$I,\ \gamma_\mu,\ \gamma_\mu\gamma_5,\ \sigma_{\mu\nu},\ \sigma_{\mu\nu}\gamma_5$$

线性组合而成，因此

$$\langle 0|\overline{\psi}_\alpha^i \psi_\beta^j|0\rangle = A\delta^{ij}\delta_{\alpha\beta}$$

两边求迹得

$$A=\frac{1}{12}\langle 0|\overline{\psi}\psi|0\rangle$$

所以

$$\langle 0|\overline{\psi}_\alpha^i \psi_\beta^j|0\rangle = \delta^{ij}\delta_{\alpha\beta}\frac{1}{12}\langle 0|\overline{\psi}\psi|0\rangle$$

$$\langle 0|\overline{\psi}^{i}_{\alpha}\vec{D}_{\rho}\psi^{j}_{\beta}|0\rangle = B\delta^{ij}(\gamma_{\rho})_{\beta\alpha}$$

$$\langle 0|\overline{\psi}^{i}_{\alpha}\overleftarrow{D}_{\rho}\psi^{j}_{\beta}|0\rangle = \overline{B}\,\delta^{ij}(\gamma_{\rho})_{\beta\alpha}$$

上式两边同乘以 $\delta^{ij}(\gamma_{\rho})_{\beta\alpha}$ **可以求得**

$$B = \frac{1}{48}\langle 0|\overline{\psi}\vec{\not{D}}\psi|0\rangle = -\frac{im}{48}\langle 0|\overline{\psi}\psi|0\rangle$$

$$\overline{B} = \frac{im}{48}\langle 0|\overline{\psi}\psi|0\rangle$$

其中利用了狄拉克方程

$$\vec{\not{D}}\psi = -im\psi$$

$$0\left|\overline{\psi}^{i}_{\alpha}(x)\psi^{j}_{\beta}(0)\right|0\rangle=\delta_{ij}\{\frac{1}{12}\langle 0|\overline{\psi}\psi|0\rangle[\delta_{\beta\alpha}+\frac{im}{48}\not{x}_{\beta\alpha}-\frac{m^{2}}{96}x^{2}\delta_{\beta\alpha}]$$

$$+\frac{1}{192}x^{2}g\langle 0|\overline{\psi}T^{a}G^{a}_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\psi|0\rangle\delta_{\beta\alpha}+\cdots]\}$$

$$\langle 0\left|\overline{\psi}^{i}_{\alpha}(x)\psi^{j}_{\beta}(y)\right|0\rangle=\delta_{ij}\{\frac{1}{12}\langle 0|\overline{\psi}\psi|0\rangle[\delta_{\beta\alpha}+\frac{im}{48}(\not{x}-\not{y})_{\beta\alpha}$$

$$-\frac{m^{2}}{96}(x-y)^{2}\delta_{\beta\alpha}]+\frac{1}{192}(x-y)^{2}$$

$$\cdot g\langle 0|\overline{\psi}T^{a}G^{a}_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\psi|0\rangle\delta_{\beta\alpha}+\cdots]\}$$

对坐标*x*积分，可得夸克凝聚对关联函数的贡献

$$\Pi_{\mu\nu}^{(\overline{\psi}\psi)}(q)=(q_{\mu}q_{\nu}-q^{2}g_{\mu\nu})\frac{2m}{q^{4}}\langle 0|\overline{\psi}\psi|0\rangle$$

对于含胶子凝聚的更高阶算符的计算，需要用到一个很有用的规范，固定点规范

$$(x-x_0)_{\mu}A^{a\mu}(x)=0$$

在固定点规范下，胶子场$A^{a\mu}$可以用规范场张量$G^{a}{}_{\mu\nu}$表示出来。取x_0=0

$$A_{\mu}^{a}(x)=\int_0^1 d\alpha\alpha x^{\rho}G_{\rho\mu}^{a}(\alpha x)$$

$$=\frac{1}{2}x^{\rho}G_{\rho\mu}^{a}(0)+\frac{1}{3}x^{\alpha}x^{\rho}[\hat{D}_{\alpha}G_{\rho\mu}(0)]^{a}+\cdots$$

证明：

① $$\frac{d}{d\alpha}(\alpha A_\mu^a(\alpha x)) = A_\mu^a(\alpha x) + \alpha \frac{d}{d\alpha} A_\mu^a(\alpha x)$$

令：$y = \alpha x$

$$= A_\mu^a(\alpha x) + \alpha \frac{\partial y_\rho}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial y_\rho} A_\mu^a(\mathrm{y})$$

$$= A_\mu^a(\alpha x) + y_\rho \frac{\partial}{\partial y_\rho} A_\mu^a(\mathrm{y})$$

M.A. Shifman, Nucl. Phys. B173 (1980) 13

② $$y^{\rho}G^{a}_{\rho\mu}(y)=y^{\rho}[\partial_{\rho}A^{a}_{\mu}(y)-\partial_{\mu}A^{a}_{\rho}(y)+gf^{abc}A^{b}_{\rho}(y)A^{c}_{\mu}(y)]$$
$$=y^{\rho}\partial_{\rho}A^{a}_{\mu}(y)-y^{\rho}\partial_{\mu}A^{a}_{\rho}(y)+gf^{abc}y^{\rho}A^{b}_{\rho}(y)A^{c}_{\mu}(y)$$

固定点规范下： $y^{\rho}A^{b}_{\rho}(y)=0$

$$y^{\rho}G^{a}_{\rho\mu}(y)=y^{\rho}\partial_{\rho}A^{a}_{\mu}(y)-y^{\rho}\partial_{\mu}A^{a}_{\rho}(y)$$
$$=y^{\rho}\partial_{\rho}A^{a}_{\mu}(y)+A^{a}_{\mu}(y)$$

比较①和②的结果，可知它们的结果相等

$$\frac{d}{d\alpha}(\alpha A^{a}_{\mu}(\alpha x))=y^{\rho}G^{a}_{\rho\mu}(y)$$

上式两边对α取从0到1的积分

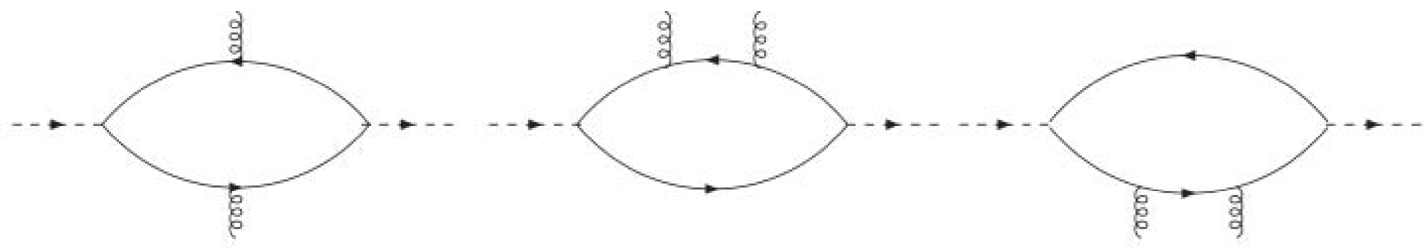
$$A_\mu^a(x) = \int_0^1 d\alpha y^\rho G_{\rho\mu}^a(y)$$

$$= \int_0^1 d\alpha \alpha x^\rho G_{\rho\mu}^a(\alpha x)$$

采用固定点规范：

$$A_\mu^a(x) = \frac{1}{2} x^\rho G_{\rho\mu}^a(0) + \frac{1}{3} x^\alpha x^\rho [\hat{D}_\alpha G_{\rho\mu}(0)]^a + \cdots$$

可以方便地计算包含胶子场凝聚图的贡献



双胶子凝聚图会出现矩阵元

$$\langle 0|G^a_{\alpha\sigma}G^b_{\beta\rho}|0\rangle = \frac{1}{96}\langle 0|GG|0\rangle \delta_{ab}(g_{\alpha\beta}g_{\sigma\rho} - g_{\alpha\rho}g_{\sigma\beta})$$

$$\langle 0|GG|0\rangle \equiv \langle 0|G^a_{\mu\nu}G^{a\,\mu\nu}|0\rangle$$

胶子-双夸克混合凝聚图会出现矩阵元

$$\langle 0|\overline{\psi}^i_\alpha(x)\psi^j_\beta(0)G^a_{\mu\nu}|0\rangle$$

$$\langle 0|\overline{\psi}^i_\alpha(0)\psi^j_\beta(x)G^a_{\mu\nu}|0\rangle$$

通过将夸克场作协变展开，这两个矩阵元可计算成为

$$\langle 0|\overline{\psi}_{\alpha}^{i}(x)\psi_{\beta}^{j}(0)G_{\mu\nu}^{a}|0\rangle = \frac{1}{192}\langle 0|\overline{\psi}\sigma TG\psi|0\rangle(\sigma_{\mu\nu})_{\beta\alpha}T_{ji}^{a} + x^{\rho}\Big[-\frac{g}{96\times 9}\langle\overline{\psi}\psi\rangle^{2}(g_{\rho\mu}\gamma_{\nu} - g_{\rho\nu}\gamma_{\mu})$$

$$+i\left(-\frac{g}{96\times 9}\langle\overline{\psi}\psi\rangle^{2} - \frac{m}{96\times 4}\langle\overline{\psi}\sigma TG\psi\rangle\right)\varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\gamma_{5}\gamma^{\sigma}\Big]_{\beta\alpha}T_{ji}^{a}$$

$$\langle 0|\overline{\psi}_{\alpha}^{i}(0)\psi_{\beta}^{j}(x)G_{\mu\nu}^{a}|0\rangle = \frac{1}{192}\langle 0|\overline{\psi}\sigma TG\psi|0\rangle(\sigma_{\mu\nu})_{\beta\alpha}T_{ji}^{a} + x^{\rho}\Big[-\frac{g}{96\times 9}\langle\overline{\psi}\psi\rangle^{2}(g_{\rho\mu}\gamma_{\nu} - g_{\rho\nu}\gamma_{\mu})$$

$$+i\left(\frac{g}{96\times 9}\langle\overline{\psi}\psi\rangle^{2} + \frac{m}{96\times 4}\langle\overline{\psi}\sigma TG\psi\rangle\right)\varepsilon_{\rho\mu\nu\sigma}\gamma_{5}\gamma^{\sigma}\Big]_{\beta\alpha}T_{ji}^{a}$$

其中 $$\langle 0|\overline{\psi}\sigma TG\psi|0\rangle \equiv \langle 0|\overline{\psi}_{\alpha}^{i}\sigma_{\mu\nu}T_{ij}^{a}G^{a\mu}\psi_{\alpha}^{j}|0\rangle$$

经过仔细计算可以得到关联函数的算符乘积展开(OPE)的结果，准确到d=6的算符

$$\Pi(q^2) = -\frac{1}{4\pi^2}(1+\frac{\alpha_s}{\pi})\ln\frac{-q^2}{4m^2} + \frac{2m\langle\overline{\psi}\psi\rangle}{q^4} + \frac{\alpha_s\langle G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}\rangle}{12\pi q^4}$$

$$+\frac{m^3}{3q^8}\langle g_s\overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}T^aG^{a\mu\nu}\psi\rangle + \frac{2\pi\alpha_s}{q^6}[\langle(\overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5T^a\psi)(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma_5T^a\psi)\rangle$$

$$+\frac{2}{9}\langle(\overline{\psi}\gamma_\mu T^a\psi)(\overline{\psi}\gamma^\mu T^a\psi)\rangle$$

$$\psi = u, d, s$$

$$\langle O\rangle \equiv \langle 0|O|0\rangle$$

●各种场的真空凝聚是由QCD真空的物理性质决定的，其值不能从QCD的微扰理论计算出来

●轻夸克真空凝聚可以根据手征对称性自发破缺理论得到，而其它凝聚值是早期从QCD求和规则对Ψ，Ψ' ...质量和衰变常数的计算与实验值的比较中拟合出来的

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = -(240 \pm 10\,\mathrm{MeV})^3$$

$$\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^a_{\mu\nu} G^{a\mu\nu} \right\rangle = (0.012\,\mathrm{GeV}^4) \pm 30\%$$

$$\left\langle g_s \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} T^a G^{a\mu\nu} \psi \right\rangle = m_0^2 \langle\bar{\psi}\psi\rangle$$

$$m_0^2(\mu = 1\,\mathrm{GeV}) = 0.8 \pm 0.2\,\mathrm{GeV}^2$$

4夸克凝聚，需要做一个中间插入真空态为主要贡献的假设

$$\langle \overline{\psi}\Gamma_r\psi\overline{\psi}\Gamma_s\psi\rangle = (\Gamma_r)_{\alpha\beta}(\Gamma_s)_{\rho\sigma}\langle \overline{\psi}_\alpha\psi_\beta\overline{\psi}_\rho\psi_\sigma\rangle$$

$$\cong (\Gamma_r)_{\alpha\beta}(\Gamma_s)_{\rho\sigma}\left(\langle \overline{\psi}_\alpha\psi_\beta\rangle\langle \overline{\psi}_\rho\psi_\sigma\rangle - \langle \overline{\psi}_\alpha\psi_\sigma\rangle\langle \overline{\psi}_\rho\psi_\beta\rangle\right)$$

$$= (\Gamma_r)_{\alpha\beta}(\Gamma_s)_{\rho\sigma}\left(\frac{1}{12}\delta_{\alpha\beta}\langle \overline{\psi}\psi\rangle\frac{1}{12}\delta_{\rho\sigma}\langle \overline{\psi}\psi\rangle - \frac{1}{12}\delta_{\alpha\sigma}\langle \overline{\psi}_\alpha\psi_\sigma\rangle\frac{1}{12}\delta_{\rho\beta}\langle \overline{\psi}_\rho\psi_\beta\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{(12)^2}\left\{ \boldsymbol{Tr(}\Gamma_r\boldsymbol{)Tr(}\Gamma_s) - \boldsymbol{Tr(}\Gamma_r\Gamma_s)\right\}\langle \overline{\psi}\psi\rangle^2$$

作Borel变换后，强子语言对关联函数的描述为

$$\Pi(M) = f_{\mathrm{V}}^{2} e^{-m_{\mathrm{V}}^{2}/M^{2}} + \int_{s_0^h}^{\infty} ds \rho^h(s) e^{-s/M^2}$$

对夸克-胶子语言描述的关联函数Π(q²)也作Borel变换

$$\Pi(M) = \frac{1}{4\pi^2}\left(1+\frac{\alpha_s(M)}{\pi}\right)\int_0^{\infty} ds e^{-s/M^2} + \frac{2m\langle\overline{\psi}\psi\rangle}{M^2}$$

$$+\frac{\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^{a} G^{a\mu\nu}\right\rangle}{12M^2} - \frac{112\pi}{81}\frac{\alpha_s\langle\overline{\psi}\psi\rangle^2}{M^2}$$

把两种语言的描述等同起来，得到

$$f_V^2 e^{-m_V^2/M^2} + \int_{s_0^h}^{\infty} ds \rho^h(s) e^{-s/M^2} = \frac{1}{4\pi^2}\left(1+\frac{\alpha_s(M)}{\pi}\right)\int_0^{\infty} ds e^{-s/M^2}$$

$$+\frac{2m\langle\overline{\psi}\psi\rangle}{M^2}+\frac{\left\langle\frac{\alpha_s}{\pi}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}\right\rangle}{12M^2}-\frac{112\pi}{81}\frac{\alpha_s\langle\overline{\psi}\psi\rangle^2}{M^4}$$

- 在这个等式中，左边有关于强子高激发态、连续态谱函数的积分；右边有关于微扰贡献色散关系的积分

- 强子高激发态、连续态谱函数是未知函数

夸克-强子对偶性假设 (Quark-hadron duality)

在q² →-∞的极限下，关联函数将完全为微扰贡献所主导，凝聚贡献可以忽略

$$\Pi(q^2) \to \Pi^{(pert)}(q^2)$$

此时，我们会有一个约略的等式

$$q^2 \int_{s_{\min}}^{\infty} ds \frac{\operatorname{Im}\Pi(s)}{s(s-q^2)} \approx q^2 \int_{s_{\min}}^{\infty} ds \frac{\operatorname{Im}\Pi^{(pert)}(s)}{s(s-q^2)}$$

Global quark-hadron duality

$$\operatorname{Im}\Pi(s) \to \operatorname{Im}\Pi^{(pert)}(s) \quad \text{at} \quad s \to \infty$$

local quark-hadron duality

有了夸克-强子对偶关系，我们有理由假设，对于足够大的$Q^2=-q^2$，有如下的关系

$$q^2\int_{s_0^h}^{\infty} ds\frac{\rho^h(s)}{s(s-q^2)} \approx \frac{q^2}{\pi}\int_{s_0}^{\infty} ds\frac{\mathrm{Im}\,\Pi^{(pert)}(s)}{s(s-q^2)}$$

其中的s_0是一个积分的阈值参数

$$s_0 \neq s_0^h$$

S_0需要在计算中通过拟合得到

对偶等式两边作Borel 变换

$$\int_{s_0^h}^{\infty} ds \rho^h(s) e^{-s/M^2} \approx \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} ds \, \mathrm{Im}\, \Pi^{(pert)}(s) e^{-s/M^2}$$

这是QCD sum rule中所采用的夸克-强子对偶近似

利用上述夸克-强子对偶近似，可以从关联函数的等式中减除掉谱函数的贡献

具体考虑V=ρ介子，即

$$j_\mu^\rho = \frac{1}{2}(\bar{u}\gamma_\mu u - \bar{d}\gamma_\mu d)$$

$$\left\langle \rho^0(p) \middle| j_\mu^\rho \middle| 0 \right\rangle = \frac{f_\rho}{\sqrt{2}} m_\rho \varepsilon_\mu^*$$

得到ρ衰变常数的求和规则表达式

$$f_\rho^2 = M^2 e^{m_\rho^2/M^2} [\frac{1}{4\pi^2}(1+\frac{\alpha_s(M)}{\pi})(1-e^{-s_0^\rho/M^2}) + \frac{(m_u+m_d)\langle\bar{\psi}\psi\rangle}{M^4} + \frac{\left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \right\rangle}{12M^4} - \frac{112\pi}{81}\frac{\alpha_s\langle\bar{\psi}\psi\rangle^2}{M^6}]$$

把上式对$1/M^2$求导可以得到关于质量的求和规则表达式

Borel参数M和阈值参数s_0^h的选取:

●衰变参数QCD求和规则的结果依赖于Borel 参数和ρ介子道高激发态阈值，要得到确定的结果，需要确定这两个参数的取值范围。

●在QCD求和规则中，这两个参数是相互关联的、同时确定的。

a) 阈值参数参数s_0^h

● 根据ρ矢量介子道激发态的实验测量数据， ρ矢量介子激发态出现在

$$s \sim 1.5 - 2.0\,\mathrm{GeV}^2$$

● ρ道阈值参数应该在上述范围内

b) Borel参数M

●前述所得到的衰变常数的求和规则基于算符乘积展开，并截断到有限量纲的算符凝聚，算符凝聚的贡献以$1/M^2$的方式依赖于Borel参数，因此M应有一个下限，以保证高量纲算符的贡献小

●求和规则对高激发态和连续态的依赖是e^{-s/M^2}指数压低的形式出现的，为了使求和规则不严重依赖于高激发态和连续态，Borel参数应有一个上限

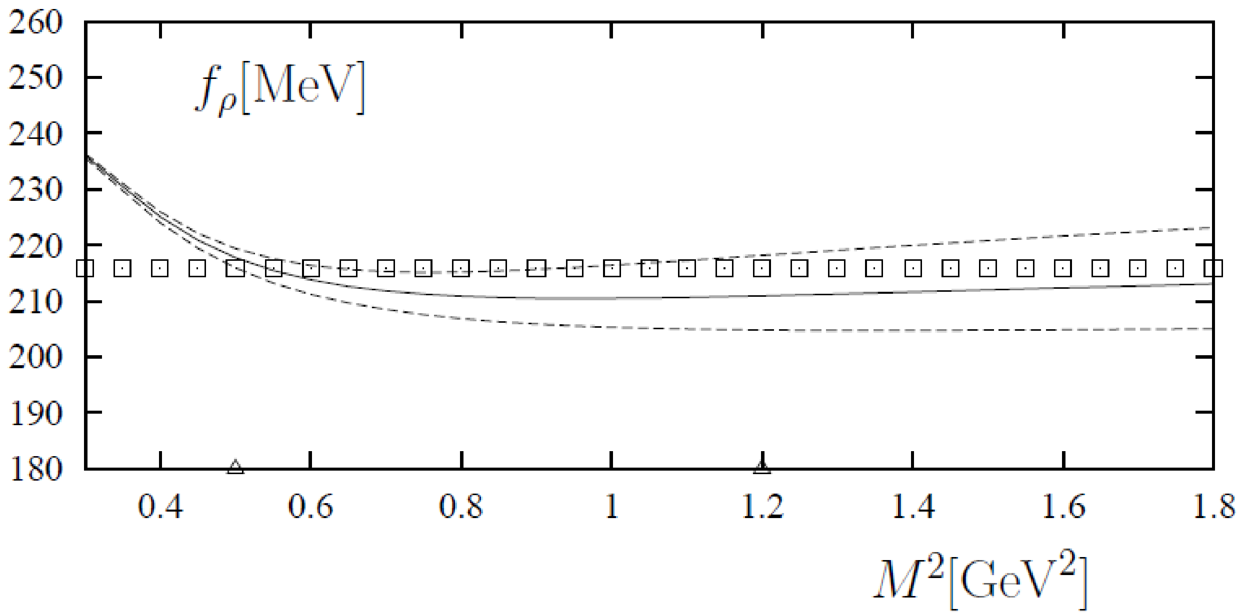
$$M_d^2 < M^2 < M_u^2$$

●经数值分析、检查，发现当

$$0.5 < M^2 < 1.2\,\mathrm{GeV}^2$$

量纲为6的算符的贡献小于10%，超出阈值的谱函数积分的贡献小于30%

●在这个窗口内，需要进一步选择阈值参数，使得求和规则对Borel参数的依赖具有最大的稳定性



ρ介子衰变常数随Borel参数的变化曲线，实线是s_0^{ρ}=1.7 GeV^2，上下方虚线分别为s_0^{ρ}=1.5和2.0 GeV^{2}的情况。方格线是实验测量中心值，横轴上的两个三角标志是Borel参数窗口上下限。

数值结果和误差估计

1）从图中实线看，在Borel参数窗口内

$$f_\rho^{\text{Borel}} = 213 \pm 3\ \text{MeV}$$

2）真空凝聚的不确定性会引起±1%的变化

3）量纲d>6算符的贡献假设不大于d=6算符的贡献，由此可估计算符乘积展开截断引起的误差为±5%

4）强耦合常数标度的不确定性估计引起±3%的误差

把这些误差全部线性相加，给出最保守的误差为±10%，最后

$$f_\rho = 213 \pm 20\ \text{MeV}$$

实验测量值：$f_\rho = 216 \pm 5\ \text{MeV}$

π介子的衰变常数

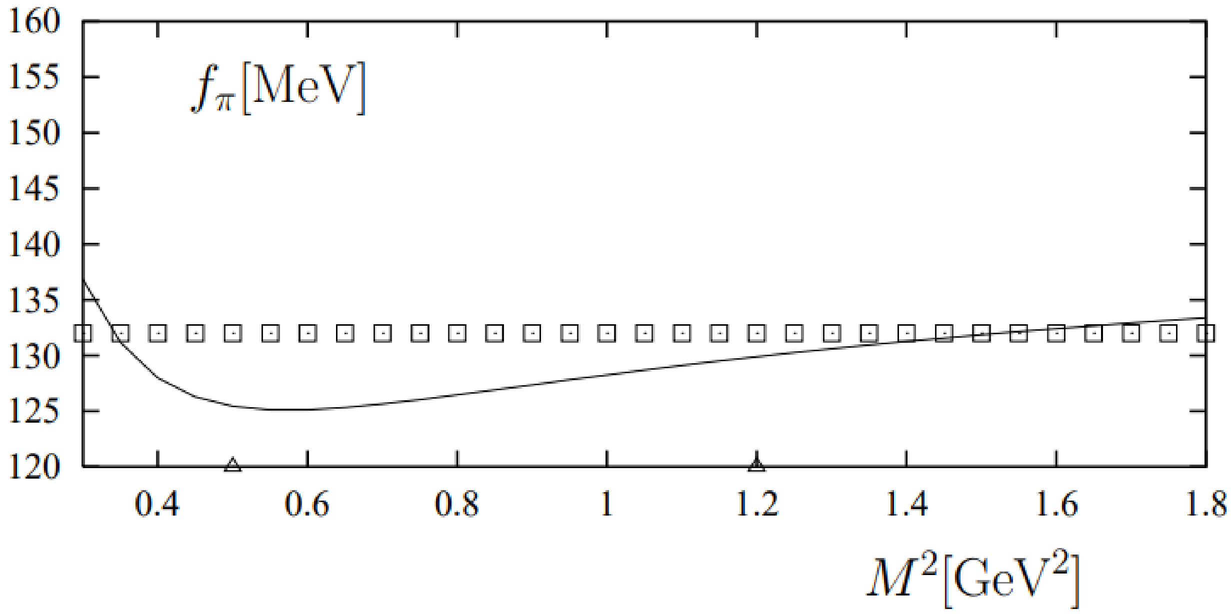
π介子是赝标量粒子，计算π介子衰变常数采用轴矢量流来构造关联函数

$$\langle \pi(p) | j_\mu | 0 \rangle = -i p_\mu f_\pi$$

$$j_\pi = \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 d$$

与ρ介子衰变常数的计算过程相似，π介子衰变常数的求和规则为

$$f_\pi^2 = M^2 [\frac{1}{4\pi^2}(1+\frac{\alpha_s(M)}{\pi})(1-e^{-s_0^\pi/M^2}) + \frac{\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} \rangle}{12M^4} + \frac{176\pi}{81} \frac{\alpha_s \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2}{M^6}]$$



π介子衰变常数随Borel参数的变化曲线， s_0^π=0.7 GeV^2

$$f_\pi = 127 \pm 15\,\mathrm{MeV}$$

实验测量值 $$f_\pi^{\mathrm{EXP}} = 132\,\mathrm{MeV}$$

小结

- QCD求和规则是基于QCD的计算非微扰参量的方法

- 计算结果一般表示成微扰贡献和算符真空凝聚的贡献

- QCD求和规则的不确定度一般为10～20%左右

- 到目前为止，人们利用QCD求和规则对非常多的非微扰参量做了大量计算和研究，对研究粒子结构、强相互作用特性等方面起到了积极的正面作用