

自举方法在形状因子计算中的应用 和最大超越度原理

郭圆宏

理论物理研究所

2022年8月10日



中国科学院理论物理研究所

Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences

自举方法在形状因子计算中的应用和最大超越度原理

- 1 研究背景和动机
- 2 自举方法和物理约束介绍
- 3 最大超越度原理
- 4 自举方法的求解过程
- 5 主要结果和展望

高圈高点物理量计算

量子场论中的重要物理量:

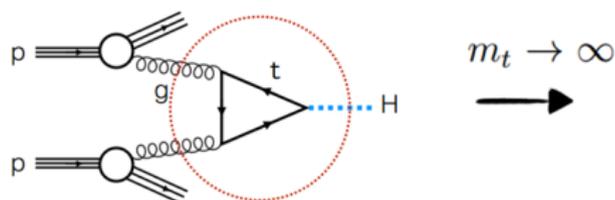
- 振幅: $\langle p_1, p_2, \dots, p_n | p'_1, p'_2, \dots, p'_m \rangle$
- 形状因子: $\langle p_1, \dots, p_n | \mathcal{O}(q) | \Omega \rangle$, 其中 $q = p_1 + \dots + p_n$
- 关联函数: $\langle \Omega | \mathcal{O}_1(q_1) \mathcal{O}_2(q_2) \dots \mathcal{O}_k(q_k) | \Omega \rangle$

传统费曼图方法: 费曼图的数量随着外线数和圈数上升指数性增加:

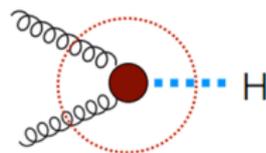
Table: 树图水平

胶子数目	4	5	6	7	8	9	10
费曼图的数目	4	25	220	2485	34300	559405	10525900

1 形状因子和有效理论顶点相关：



$$m_t \rightarrow \infty$$



Effective gluon-Higgs vertex:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = C_0 H \text{Tr}(F_{\mu\nu}^2) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_t^2}\right)$$

Figure: 重夸克有效理论中胶子通过顶夸克圈产生希格斯玻色子

- 2 $\mathcal{N} = 4$ SYM 中形状因子可被视为超对称版本的希格斯振幅。
- 3 $\mathcal{N} = 4$ SYM 和 QCD 中形状因子的最大超越度部分相同。
- 4 通过计算加深对场论的理解，发展更有效的计算方法。

自举方法在形状因子计算中的应用和最大超越度原理

- 1 研究背景和动机
- 2 自举方法和物理约束介绍
- 3 最大超越度原理
- 4 自举方法的求解过程
- 5 主要结果和展望

自举方法介绍

自举方法 (bootstrap method) 的思想: **直接假设可能的结果, 通过一般的物理要求进行约束, 从而得到最终结果。**

物理结果的最终形式: 维数正规化下, 任意 L 圈 n 外线的物理结果总可以由一族**有限个数**的费曼图 (主积分) 线性表示

$$\underbrace{\mathcal{F}_n^{(L)}}_{\text{形状因子}} = \underbrace{\mathcal{F}_n^{(0)}}_{\text{树图因子}} \sum_k c_k(s_{ij}, \epsilon) \underbrace{I_{n,k}^{(L)}}_{\text{主积分}}, \quad (1)$$

$$s_{ij} = (p_i + p_j)^2, \quad \epsilon = (4 - D)/2.$$

物理约束:

- 1 红外减除
- 2 共线极限
- 3 非物理极点消除
- 4 么正性切割

红外减除

紫外发散：由物理量唯一确定。

红外发散：在维数正规化下，高圈结果的红外发散由已知的低圈结果和红外反常量纲唯一决定，以两圈为例

$$\mathcal{I}_n^{(2)} = \underbrace{\frac{A_0}{\epsilon^4} + \frac{A_1}{\epsilon^3} + \frac{A_2}{\epsilon^2} + \frac{A_3}{\epsilon}}_{\text{红外部分}} + \underbrace{\frac{A_4}{\epsilon}}_{\text{有限部分}} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (2)$$

其中 $\mathcal{I}_n^{(L)} = \mathcal{F}_n^{(L)} / \mathcal{F}_n^{(0)}$ 。

BDS 减除方案 ($\mathcal{N} = 4$ SYM):

$$\mathcal{I}_n^{(2)}(\epsilon) \Big|_{\text{IR}} = \left[\frac{1}{2} \left(\mathcal{I}_n^{(1)}(\epsilon) \right)^2 + f^{(2)}(\epsilon) \mathcal{I}_n^{(1)}(2\epsilon) \right] \Big|_{\text{IR}}. \quad (3)$$

BDS 减除剩余项 (Remainder):

$$\mathcal{R}_n^{(2)} = \mathcal{I}_n^{(2)}(\epsilon) - \frac{1}{2} \left(\mathcal{I}_n^{(1)}(\epsilon) \right)^2 - f^{(2)}(\epsilon) \mathcal{I}_n^{(1)}(2\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (4)$$

共线极限: 高点 $\mathcal{R}_n^{(L)}$ 在共线极限 $p_i \parallel p_j$ 下退化到低点 $\mathcal{R}_{n-1}^{(L)}$:

$$\mathcal{R}_n^{(L)} \xrightarrow{p_i \parallel p_{i+1}} \mathcal{R}_{n-1}^{(L)}. \quad (5)$$

物理结果

$$\mathcal{F}_n^{(L)} = \mathcal{F}_n^{(0)} \sum_k \frac{c_k(s_{ij}, \epsilon)}{\text{非物理极点}} I_{n,k}^{(L)}. \quad (6)$$

系数中可能有极点，但结果不应当在极点处发散。

么正性切割

么正性切割：使传播子在壳：

$$\frac{i}{p^2 + i\epsilon} \rightarrow 2\pi\delta_+(p^2). \quad (7)$$

可以通过么正性切割得到主积分的系数；

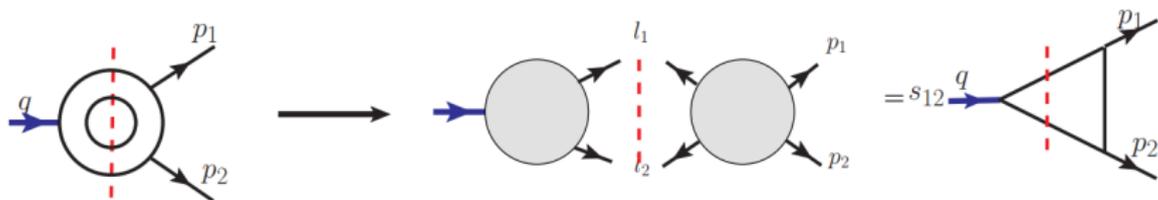


Figure: 单圈的么正性切割

自举方法在形状因子计算中的应用和最大超越度原理

- 1 研究背景和动机
- 2 自举方法和物理约束介绍
- 3 **最大超越度原理**
- 4 自举方法的求解过程
- 5 主要结果和展望

超越函数和超越度

超越度：约定 ϵ^n 超越度为 $-n$ ，费曼图中出现的超越函数

Table: 超越函数的超越度

函数	有理函数	π^n	ζ_n	$\log(x)^n$	$\text{Li}_n(x)$	\dots
超越度	0	n	n	n	n	\dots

最大超越度部分 (maximally transcendental part): 维数正规化下, L 圈结果中超越度为 $2L$ 的部分, 例如

$$\mathcal{I}_n^{(1),\text{M.T.}} = -\frac{n}{\epsilon^2} + \sum_{i=1}^n \frac{\log(s_{i,i+1}/\mu)}{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon^0). \quad (8)$$

最大超越度原理

最大超越度原理 (MTP, maximally transcendentality principle): $\mathcal{N} = 4$ SYM 和 QCD 中一类物理量 (红外反常量纲, 形状因子) 的最大超越度部分是一致的。

自举方法的启示: 不同理论中有相同的或结构相近的物理约束, 在约束足够强时, 就使得结果之间有一部分也是相同的。

自举方法在形状因子计算中的应用和最大超越度原理

- 1 研究背景和动机
- 2 自举方法和物理约束介绍
- 3 最大超越度原理
- 4 自举方法的求解过程
- 5 主要结果和展望

求解目标

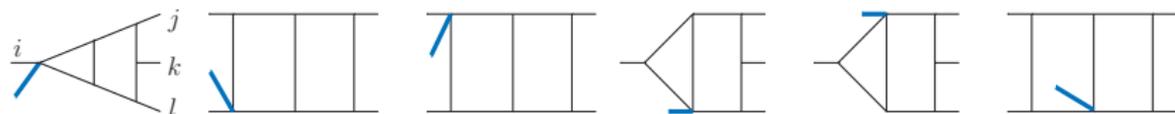


Figure: 最大拓扑

以算符 $\text{tr}(\phi^3)$ 的两圈四点形状因子的拟设 (ansatz) 为例:

$$\mathcal{I}_4^{(2),\text{ansatz}} = \sum_{k=1}^{221} (a_k B_1 + b_k B_2) I_{n,k}^{(2)}, \quad B_1 = \frac{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle}{\langle 13 \rangle \langle 24 \rangle}, \quad B_2 = \frac{\langle 14 \rangle \langle 23 \rangle}{\langle 13 \rangle \langle 24 \rangle}, \quad (9)$$

仅需要求解有理数 a_i 和 b_i 。

物理约束: (1) 红外减除; (2) 共线极限; (3) 非物理极点消除; (4) 么正性切割。

Table: 自由参数被约束的过程

物理约束	剩余自由度
对称性	221
红外减除 (symbol)	82
共线极限 (symbol)	38
非物理极点消除 (symbol)	22
红外减除 (数值)	17
共线极限 (数值)	10
么正性切割	0

自举方法在形状因子计算中的应用和最大超越度原理

- 1 研究背景和动机
- 2 自举方法和物理约束介绍
- 3 最大超越度原理
- 4 自举方法的求解过程
- 5 主要结果和展望

主要结果:

应用自举方法, 在平面 $\mathcal{N} = 4$ SYM 中, 首次计算得到了一系列两圈四点形状因子: 算符 $\text{tr}(\phi^3)$ (Bootstrapping a two-loop four-point form factor, Phys. Rev. Lett. 127, 151602), 算符 $\text{tr}(F^3)$ 的最大超越度部分 (Deciphering the Maximal Transcendentality Principle via Bootstrap, arXiv:2205.12969)。

展望:

- 1 使用自举方法计算更复杂的情形, 例如非平面部分、低阶超越度部分和 QCD。
- 2 运用自举方法进一步验证和理解最大超越度原理。
- 3 在自举方法中考虑其它可能的物理约束, 例如 FFOPE 等。

感谢!