质子电极化率的格点QCD计算

王选贺* 冯旭 靳路昶

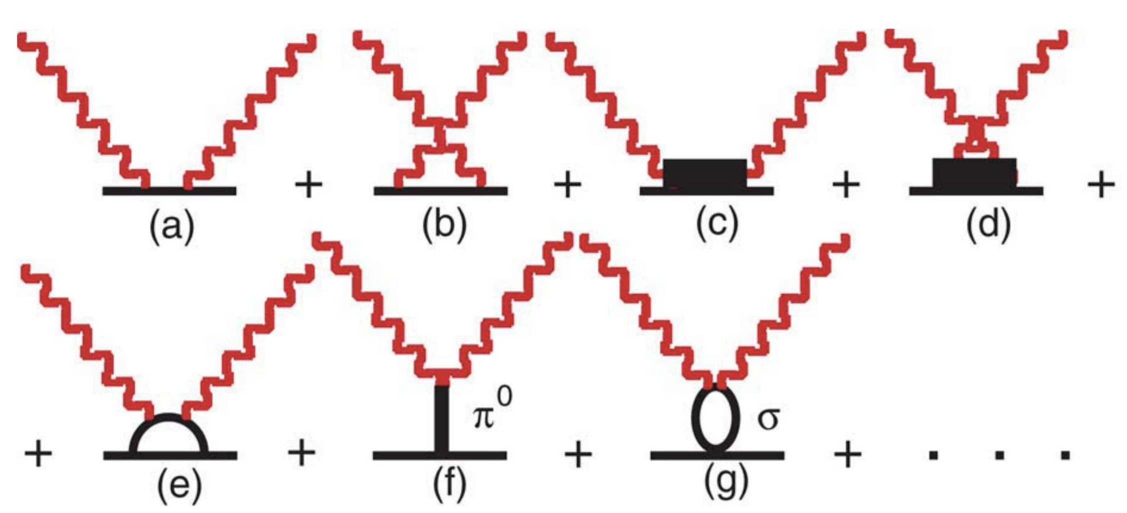
作者单位：北京大学

研究背景

电磁极化率是描述核子内部结构的基本参数，它反映了核子对电磁场的二阶响应。一直以来，核子电磁极化率作为核物理中重要的输入参数，受到实验和理论中各个领域的广泛关注。

在19世纪50年代，学者们就注意到，仅靠电荷e、质量M和反常磁矩κ不足以描述核子在电磁场中的行为，康普顿散射振幅需要额外的两个具有光子能量ω^2依赖关系的常数来描述。类比多原子系统的电磁散射，这两个参数被称为电、磁极化率α_E与β_M。

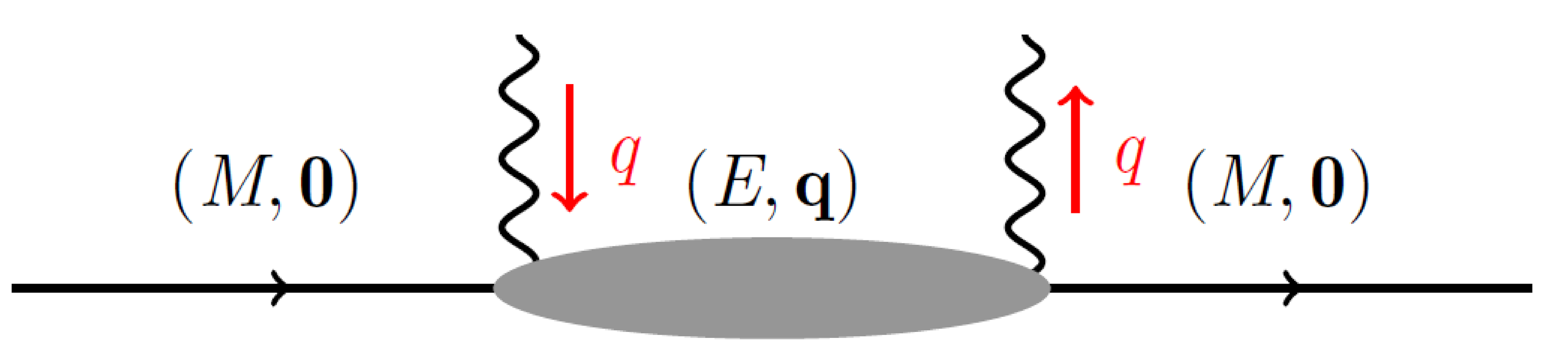
核子电磁极化率与康普顿散射



核子与电磁极化率相关的二阶有效哈密顿量为：

$$H_{eff}^{(2)} = -\frac{4\pi}{2}\alpha_E E^2 - \frac{4\pi}{2}\beta_M B^2$$

这本质上是来自于核子受电磁场激发产生的复杂的中间态。一般认为这里主要的贡献包括Δ粒子、激发态核子、pion介子云等等[1]。利用微扰论计算核子的电磁极化率过程比较繁琐，目前手征微扰论在这一方面有较多的理论结果可供参考。而格点QCD则可以从第一性原理出发，更直观地从核子能谱或康普顿散射振幅中提取出电磁极化率。



本研究从质子的康普顿散射振幅中提取其电极化率。用电磁极化率描述的核子康普顿散射强子部分矩阵元为[2]：

$$T^{\mu\nu}(P,q) = T^{\mu\nu}_{Born} + \alpha_E K_1^{\mu\nu}(q) + \beta_M K_2^{\mu\nu}(q)$$
$$K_1^{\mu\nu},\ K_2^{\mu\nu} = \mathcal{O}(q^2)$$

这里$K_i^{\mu\nu}$是q^2阶的洛伦兹结构。本研究利用格点QCD计算质子四点关联函数，可查看散射矩阵元特定分量在特定动量下的动量依赖关系，从而提取质子的电极化率。

[1] Martin Schumacher, Prog. Part. Nucl. Phys. 55, 567 (2005).

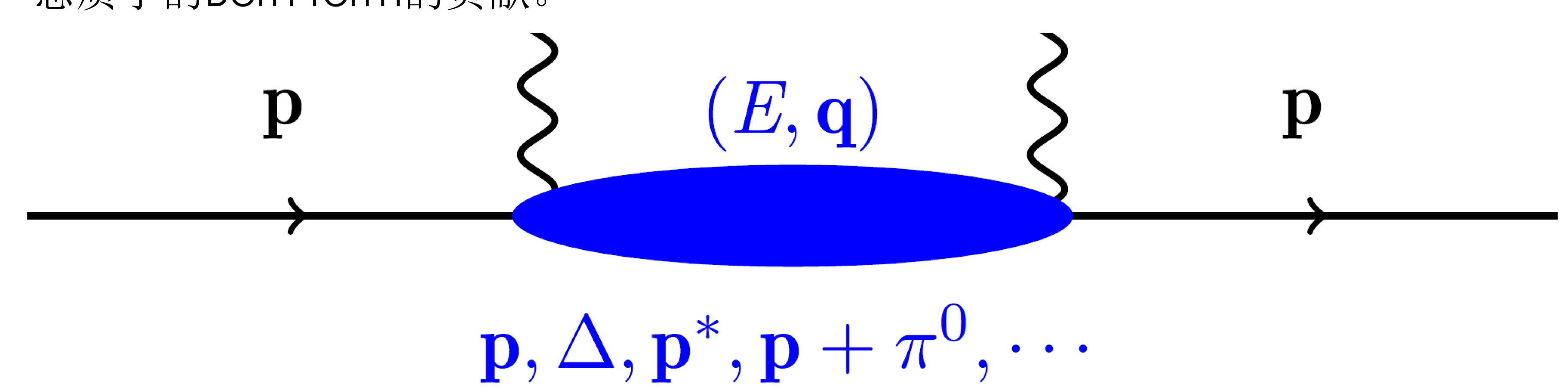
[2] $K_1^{\mu\nu}$和$K_2^{\mu\nu}$的具体形式见 J. Gasser et al, Eur. Phys. J. C 75, 375 (2015); 80, 353(E) (2020).

质子电极化率的提取

给定动量$q = (0, \mathbf{q})$，质子的电极化率可以从其康普顿散射矩阵元中提取：

$$\alpha_E = \frac{e^2}{8\pi M}\left[\frac{\partial T^{00}}{\partial \mathbf{q}^2} - \frac{\partial T^{00}_{Born}}{\partial \mathbf{q}^2}\right]\Bigg|_{\mathbf{q}^2\to 0}$$
$$= \frac{e^2}{8\pi M}\int d^4x\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{6}\right)\langle p|J^0(x)J^0(0)|p\rangle - \frac{\partial T^{00}_{Born}}{\partial \mathbf{q}^2}\Bigg|_{\mathbf{q}^2\to 0}$$

电极化率提取过程转化为对坐标空间散射矩阵元进行积分，并减除掉中间态为基态质子的Born term的贡献。



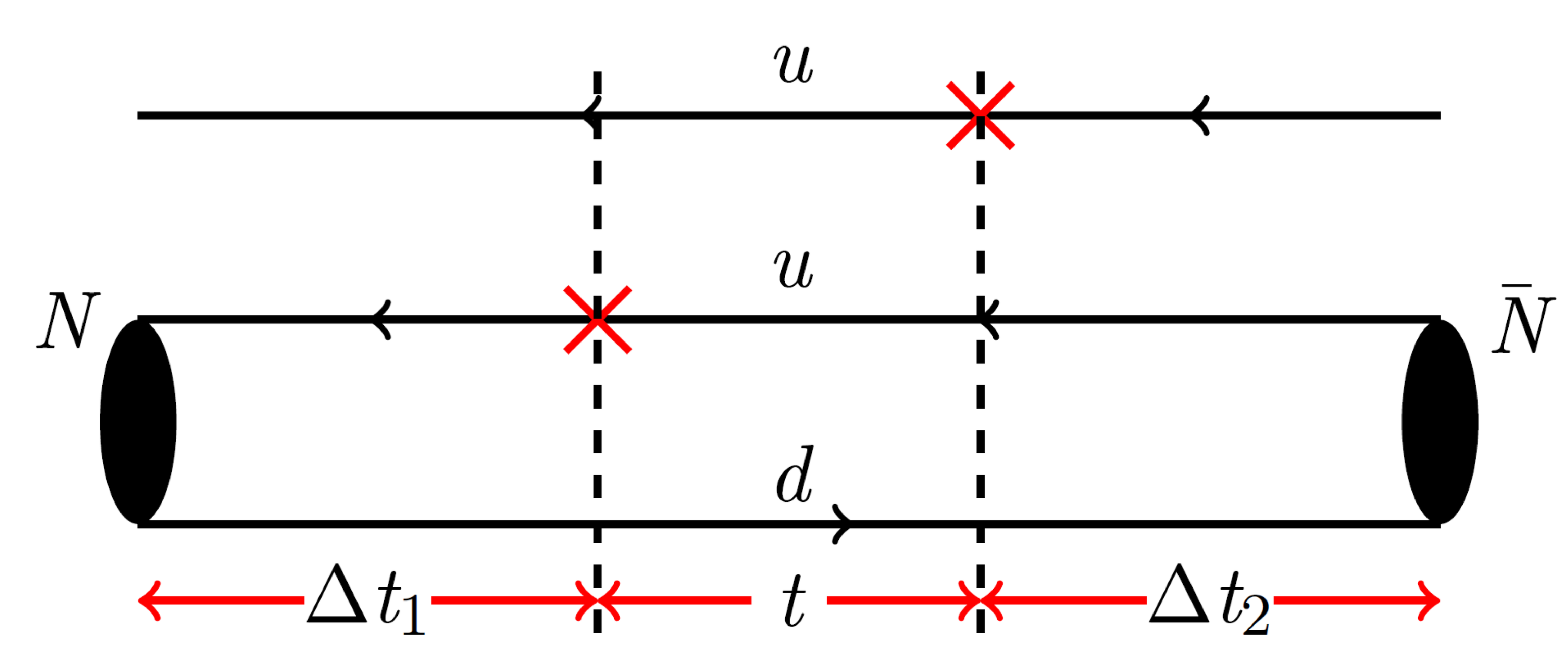
Born term 对应散射中间态为基态质子的情况，并且包含散射中所有$q = 0$的奇点。可利用质子电荷半径r_E，质子磁矩μ_p等实验数据估计Born term的贡献。

四点关联函数与格点计算方法

格点QCD中，构建质子四点关联函数计算其康普顿散射矩阵元：

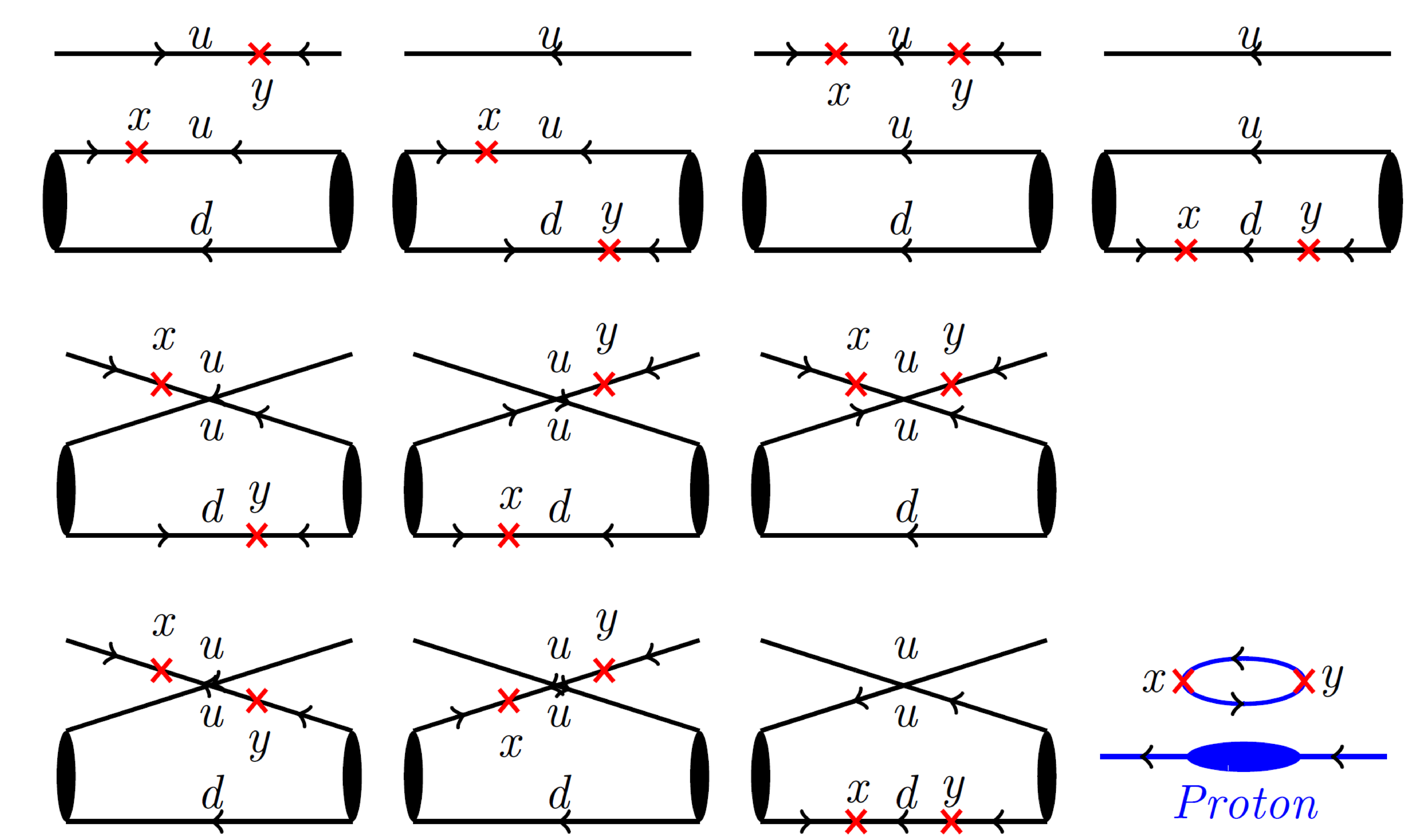
$$\langle p|J^\mu(x)J^\nu(0)|p\rangle \Rightarrow \langle N(t+\Delta t_1)J^\mu(t,\mathbf{x})J^\nu(0)\bar{N}(-\Delta t_2)\rangle$$

$N(t)$为质子的产生湮灭算符，它可以从真空中激发出一系列具有质子量子数的粒子。两个质子算符和两个电磁流算符分别被放置在间隔Δt_i, t的位置上，构成质子的四点关联函数。计算中选取足够长的时间间隔Δt_i可有效压低算符N产生的激发态粒子导致的误差。



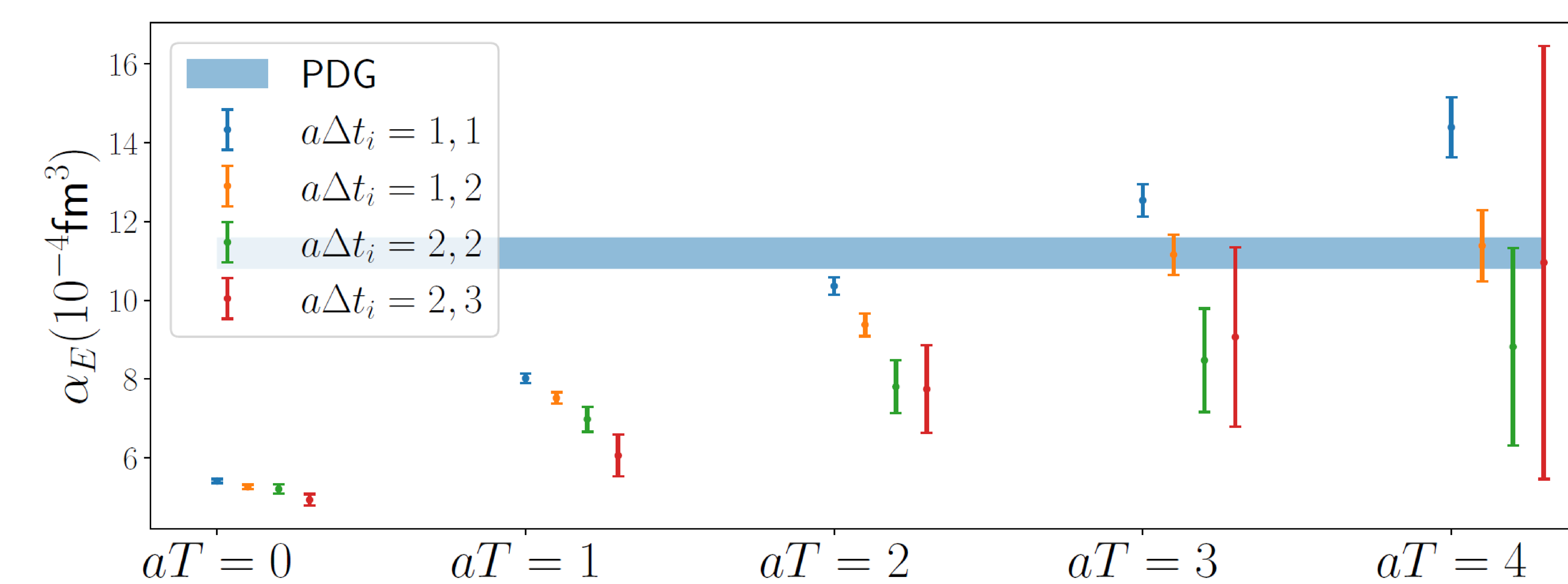
本研究中，计算在体积为$T\times L^3 = 64\times 24^3$的格子上进行，格距$a = 0.1944$fm。

四点函数中的费曼图



电极化率提取的初步结果

$$\alpha_E = \frac{e^2}{8\pi M}\int_{-T}^{T}dt\int d^3x\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{6}\right)\langle p|J^0(x)J^0(0)|p\rangle - \frac{\partial T^{00}_{Born}}{\partial \mathbf{q}^2}\Bigg|_{\mathbf{q}^2\to 0}$$



- 随着Δt_i和时间截断T增大，系统误差减小但统计误差增大。
- 在$T/a = 4$时，$\Delta t_i/a = 1,2$、$\Delta t_i/a = 2,2$、$\Delta t_i/a = 2,3$三种情况的电极化率提取结果与PDG提供的实验值符合。
- Born term的估计中，使用了PDG提供的质子电荷半径r_E和磁矩μ_p的实验值：$r_E = 0.8409$fm，$\mu_p = 2.793$。实验值误差可以忽略不计。

中国物理学会高能物理分会第十一届全国会员代表大会暨学术年会

2022年08月10日