

2022 年 7 月 28 日

# 运用最大共形原理与 Bayes 理论提高微扰 QCD 预言能力

申建明

湖南大学

合作者：周志坚、王声权、闫江、吴知非、吴兴刚、

S. J. Brodsky

# 提纲

- ▶ 计算 pQCD 固定阶及理论误差的传统方法
- ▶ 运用 Bayes 理论预测 pQCD 未知高阶贡献
- ▶ 运用最大共形原理准确计算 pQCD 固定阶
- ▶ 应用: PMC 与 Bayes 理论结合
- ▶ 总结与展望

# 传统方法

考虑物理量  $\rho$  的固定阶:  $\rho_k = \sum_{i=1}^k c_i(\mu_r) \alpha_s^i(\mu_r),$

中心值  $\mu_r \equiv \mu_0$  时的结果作为中心值;

理论误差  $\mu_r \in [\mu_0/k, k\mu_0]$  估算理论误差.

$\mu_0$  —— 初始能标.  $\mu_0$  在保证微扰性的前提下可任选.  
一般选  $\mu_0 = Q$ , 其中  $Q$  为物理过程的运动学能标.

传统方法的特点:

- ▶ 中心值和误差区间依赖于初始能标.
- ▶ 理论误差缺少概率解释

# 传统方法

考虑物理量  $\rho$  的固定阶:  $\rho_k = \sum_{i=1}^k c_i(\mu_r) \alpha_s^i(\mu_r)$ ,

中心值  $\mu_r \equiv \mu_0$  时的结果作为中心值;

理论误差  $\mu_r \in [\mu_0/k, k\mu_0]$  估算理论误差.

$\mu_0$  —— 初始能标.  $\mu_0$  在保证微扰性的前提下可任选.  
一般选  $\mu_0 = Q$ , 其中  $Q$  为物理过程的运动学能标.

传统方法的特点:

- ▶ 中心值和误差区间依赖于初始能标.
- ▶ 理论误差缺少概率解释

# 传统方法

考虑物理量  $\rho$  的固定阶:  $\rho_k = \sum_{i=1}^k c_i(\mu_r) \alpha_s^i(\mu_r)$ ,

中心值  $\mu_r \equiv \mu_0$  时的结果作为中心值;

理论误差  $\mu_r \in [\mu_0/k, k\mu_0]$  估算理论误差.

$\mu_0$  —— 初始能标.  $\mu_0$  在保证微扰性的前提下可任选.  
一般选  $\mu_0 = Q$ , 其中  $Q$  为物理过程的运动学能标.

传统方法的特点:

- ▶ 中心值和误差区间依赖于初始能标.
- ▶ 理论误差缺少概率解释.

# 为什么引入概率解释?

理论误差代表了对未知高阶项的估算.

未知高阶 = 物理量真实值 - 已知有限阶.

物理量真实值未知, 有各种可能 (各可能值都有概率);

因此, 未知高阶的估算也应有概率分布.

# 为什么引入概率解释?

理论误差代表了对未知高阶项的估算.

未知高阶 = 物理量真实值 - 已知有限阶.

物理量真实值未知, 有各种可能 (各可能值都有概率);

因此, 未知高阶的估算也应有概率分布.

# 为什么引入概率解释?

理论误差代表了对未知高阶项的估算.

未知高阶 = 物理量真实值 - 已知有限阶.

物理量真实值未知, 有各种可能 (各可能值都有概率);

因此, 未知高阶的估算也应有概率分布.



# 概率密度基本性质

考虑  $\rho = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\mu_r) \alpha_s^i(\mu_r)$  的系数  $c_i$  为不确定变量.

定义概率密度函数 (probability density function, p.d.f.).

$$\int f(c_1, c_{k+1}, \dots) dc_1 dc_{k+1} \dots = 1, \quad (1)$$

$$f(c_1, \dots, c_k) = \int f(c_1, \dots, c_k, c_{k+1}, \dots) dc_{k+1} \dots, \quad (2)$$

注记 如未说明, 积分区间都是  $(-\infty, +\infty)$ .

## 概率密度基本性质

考虑  $\rho = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\mu_r) \alpha_s^i(\mu_r)$  的系数  $c_i$  为不确定变量.

定义概率密度函数 (probability density function, p.d.f.).

$$\int f(c_l, c_{l+1}, \dots) dc_l dc_{l+1} \dots = 1, \quad (1)$$

$$f(c_l, \dots, c_k) = \int f(c_l, \dots, c_k, c_{k+1}, \dots) dc_{k+1} \dots. \quad (2)$$

**注记** 如未说明, 积分区间都是  $(-\infty, +\infty)$ .

# 基本假设 (先验分布)



所有系数有界:  $|c_i| \leq \bar{c}$  ( $\bar{c} > 0$ ),  $\forall i$ . [JHEP09(2011)039]

- ▶  $\bar{c}$  的数量级对所有可能取值等可能. 即  $\ln \bar{c}$  在  $[-|\ln \epsilon|, |\ln \epsilon|]$  内均匀分布 ( $\epsilon \rightarrow 0$ ).

$$g_0(\bar{c}) = \frac{1}{2|\ln \epsilon|} \frac{1}{\bar{c}} \theta\left(\frac{1}{\epsilon} - \bar{c}\right) \theta(\bar{c} - \epsilon). \quad (3)$$

- ▶ 系数在  $[-\bar{c}, \bar{c}]$  内均匀分布.

$$h_0(c_i | \bar{c}) = \frac{1}{2\bar{c}} \theta(\bar{c} - |c_i|), \quad \forall i. \quad (4)$$

- ▶ 所有系数相互独立.

$$h(c_j, c_k | \bar{c}) = h_0(c_j | \bar{c}) h_0(c_k | \bar{c}), \quad \forall j, k, j \neq k. \quad (5)$$

# 基本假设 (先验分布)



所有系数有界:  $|c_i| \leq \bar{c}$  ( $\bar{c} > 0$ ),  $\forall i$ . [JHEP09(2011)039]

- ▶  $\bar{c}$  的数量级对所有可能取值等可能. 即  $\ln \bar{c}$  在  $[-|\ln \epsilon|, |\ln \epsilon|]$  内均匀分布 ( $\epsilon \rightarrow 0$ ).

$$g_0(\bar{c}) = \frac{1}{2|\ln \epsilon|} \frac{1}{\bar{c}} \theta\left(\frac{1}{\epsilon} - \bar{c}\right) \theta(\bar{c} - \epsilon). \quad (3)$$

- ▶ 系数在  $[-\bar{c}, \bar{c}]$  内均匀分布.

$$h_0(c_i | \bar{c}) = \frac{1}{2\bar{c}} \theta(\bar{c} - |c_i|), \quad \forall i. \quad (4)$$

- ▶ 所有系数相互独立.

$$h(c_j, c_k | \bar{c}) = h_0(c_j | \bar{c}) h_0(c_k | \bar{c}), \quad \forall j, k, j \neq k. \quad (5)$$

# 基本假设 (先验分布)



所有系数有界:  $|c_i| \leq \bar{c}$  ( $\bar{c} > 0$ ),  $\forall i$ . [JHEP09(2011)039]

- ▶  $\bar{c}$  的数量级对所有可能取值等可能. 即  $\ln \bar{c}$  在  $[-|\ln \epsilon|, |\ln \epsilon|]$  内均匀分布 ( $\epsilon \rightarrow 0$ ),

$$g_0(\bar{c}) = \frac{1}{2|\ln \epsilon|} \frac{1}{\bar{c}} \theta\left(\frac{1}{\epsilon} - \bar{c}\right) \theta(\bar{c} - \epsilon), \quad (3)$$

- ▶ 系数在  $[-\bar{c}, \bar{c}]$  内均匀分布.

$$h_0(c_i|\bar{c}) = \frac{1}{2\bar{c}} \theta(\bar{c} - |c_i|), \quad \forall i, \quad (4)$$

- ▶ 所有系数相互独立.

$$h(c_j, c_k|\bar{c}) = h_0(c_j|\bar{c})h_0(c_k|\bar{c}), \quad \forall j, k, j \neq k. \quad (5)$$

## 基本假设 (先验分布)



所有系数有界:  $|c_i| \leq \bar{c}$  ( $\bar{c} > 0$ ),  $\forall i$ . [JHEP09(2011)039]

- ▶  $\bar{c}$  的数量级对所有可能取值等可能. 即  $\ln \bar{c}$  在  $[-|\ln \epsilon|, |\ln \epsilon|]$  内均匀分布 ( $\epsilon \rightarrow 0$ ),

$$g_0(\bar{c}) = \frac{1}{2|\ln \epsilon|} \frac{1}{\bar{c}} \theta\left(\frac{1}{\epsilon} - \bar{c}\right) \theta(\bar{c} - \epsilon), \quad (3)$$

- ▶ 系数在  $[-\bar{c}, \bar{c}]$  内均匀分布.

$$h_0(c_i | \bar{c}) = \frac{1}{2\bar{c}} \theta(\bar{c} - |c_i|), \quad \forall i, \quad (4)$$

- ▶ 所有系数相互独立.

$$h(c_j, c_k | \bar{c}) = h_0(c_j | \bar{c}) h_0(c_k | \bar{c}), \quad \forall j, k, j \neq k. \quad (5)$$

## 基本假设 (先验分布)



所有系数有界:  $|c_i| \leq \bar{c}$  ( $\bar{c} > 0$ ),  $\forall i$ . [JHEP09(2011)039]

- ▶  $\bar{c}$  的数量级对所有可能取值等可能. 即  $\ln \bar{c}$  在  $[-|\ln \epsilon|, |\ln \epsilon|]$  内均匀分布 ( $\epsilon \rightarrow 0$ ),

$$g_0(\bar{c}) = \frac{1}{2|\ln \epsilon|} \frac{1}{\bar{c}} \theta\left(\frac{1}{\epsilon} - \bar{c}\right) \theta(\bar{c} - \epsilon), \quad (3)$$

- ▶ 系数在  $[-\bar{c}, \bar{c}]$  内均匀分布.

$$h_0(c_i|\bar{c}) = \frac{1}{2\bar{c}} \theta(\bar{c} - |c_i|), \quad \forall i, \quad (4)$$

- ▶ 所有系数相互独立.

$$h(c_j, c_k|\bar{c}) = h_0(c_j|\bar{c})h_0(c_k|\bar{c}), \quad \forall j, k, j \neq k. \quad (5)$$

# 贝叶斯分析

考虑已知物理量  $\rho$  的固定阶:  $\rho_k = \sum_{i=1}^k c_i \alpha_s^i$ ,

估算某一未知高阶  $\delta_n$  ( $n > k$ ):  $\delta_n = c_n \alpha_s^n$ ,

或所有未知高阶之和  $\Delta_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i \alpha_s^i$ .

关键: 估算未知的高阶系数.

已知系数  $\{c_1, c_{1+1}, \dots, c_k\}$  时  $c_n$  的条件 p.d.f.,

$$f_c(c_n | c_1, \dots, c_k) = \frac{f(c_1, \dots, c_k, c_n)}{f(c_1, \dots, c_k)}, \quad (n > k). \quad (6)$$



# 贝叶斯分析

考虑已知物理量  $\rho$  的固定阶:  $\rho_k = \sum_{i=l}^k c_i \alpha_s^i$ ,

估算某一未知高阶  $\delta_n$  ( $n > k$ ):  $\delta_n = c_n \alpha_s^n$ ,

或所有未知高阶之和  $\Delta_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i \alpha_s^i$ ,

关键: 估算未知的高阶系数.

已知系数  $\{c_l, c_{l+1}, \dots, c_k\}$  时  $c_n$  的条件 p.d.f.,

$$f_c(c_n | c_l, \dots, c_k) = \frac{f(c_l, \dots, c_k, c_n)}{f(c_l, \dots, c_k)}, \quad (n > k). \quad (6)$$

# 贝叶斯分析

考虑已知物理量  $\rho$  的固定阶:  $\rho_k = \sum_{i=l}^k c_i \alpha_s^i$ ,

估算某一未知高阶  $\delta_n$  ( $n > k$ ):  $\delta_n = c_n \alpha_s^n$ ,

或所有未知高阶之和  $\Delta_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i \alpha_s^i$ ,

关键: 估算未知的高阶系数.

已知系数  $\{c_l, c_{l+1}, \dots, c_k\}$  时  $c_n$  的条件 p.d.f.,

$$f_c(c_n | c_l, \dots, c_k) = \frac{f(c_l, \dots, c_k, c_n)}{f(c_l, \dots, c_k)}, \quad (n > k). \quad (6)$$

# 贝叶斯分析

考虑已知物理量  $\rho$  的固定阶:  $\rho_k = \sum_{i=l}^k c_i \alpha_s^i$ ,

估算某一未知高阶  $\delta_n$  ( $n > k$ ):  $\delta_n = c_n \alpha_s^n$ ,

或所有未知高阶之和  $\Delta_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i \alpha_s^i$ ,

关键: 估算未知的高阶系数.

已知系数  $\{c_l, c_{l+1}, \dots, c_k\}$  时  $c_n$  的条件 p.d.f.,

$$f_c(c_n | c_l, \dots, c_k) = \frac{f(c_l, \dots, c_k, c_n)}{f(c_l, \dots, c_k)}, \quad (n > k). \quad (6)$$

# 贝叶斯分析

计算  $f(c_l, \dots, c_k)$ ,

$$\begin{aligned} f(c_l, \dots, c_k) &= \int f(c_l, \dots, c_k, \bar{c}) d\bar{c} \\ &= \int h(c_l, \dots, c_k | \bar{c}) g_0(\bar{c}) d\bar{c} \\ &= \int \left( \prod_{i=l}^k h_0(c_i | \bar{c}) \right) g_0(\bar{c}) d\bar{c}. \quad (7) \end{aligned}$$

# 贝叶斯分析

将 (3) 和 (4) 代入 (7), 得

$$f(c_1, \dots, c_k) = \frac{1}{2^{n_c+1}} \frac{1}{|\ln \epsilon|} \int_{\max\{\bar{c}_{(k)}, \epsilon\}}^{1/\epsilon} \frac{d\bar{c}}{\bar{c}^{n_c+1}}. \quad (8)$$

其中  $n_c$  表示已知系数个数,  $\bar{c}_{(k)} = \max\{|c_1|, \dots, |c_k|\}$ .

同理可得,

$$f(c_1, \dots, c_k, c_n) = \frac{1}{2^{n_c+2}} \frac{1}{|\ln \epsilon|} \int_{\max\{|c_n|, \bar{c}_{(k)}, \epsilon\}}^{1/\epsilon} \frac{d\bar{c}}{\bar{c}^{n_c+2}}. \quad (9)$$

# 贝叶斯分析

将 (3) 和 (4) 代入 (7), 得

$$f(c_l, \dots, c_k) = \frac{1}{2^{n_c+1}} \frac{1}{|\ln \epsilon|} \int_{\max\{\bar{c}_{(k)}, \epsilon\}}^{1/\epsilon} \frac{d\bar{c}}{\bar{c}^{n_c+1}}. \quad (8)$$

其中  $n_c$  表示已知系数个数,  $\bar{c}_{(k)} = \max\{|c_l|, \dots, |c_k|\}$ .

同理可得,

$$f(c_l, \dots, c_k, c_n) = \frac{1}{2^{n_c+2}} \frac{1}{|\ln \epsilon|} \int_{\max\{|c_n|, \bar{c}_{(k)}, \epsilon\}}^{1/\epsilon} \frac{d\bar{c}}{\bar{c}^{n_c+2}}. \quad (9)$$

# 贝叶斯分析

已知  $c_l, \dots, c_k$  得到  $c_n$  的条件 p.d.f.,

$$\begin{aligned} f_c(c_n | c_l, \dots, c_k) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(c_l, \dots, c_k, c_n)}{f(c_l, \dots, c_k)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{n_c}{n_c + 1} \frac{\bar{c}_{(k)}^{n_c}}{(\max\{|c_n|, \bar{c}_{(k)}\})^{n_c+1}} \\ &= \begin{cases} \frac{n_c}{2(n_c+1)\bar{c}_{(k)}}, & |c_n| \leq \bar{c}_{(k)} \\ \frac{n_c \bar{c}_{(k)}^{n_c}}{2(n_c+1)|c_n|^{n_c+1}}, & |c_n| > \bar{c}_{(k)} \end{cases} \quad (10) \end{aligned}$$

特点: 对称,  $[-\bar{c}_{(k)}, \bar{c}_{(k)}]$  内均匀分布,  $[\bar{c}_{(k)}, +\infty]$  单调递减

# 贝叶斯分析

已知  $c_l, \dots, c_k$  得到  $c_n$  的条件 p.d.f.,

$$\begin{aligned} f_c(c_n | c_l, \dots, c_k) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(c_l, \dots, c_k, c_n)}{f(c_l, \dots, c_k)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{n_c}{n_c + 1} \frac{\bar{c}_{(k)}^{n_c}}{(\max\{|c_n|, \bar{c}_{(k)}\})^{n_c+1}} \\ &= \begin{cases} \frac{n_c}{2(n_c+1)\bar{c}_{(k)}}, & |c_n| \leq \bar{c}_{(k)} \\ \frac{n_c \bar{c}_{(k)}^{n_c}}{2(n_c+1)|c_n|^{n_c+1}}, & |c_n| > \bar{c}_{(k)} \end{cases}. \quad (10) \end{aligned}$$

特点：对称,  $[-\bar{c}_{(k)}, \bar{c}_{(k)}]$  内均匀分布,  $[\bar{c}_{(k)}, +\infty]$  单调递减.



# 贝叶斯分析

$f_c(c_n|c_l, \dots, c_k)$  也可通过如下方式计算得到:

$$f_{\bar{c}}(\bar{c}|c_l, \dots, c_k) = n_c \frac{\bar{c}_{(k)}^{n_c}}{\bar{c}^{n_c+1}} \theta(\bar{c} - \bar{c}_{(k)}).$$

$$f_c(c_n|c_l, \dots, c_k) = \int h_0(c_n|\bar{c}) f_{\bar{c}}(\bar{c}|c_l, \dots, c_k) d\bar{c}.$$

# 置信区间

$$f_C(c_n | c_1, \dots, c_k) = \begin{cases} \frac{n_c}{2(n_c+1)\bar{c}^{(k)}}, & |c_n| \leq \bar{c}^{(k)} \\ \frac{n_c \bar{c}^{n_c}_{(k)}}{2(n_c+1)|c_n|^{n_c+1}}, & |c_n| > \bar{c}^{(k)} \end{cases} .$$

$p\%$  置信度 (DoB) 对应的最小置信区间 (CI) 记为  $[-c_n^{(p)}, c_n^{(p)}]$

$$p\% = \int_{-c_n^{(p)}}^{c_n^{(p)}} f_C(c_n | c_1, \dots, c_k) dc_n. \quad (11)$$

$$c_n^{(p)} = \begin{cases} \bar{c}^{(k)} \frac{n_c+1}{n_c} p\%, & p\% \leq \frac{n_c}{n_c+1} \\ \bar{c}^{(k)} [(n_c+1)(1-p\%)]^{-\frac{1}{n_c}}, & p\% > \frac{n_c}{n_c+1} \end{cases} . \quad (12)$$

## 置信区间

$$f_c(c_n | c_1, \dots, c_k) = \begin{cases} \frac{n_c}{2(n_c+1)\bar{c}^{(k)}}, & |c_n| \leq \bar{c}^{(k)} \\ \frac{n_c \bar{c}^{(k)n_c}}{2(n_c+1)|c_n|^{n_c+1}}, & |c_n| > \bar{c}^{(k)} \end{cases} .$$

$p\%$  置信度 (DoB) 对应的最小置信区间 (CI) 记为  $[-c_n^{(p)}, c_n^{(p)}]$

$$p\% = \int_{c_n^{(p)}}^{c_n^{(p)}} f_c(c_n | c_1, \dots, c_k) dc_n. \quad (11)$$

$$c_n^{(p)} = \begin{cases} \bar{c}^{(k)} \frac{n_c+1}{n_c} p\%, & p\% \leq \frac{n_c}{n_c+1} \\ \bar{c}^{(k)} [(n_c+1)(1-p\%)]^{-\frac{1}{n_c}}, & p\% > \frac{n_c}{n_c+1} \end{cases} . \quad (12)$$

## 置信区间

$$f_c(c_n | c_l, \dots, c_k) = \begin{cases} \frac{n_c}{2(n_c+1)\bar{c}^{(k)}}, & |c_n| \leq \bar{c}^{(k)} \\ \frac{n_c \bar{c}^{n_c(k)}}{2(n_c+1)|c_n|^{n_c+1}}, & |c_n| > \bar{c}^{(k)} \end{cases}.$$

$p\%$  置信度 (DoB) 对应的最小置信区间 (CI) 记为  $[-c_n^{(p)}, c_n^{(p)}]$

$$p\% = \int_{-c_n^{(p)}}^{c_n^{(p)}} f_c(c_n | c_l, \dots, c_k) dc_n, \quad (11)$$

$$c_n^{(p)} = \begin{cases} \bar{c}^{(k)} \frac{n_c+1}{n_c} p\%, & p\% \leq \frac{n_c}{n_c+1} \\ \bar{c}^{(k)} [(n_c+1)(1-p\%)]^{-\frac{1}{n_c}}, & p\% > \frac{n_c}{n_c+1} \end{cases}. \quad (12)$$

## 置信区间

$$f_c(c_n | c_l, \dots, c_k) = \begin{cases} \frac{n_c}{2(n_c+1)\bar{c}^{(k)}}, & |c_n| \leq \bar{c}^{(k)} \\ \frac{n_c \bar{c}^{n_c(k)}}{2(n_c+1)|c_n|^{n_c+1}}, & |c_n| > \bar{c}^{(k)} \end{cases}.$$

$p\%$  置信度 (DoB) 对应的最小置信区间 (CI) 记为  $[-c_n^{(p)}, c_n^{(p)}]$

$$p\% = \int_{-c_n^{(p)}}^{c_n^{(p)}} f_c(c_n | c_l, \dots, c_k) dc_n, \quad (11)$$

$$c_n^{(p)} = \begin{cases} \bar{c}^{(k)} \frac{n_c+1}{n_c} p\%, & p\% \leq \frac{n_c}{n_c+1} \\ \bar{c}^{(k)} [(n_c+1)(1-p\%)]^{-\frac{1}{n_c}}, & p\% > \frac{n_c}{n_c+1} \end{cases}, \quad (12)$$

# 概率密度函数

$$f_{\delta}(\delta_{k+1}|c_1, \dots, c_k) = \left( \frac{n_c}{n_c + 1} \right) \frac{1}{2\alpha_s^{k+1} \bar{c}_{(k)}} \\ \times \begin{cases} 1, & |\delta_{k+1}| \leq \alpha_s^{k+1} \bar{c}_{(k)} \\ \left( \frac{\alpha_s^{k+1} \bar{c}_{(k)}}{|\delta_{k+1}|} \right)^{n_c+1}, & |\delta_{k+1}| > \alpha_s^{k+1} \bar{c}_{(k)} \end{cases}, \quad (13)$$

$$f_{\rho}(\rho_{k+1}|c_1, \dots, c_k) = \left( \frac{n_c}{n_c + 1} \right) \frac{1}{2\alpha_s^{k+1} \bar{c}_{(k)}} \\ \times \begin{cases} 1, & |\rho_{k+1} - \rho_k| \leq \alpha_s^{k+1} \bar{c}_{(k)} \\ \left( \frac{\alpha_s^{k+1} \bar{c}_{(k)}}{|\rho_{k+1} - \rho_k|} \right)^{n_c+1}, & |\rho_{k+1} - \rho_k| > \alpha_s^{k+1} \bar{c}_{(k)} \end{cases} \quad (14)$$

# 概率密度函数

所有未知高阶项  $\Delta_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i \alpha_s^i$  的 p.d.f.,

$$f_{\Delta}(\Delta_k | c_l, \dots, c_k) = \int \left[ \delta \left( \Delta_k - \sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_s^n c_n \right) \right] \\ \times f_{rc}(c_{k+1}, c_{k+2}, \dots | c_l, \dots, c_k) dc_{k+1} dc_{k+2} \dots$$

$$f_{\Delta}(\Delta_k | c_l, \dots, c_k) = \int \left[ \delta \left( \Delta_k - \sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_s^n c_n \right) \right] \\ \times \left[ \prod_{n=k+1}^{\infty} f(c_n | \vec{c}) \right] f(\vec{c} | c_l, \dots, c_k) d\vec{c} dc_{k+1} dc_{k+2} \dots$$

注记 我们只考虑预测未知的下一阶段的情况。

# 概率密度函数

所有未知高阶项  $\Delta_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i \alpha_s^i$  的 p.d.f.,

$$f_{\Delta}(\Delta_k | c_l, \dots, c_k) = \int \left[ \delta \left( \Delta_k - \sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_s^n c_n \right) \right] \\ \times f_{rc}(c_{k+1}, c_{k+2}, \dots | c_l, \dots, c_k) dc_{k+1} dc_{k+2} \dots .$$

$$f_{\Delta}(\Delta_k | c_l, \dots, c_k) = \int \left[ \delta \left( \Delta_k - \sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_s^n c_n \right) \right] \\ \times \left[ \prod_{n=k+1}^{\infty} f(c_n | \bar{c}) \right] f(\bar{c} | c_l, \dots, c_k) d\bar{c} dc_{k+1} dc_{k+2} \dots .$$

注记 我们只考虑预测未知的下一阶的情况



# 概率密度函数

所有未知高阶项  $\Delta_k = \sum_{i=k+1}^{\infty} c_i \alpha_s^i$  的 p.d.f.,

$$f_{\Delta}(\Delta_k | c_l, \dots, c_k) = \int \left[ \delta \left( \Delta_k - \sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_s^n c_n \right) \right] \\ \times f_{rc}(c_{k+1}, c_{k+2}, \dots | c_l, \dots, c_k) dc_{k+1} dc_{k+2} \dots .$$

$$f_{\Delta}(\Delta_k | c_l, \dots, c_k) = \int \left[ \delta \left( \Delta_k - \sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_s^n c_n \right) \right] \\ \times \left[ \prod_{n=k+1}^{\infty} f(c_n | \bar{c}) \right] f(\bar{c} | c_l, \dots, c_k) d\bar{c} dc_{k+1} dc_{k+2} \dots .$$

**注记** 我们只考虑预测未知的下一阶的情况。

# 期望/标准差

**问题** 如何定义理论误差区间？或如何选  $p\%$  ？

方案一：根据概率密度函数，

- 计算期望  $E$ ，作为估算的中心值；
- 计算标准差  $\sigma$ ， $[-\sigma, \sigma]$  可作为估算的误差；
- 计算误差  $[-\sigma, \sigma]$  对应置信度

可能存在的问题：

pQCD 级数收敛性不好时，高阶预测的误差  $[-\sigma, \sigma]$  在低阶预测的误差  $[-\sigma, \sigma]$  之外。

# 期望/标准差

**问题** 如何定义理论误差区间？或如何选  $p\%$  ？

方案一：根据概率密度函数，

- ▶ 计算期望  $E$ ，作为估算的中心值；
- ▶ 计算标准差  $\sigma$ ， $[-\sigma, \sigma]$  可作为估算的误差；
- ▶ 计算误差  $[-\sigma, \sigma]$  对应置信度。

可能存在的问题：

pQCD 级数收敛性不好时，高阶预测的误差  $[-\sigma, \sigma]$  在低阶预测的误差  $[-\sigma, \sigma]$  之外。

## 期望/标准差

**问题** 如何定义理论误差区间？或如何选  $p\%$  ？

方案一：根据概率密度函数，

- ▶ 计算期望  $E$ ，作为估算的中心值；
- ▶ 计算标准差  $\sigma$ ， $[-\sigma, \sigma]$  可作为估算的误差；
- ▶ 计算误差  $[-\sigma, \sigma]$  对应置信度。

可能存在的问题：

pQCD 级数收敛性不好时，高阶预测的误差  $[-\sigma, \sigma]$  在低阶预测的误差  $[-\sigma, \sigma]$  之外。

## 自洽临界置信度

方案二: 定义自洽临界置信度,  $p_c\%$ ,

$p_c$  为满足如下不等式组的最小  $p$  值,

$$\rho_{i-1} + c_i^{(p)} \alpha_s^i \geq \rho_i + c_{i+1}^{(p)} \alpha_s^{i+1}, \quad (i = l+1, \dots, k),$$

$$\rho_{i-1} - c_i^{(p)} \alpha_s^i \leq \rho_i - c_{i+1}^{(p)} \alpha_s^{i+1}, \quad (i = l+1, \dots, k).$$

用如下区间作为  $\rho_k$  的理论误差区间,

$$[\rho_k - c_{k+1}^{(p_c)} \alpha_s^{k+1}, \rho_k + c_{k+1}^{(p_c)} \alpha_s^{k+1}],$$

注 方案二解决了方案一可能存在的问题。

## 自洽临界置信度

方案二: 定义自洽临界置信度,  $p_c\%$ ,

$p_c$  为满足如下不等式组的最小  $p$  值,

$$\rho_{i-1} + c_i^{(p)} \alpha_s^i \geq \rho_i + c_{i+1}^{(p)} \alpha_s^{i+1}, \quad (i = l+1, \dots, k),$$

$$\rho_{i-1} - c_i^{(p)} \alpha_s^i \leq \rho_i - c_{i+1}^{(p)} \alpha_s^{i+1}, \quad (i = l+1, \dots, k).$$

用如下区间作为  $\rho_k$  的理论误差区间,

$$[\rho_k - c_{k+1}^{(p_c)} \alpha_s^{k+1}, \rho_k + c_{k+1}^{(p_c)} \alpha_s^{k+1}],$$

注 方案二解决了方案一可能存在的问题

## 自洽临界置信度

方案二: 定义自洽临界置信度,  $p_c\%$ ,

$p_c$  为满足如下不等式组的最小  $p$  值,

$$\rho_{i-1} + c_i^{(p)} \alpha_s^i \geq \rho_i + c_{i+1}^{(p)} \alpha_s^{i+1}, \quad (i = l+1, \dots, k),$$

$$\rho_{i-1} - c_i^{(p)} \alpha_s^i \leq \rho_i - c_{i+1}^{(p)} \alpha_s^{i+1}, \quad (i = l+1, \dots, k).$$

用如下区间作为  $\rho_k$  的理论误差区间,

$$[\rho_k - c_{k+1}^{(p_c)} \alpha_s^{k+1}, \rho_k + c_{k+1}^{(p_c)} \alpha_s^{k+1}],$$

**注** 方案二解决了方案一可能存在的问题。

## 应用于传统微扰序列面临的问题

$$f_c(c_n | c_l, \dots, c_k) = \begin{cases} \frac{n_c}{2(n_c+1)\bar{c}_{(k)}}, & |c_n| \leq \bar{c}_{(k)} \\ \frac{n_c \bar{c}_{(k)}^{n_c}}{2(n_c+1)|c_n|^{n_c+1}}, & |c_n| > \bar{c}_{(k)} \end{cases}.$$

其中,  $\bar{c}_{(k)} = \max\{|c_l(\mu_r)|, \dots, |c_k(\mu_r)|\}$ .

Bayes 理论应用于传统微扰序列, 存在初始能标依赖

解决办法

$$\mu_r^2 \frac{\partial}{\partial \mu_r^2} c_l(\mu_r) = 0, \quad \mu_r^2 \frac{\partial \rho_k}{\partial \mu_r^2} \Big|_{c_l(\mu_r)} = -\beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \rho_k.$$

若  $\rho_k$  是对应于  $\beta = 0$  的共形序列, 则不依赖于能标.



## 应用于传统微扰序列面临的问题

$$f_c(c_n | c_l, \dots, c_k) = \begin{cases} \frac{n_c}{2(n_c+1)\bar{c}_{(k)}}, & |c_n| \leq \bar{c}_{(k)} \\ \frac{n_c \bar{c}_{(k)}^{n_c}}{2(n_c+1)|c_n|^{n_c+1}}, & |c_n| > \bar{c}_{(k)} \end{cases}.$$

其中,  $\bar{c}_{(k)} = \max\{|c_l(\mu_r)|, \dots, |c_k(\mu_r)|\}$ .

Bayes 理论应用于传统微扰序列, 存在初始能标依赖.

解决办法

$$\mu_r^2 \frac{\partial}{\partial \mu_r^2} c_l(\mu_r) = 0, \quad \mu_r^2 \frac{\partial \rho_k}{\partial \mu_r^2} \Big|_{c_l(\mu_r)} = -\beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \rho_k.$$

若  $\rho_k$  是对应于  $\beta = 0$  的共形序列, 则不依赖于能标.

## 应用于传统微扰序列面临的问题

$$f_c(c_n | c_l, \dots, c_k) = \begin{cases} \frac{n_c}{2(n_c+1)\bar{c}_{(k)}}, & |c_n| \leq \bar{c}_{(k)} \\ \frac{n_c \bar{c}_{(k)}^{n_c}}{2(n_c+1)|c_n|^{n_c+1}}, & |c_n| > \bar{c}_{(k)} \end{cases}.$$

其中,  $\bar{c}_{(k)} = \max\{|c_l(\mu_r)|, \dots, |c_k(\mu_r)|\}$ .

Bayes 理论应用于传统微扰序列, 存在初始能标依赖.

### 解决办法

$$\mu_r^2 \frac{\partial}{\partial \mu_r^2} c_i(\mu_r) = 0, \quad \mu_r^2 \frac{\partial \rho_k}{\partial \mu_r^2} \Big|_{c_i(\mu_r)} = -\beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \rho_k.$$

若  $\rho_k$  是对应于  $\beta = 0$  的共形序列, 则不依赖于能标.

## 应用于传统微扰序列面临的问题

$$f_c(c_n | c_l, \dots, c_k) = \begin{cases} \frac{n_c}{2(n_c+1)\bar{c}_{(k)}}, & |c_n| \leq \bar{c}_{(k)} \\ \frac{n_c \bar{c}_{(k)}^{n_c}}{2(n_c+1)|c_n|^{n_c+1}}, & |c_n| > \bar{c}_{(k)} \end{cases}.$$

其中,  $\bar{c}_{(k)} = \max\{|c_l(\mu_r)|, \dots, |c_k(\mu_r)|\}$ .

Bayes 理论应用于传统微扰序列, 存在初始能标依赖.

### 解决办法

$$\mu_r^2 \frac{\partial}{\partial \mu_r^2} c_i(\mu_r) = 0, \quad \mu_r^2 \frac{\partial \rho_k}{\partial \mu_r^2} \Big|_{c_i(\mu_r)} = -\beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \rho_k.$$

若  $\rho_k$  是对应于  $\beta = 0$  的共形序列, 则不依赖于能标.

## 应用于传统微扰序列面临的问题

$$f_c(c_n | c_l, \dots, c_k) = \begin{cases} \frac{n_c}{2(n_c+1)\bar{c}_{(k)}}, & |c_n| \leq \bar{c}_{(k)} \\ \frac{n_c \bar{c}_{(k)}^{n_c}}{2(n_c+1)|c_n|^{n_c+1}}, & |c_n| > \bar{c}_{(k)} \end{cases}.$$

其中,  $\bar{c}_{(k)} = \max\{|c_l(\mu_r)|, \dots, |c_k(\mu_r)|\}$ .

Bayes 理论应用于传统微扰序列, 存在初始能标依赖.

### 解决办法

$$\mu_r^2 \frac{\partial}{\partial \mu_r^2} c_i(\mu_r) = 0, \quad \mu_r^2 \frac{\partial \rho_k}{\partial \mu_r^2} \Big|_{c_i(\mu_r)} = -\beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \rho_k.$$

若  $\rho_k$  是对应于  $\beta = 0$  的共形序列, 则不依赖于能标.

# 最大共形原理

## 最大共形原理 (Principle of Maximum Conformality, PMC)

The main idea of PMC is that after proper procedures, all non-conformal  $\{\beta_i\}$  terms in the perturbative expansion are summed into the running coupling so that the remaining terms in the perturbative series are identical to that of a conformal theory, i.e., the corresponding theory with  $\{\beta_i\} = \{0\}$ . [PRD85,034038(2012)]

相关理论文献 PRD85,034038(2012); PRL109,042002(2012);  
PRD86,085026(2012); PRL110,192001(2013); PRD89,014027(2014).  
PPNP72,44(2013); Rept.Prog.Phys.78,126201(2015);  
PPNP108,103706(2019); arXiv:2109.12356

# 最大共形原理

最大共形原理 (Principle of Maximum Conformality, PMC)

The main idea of PMC is that after proper procedures, all non-conformal  $\{\beta_i\}$ -terms in the perturbative expansion are summed into the running coupling so that the remaining terms in the perturbative series are identical to that of a conformal theory, i.e., the corresponding theory with  $\{\beta_i\} = \{0\}$ . [PRD85,034038(2012)]

相关理论文献 PRD85,034038(2012); PRL109,042002(2012);  
PRD86,085026(2012); PRL110,192001(2013); PRD89,014027(2014);  
PPNP72,44(2013); Rept.Prog.Phys.78,126201(2015);  
PPNP108,103706(2019); arXiv:2109.12356

# 最大共形原理

最大共形原理 (Principle of Maximum Conformality, PMC)

The main idea of PMC is that after proper procedures, all non-conformal  $\{\beta_i\}$ -terms in the perturbative expansion are summed into the running coupling so that the remaining terms in the perturbative series are identical to that of a conformal theory, i.e., the corresponding theory with  $\{\beta_i\} = \{0\}$ . [PRD85,034038(2012)]

相关理论文献 PRD85,034038(2012); PRL109,042002(2012);  
PRD86,085026(2012); PRL110,192001(2013); PRD89,014027(2014).  
PPNP72,44(2013); Rept.Prog.Phys.78,126201(2015);  
PPNP108,103706(2019); arXiv:2109.12356.

# 最大共形原理

类 MS 方案 ( $\delta$  重整化方案)  $\mu_\delta^2 = \mu_{\text{MS}}^2 \exp(\delta)$

MS:  $\delta = \ln 4\pi - \gamma_E$  [PRL110,192001(2013), PRD89,014027(2014)]

$$e_0 = \sum_{i=1}^{\infty} r_i (\mu_0^2 / \mu_0^2) \alpha_s^i(\mu_0). \quad (15)$$

$$\alpha_s(\mu_0) = \alpha_s(\mu_\delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n \alpha_s(\mu)}{(d \ln \mu^2)^n} \Big|_{\mu=\mu_0} (-\delta)^n \quad (16)$$

$$\begin{aligned} e_\delta = & r_1 \alpha_s(\mu_\delta) + (r_2 + \beta_0 r_1 \delta) \alpha_s^2(\mu_\delta) + (r_3 + \beta_1 r_1 \delta + 2\beta_0 r_2 \delta \\ & + \beta_0^2 r_1 \delta^2) \alpha_s^3(\mu_\delta) + (r_4 + \beta_2 r_1 \delta + 2\beta_1 r_2 \delta + 3\beta_0 r_3 \delta \\ & + 3\beta_0^2 r_2 \delta^2 + \beta_0^3 r_1 \delta^3 + 5/2 \beta_1 \beta_0 r_1 \delta^2) \alpha_s^4(\mu_\delta) + \mathcal{O}(\alpha_s^5). \quad (17) \end{aligned}$$



# 最大共形原理

类 MS 方案 ( $\delta$  重整化方案)  $\mu_\delta^2 = \mu_{\text{MS}}^2 \exp(\delta)$

MS:  $\delta = \ln 4\pi - \gamma_E$  [PRL110,192001(2013), PRD89,014027(2014)]

$$e_0 = \sum_{i=1}^{\infty} r_i (\mu_0^2/Q^2) \alpha_s^i(\mu_0), \quad (15)$$

$$\alpha_s(\mu_0) = \alpha_s(\mu_\delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n \alpha_s(\mu)}{(d \ln \mu^2)^n} \Big|_{\mu=\mu_0} (-\delta)^n \quad (16)$$

$$e_\delta = r_1 \alpha_s(\mu_\delta) + (r_2 + \beta_0 r_1 \delta) \alpha_s^2(\mu_\delta) + (r_3 + \beta_1 r_1 \delta + 2\beta_0 r_2 \delta + \beta_0^2 r_1 \delta^2) \alpha_s^3(\mu_\delta) + (r_4 + \beta_2 r_1 \delta + 2\beta_1 r_2 \delta + 3\beta_0 r_1 \delta + 3\beta_0^2 r_2 \delta^2 + \beta_0^3 r_1 \delta^3 + 5/2 \beta_1 \beta_0 r_1 \delta^2) \alpha_s^4(\mu_\delta) + \mathcal{O}(\alpha_s^5) \quad (17)$$

# 最大共形原理

类 MS 方案 ( $\delta$  重整化方案)  $\mu_\delta^2 = \mu_{\text{MS}}^2 \exp(\delta)$

MS:  $\delta = \ln 4\pi - \gamma_E$  [PRL110,192001(2013), PRD89,014027(2014)]

$$\varrho_0 = \sum_{i=1}^{\infty} r_i (\mu_0^2/Q^2) \alpha_s^i(\mu_0), \quad (15)$$

$$\alpha_s(\mu_0) = \alpha_s(\mu_\delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n \alpha_s(\mu)}{(d \ln \mu^2)^n} \Big|_{\mu=\mu_\delta} (-\delta)^n \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \varrho_\delta = & r_1 \alpha_s(\mu_\delta) + (r_2 + \beta_0 r_1 \delta) \alpha_s^2(\mu_\delta) + (r_3 + \beta_1 r_1 \delta + 2\beta_0 r_2 \delta \\ & + \beta_0^2 r_1 \delta^2) \alpha_s^3(\mu_\delta) + (r_4 + \beta_2 r_1 \delta + 2\beta_1 r_2 \delta + 3\beta_0 r_3 \delta \\ & + 3\beta_0^2 r_2 \delta^2 + \beta_0^3 r_1 \delta^3 + 5/2 \beta_1 \beta_0 r_1 \delta^2) \alpha_s^4(\mu_\delta) + \mathcal{O}(\alpha_s^5). \end{aligned} \quad (17)$$

# 最大共形原理

类 MS 方案 ( $\delta$  重整化方案)  $\mu_\delta^2 = \mu_{\text{MS}}^2 \exp(\delta)$

MS:  $\delta = \ln 4\pi - \gamma_E$  [PRL110,192001(2013), PRD89,014027(2014)]

$$\varrho_0 = \sum_{i=1}^{\infty} r_i (\mu_0^2/Q^2) \alpha_s^i(\mu_0), \quad (15)$$

$$\alpha_s(\mu_0) = \alpha_s(\mu_\delta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n \alpha_s(\mu)}{(d \ln \mu^2)^n} \Big|_{\mu=\mu_\delta} (-\delta)^n \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \varrho_\delta = & r_1 \alpha_s(\mu_\delta) + (r_2 + \beta_0 r_1 \delta) \alpha_s^2(\mu_\delta) + (r_3 + \beta_1 r_1 \delta + 2\beta_0 r_2 \delta \\ & + \beta_0^2 r_1 \delta^2) \alpha_s^3(\mu_\delta) + (r_4 + \beta_2 r_1 \delta + 2\beta_1 r_2 \delta + 3\beta_0 r_3 \delta \\ & + 3\beta_0^2 r_2 \delta^2 + \beta_0^3 r_1 \delta^3 + 5/2 \beta_1 \beta_0 r_1 \delta^2) \alpha_s^4(\mu_\delta) + \mathcal{O}(\alpha_s^5). \end{aligned} \quad (17)$$

# 最大共形原理

系数可分解为**共形**与非共形部分,  $r_i = r_{i,0} + \mathcal{O}(\{\beta_i\})$ ,

$$\begin{aligned} \rho &= r_{1,0} \alpha_5(\mu_r) + (r_{2,0} + \beta_0 r_{2,1}) \alpha_5^2(\mu_r) + (r_{3,0} + \beta_1 r_{3,1} \\ &\quad + 2\beta_0 r_{3,2} + \beta_0^2 r_{3,2}) \alpha_5^3(\mu_r) + (r_{4,0} + \beta_2 r_{4,1} + 2\beta_1 r_{4,1} \\ &\quad + \frac{5}{2} \beta_1 \beta_0 r_{4,2} + 3\beta_0 r_{4,2} + 3\beta_0^2 r_{4,2} + \beta_0^3 r_{4,3}) \alpha_5^4(\mu_r) + \dots \quad (18) \end{aligned}$$

非共形系数  $r_{ij} = \sum_{k=0}^j C_j^k r_{i-k, j-k} \ln^k(\mu_r^2/Q^2)$ ,  $r_{ij} = r_{ij}|_{\mu_r=Q}$ .

$$\frac{\partial p_\delta}{\partial \delta} = -\beta(\alpha_s) \frac{\partial p_\delta}{\partial \alpha_s}$$

若  $p_\delta$  是对应于  $\beta = 0$  的共形序列, 则不依赖于方案  $\delta$ .

# 最大共形原理

系数可分解为**共形**与非共形部分,  $r_i = r_{i,0} + \mathcal{O}(\{\beta_i\})$ ,

$$\begin{aligned} \varrho = & r_{1,0} \alpha_s(\mu_r) + (r_{2,0} + \beta_0 r_{2,1}) \alpha_s^2(\mu_r) + (r_{3,0} + \beta_1 r_{2,1} \\ & + 2\beta_0 r_{3,1} + \beta_0^2 r_{3,2}) \alpha_s^3(\mu_r) + (r_{4,0} + \beta_2 r_{2,1} + 2\beta_1 r_{3,1} \\ & + \frac{5}{2} \beta_1 \beta_0 r_{3,2} + 3\beta_0 r_{4,1} + 3\beta_0^2 r_{4,2} + \beta_0^3 r_{4,3}) \alpha_s^4(\mu_r) + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

非共形系数  $r_{ij} = \sum_{k=0}^j C_{i,j-k}^k r_{i-k,j-k} \ln^k(\mu_r^2/Q^2)$ ,  $r_{ij} = r_{ij}|_{\beta_r=0}$ .

$$\frac{\partial p_\delta}{\partial \delta} = -\beta(\alpha_s) \frac{\partial p_\delta}{\partial \alpha_s}$$

若  $p_\delta$  是对应于  $\beta = 0$  的共形序列, 则不依赖于方案  $\delta$ .

# 最大共形原理

系数可分解为共形与非共形部分,  $r_i = r_{i,0} + \mathcal{O}(\{\beta_i\})$ ,

$$\begin{aligned} \varrho = & r_{1,0} \alpha_s(\mu_r) + (r_{2,0} + \beta_0 r_{2,1}) \alpha_s^2(\mu_r) + (r_{3,0} + \beta_1 r_{2,1} \\ & + 2\beta_0 r_{3,1} + \beta_0^2 r_{3,2}) \alpha_s^3(\mu_r) + (r_{4,0} + \beta_2 r_{2,1} + 2\beta_1 r_{3,1} \\ & + \frac{5}{2} \beta_1 \beta_0 r_{3,2} + 3\beta_0 r_{4,1} + 3\beta_0^2 r_{4,2} + \beta_0^3 r_{4,3}) \alpha_s^4(\mu_r) + \dots \end{aligned} \quad (18)$$

非共形系数  $r_{i,j} = \sum_{k=0}^j C_j^k \hat{r}_{i-k,j-k} \ln^k(\mu_r^2/Q^2)$ ,  $\hat{r}_{i,j} = r_{i,j}|_{\mu_r=Q}$ .

$$\frac{\partial p_\delta}{\partial \delta} = -\beta(\alpha_s) \frac{\partial p_\delta}{\partial \alpha_s}$$

若  $p_\delta$  是对应于  $\beta=0$  的共形序列, 则不依赖于方案  $\delta$ .

# 最大共形原理

系数可分解为**共形**与非共形部分,  $r_i = r_{i,0} + \mathcal{O}(\{\beta_i\})$ ,

$$\begin{aligned} \varrho = & r_{1,0} \alpha_s(\mu_r) + (r_{2,0} + \beta_0 r_{2,1}) \alpha_s^2(\mu_r) + (r_{3,0} + \beta_1 r_{2,1} \\ & + 2\beta_0 r_{3,1} + \beta_0^2 r_{3,2}) \alpha_s^3(\mu_r) + (r_{4,0} + \beta_2 r_{2,1} + 2\beta_1 r_{3,1} \\ & + \frac{5}{2} \beta_1 \beta_0 r_{3,2} + 3\beta_0 r_{4,1} + 3\beta_0^2 r_{4,2} + \beta_0^3 r_{4,3}) \alpha_s^4(\mu_r) + \dots \quad (18) \end{aligned}$$

非共形系数  $r_{i,j} = \sum_{k=0}^j C_j^k \hat{r}_{i-k,j-k} \ln^k(\mu_r^2/Q^2)$ ,  $\hat{r}_{i,j} = r_{i,j}|_{\mu_r=Q}$ .

$$\frac{\partial \rho_\delta}{\partial \delta} = -\beta(\alpha_s) \frac{\partial \rho_\delta}{\partial \alpha_s}$$

若  $\rho_\delta$  是对应于  $\beta=0$  的共形序列, 则不依赖于方案  $\delta$ .

# 最大共形原理

系数可分解为共形与非共形部分,  $r_i = r_{i,0} + \mathcal{O}(\{\beta_i\})$ ,

$$\begin{aligned} \rho = & r_{1,0} \alpha_s(\mu_r) + (r_{2,0} + \beta_0 r_{2,1}) \alpha_s^2(\mu_r) + (r_{3,0} + \beta_1 r_{2,1} \\ & + 2\beta_0 r_{3,1} + \beta_0^2 r_{3,2}) \alpha_s^3(\mu_r) + (r_{4,0} + \beta_2 r_{2,1} + 2\beta_1 r_{3,1} \\ & + \frac{5}{2} \beta_1 \beta_0 r_{3,2} + 3\beta_0 r_{4,1} + 3\beta_0^2 r_{4,2} + \beta_0^3 r_{4,3}) \alpha_s^4(\mu_r) + \dots \quad (18) \end{aligned}$$

非共形系数  $r_{i,j} = \sum_{k=0}^j C_j^k \hat{r}_{i-k,j-k} \ln^k(\mu_r^2/Q^2)$ ,  $\hat{r}_{i,j} = r_{i,j}|_{\mu_r=Q}$ .

$$\frac{\partial \rho_\delta}{\partial \delta} = -\beta(\alpha_s) \frac{\partial \rho_\delta}{\partial \alpha_s}$$

若  $\rho_\delta$  是对应于  $\beta = 0$  的共形序列, 则不依赖于方案  $\delta$ .



# 最大共形原理单能标方法

根据 PMCs 方法 [PRD95,094006(2017)] 得,

$$Q_n | \text{PMCs} = \sum_{i=1}^n r_{i,0} \alpha_s^i(Q_*), \quad \ln \frac{Q_*^2}{Q^2} = \sum_{i=0}^{n-2} T_i \alpha_s^i(Q).$$

$$T_0 = \frac{f_{2,1}}{f_{1,0}}, \quad T_1 = \beta_0 \left( \frac{f_{2,1}^2}{f_{1,0}^2} - \frac{f_{1,1}}{f_{1,0}} \right) + 2 \left( \frac{f_{2,0} f_{2,1}}{f_{1,0}^2} - \frac{f_{1,1}}{f_{1,0}} \right), \dots$$

注  $f_{i,0}$  与  $\alpha_s(Q_*)$  均不依赖于初始能标

# 最大共形原理单能标方法

根据 PMC<sub>s</sub> 方法 [PRD95,094006(2017)] 得,

$$Q_n | \text{PMC}_s = \sum_{i=1}^n r_{i,0} \alpha_s^i(Q_*), \quad \ln \frac{Q_*^2}{Q^2} = \sum_{i=0}^{n-2} T_i \alpha_s^i(Q),$$

$$T_0 = \frac{f_{2,1}}{f_{1,0}}, \quad T_1 = \beta_0 \left( \frac{f_{2,1}^2}{f_{1,0}^2} - \frac{f_{1,1}}{f_{1,0}} \right) + 2 \left( \frac{f_{2,0} f_{2,1}}{f_{1,0}^2} - \frac{f_{1,1}}{f_{1,0}} \right), \dots$$

注  $f_{i,0}$  与  $\alpha_s(Q_*)$  均不依赖于初始能标

# 最大共形原理单能标方法

根据 PMCs 方法 [PRD95,094006(2017)] 得,

$$Q_n|_{\text{PMCs}} = \sum_{i=1}^n r_{i,0} \alpha_s^i(Q_*), \quad \ln \frac{Q_*^2}{Q^2} = \sum_{i=0}^{n-2} T_i \alpha_s^i(Q),$$

$$T_0 = -\frac{\hat{r}_{2,1}}{\hat{r}_{1,0}}, \quad T_1 = \beta_0 \left( \frac{\hat{r}_{2,1}^2}{\hat{r}_{1,0}^2} - \frac{\hat{r}_{3,2}}{\hat{r}_{1,0}} \right) + 2 \left( \frac{\hat{r}_{2,0} \hat{r}_{2,1}}{\hat{r}_{1,0}^2} - \frac{\hat{r}_{3,1}}{\hat{r}_{1,0}} \right), \dots$$

注  $r_{i,0}$  与  $\alpha_s(Q_*)$  均不依赖于初始能标

# 最大共形原理单能标方法

根据 PMCs 方法 [PRD95,094006(2017)] 得,

$$Q_n |_{\text{PMCs}} = \sum_{i=1}^n r_{i,0} \alpha_s^i(Q_*), \quad \ln \frac{Q_*^2}{Q^2} = \sum_{i=0}^{n-2} T_i \alpha_s^i(Q),$$

$$T_0 = -\frac{\hat{r}_{2,1}}{\hat{r}_{1,0}}, \quad T_1 = \beta_0 \left( \frac{\hat{r}_{2,1}^2}{\hat{r}_{1,0}^2} - \frac{\hat{r}_{3,2}}{\hat{r}_{1,0}} \right) + 2 \left( \frac{\hat{r}_{2,0} \hat{r}_{2,1}}{\hat{r}_{1,0}^2} - \frac{\hat{r}_{3,1}}{\hat{r}_{1,0}} \right), \dots$$

**注**  $\hat{r}_{i,0}$  与  $\alpha_s(Q_*)$  均不依赖于初始能标

## 应用举例

$$R_{e^+e^-}(Q) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_q e_q^2 [1 + R(Q)],$$

$$R_n(Q) = \sum_{i=1}^n r_i \alpha_s^i(\mu_r), \quad Q = 31.6 \text{ GeV. [JHEP1207,017(2012)]}$$

$$R_\tau(M_\tau) = \frac{\sigma(\tau \rightarrow \nu_\tau + \text{hadrons})}{\sigma(\tau \rightarrow \nu_\tau + \bar{\nu}_e + e^-)} = 3 \sum |V_{ff'}|^2 [1 + \hat{R}(M_\tau)].$$

$$\hat{R}_n(M_\tau) = \sum_{i=1}^n r_i(\mu_r/M_\tau) \alpha_s^i(\mu_r). \quad [\text{PRD16,703(1977)}]$$

$$\Gamma(H \rightarrow b\bar{b}) = \frac{3G_F M_H m_b^2(M_H)}{4\sqrt{2}\pi} [1 + \hat{R}(M_H)].$$

$$\hat{R}_n(M_H) = \sum_{i=1}^n r_i(\mu_r/M_H) \alpha_s^i(\mu_r). \quad [\text{PRL96,012003(2006)}]$$

## 应用举例

$$R_{e^+e^-}(Q) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_q e_q^2 [1 + R(Q)],$$

$$R_n(Q) = \sum_{i=1}^n r_i \alpha_s^i(\mu_r), \quad Q = 31.6 \text{ GeV. [JHEP1207,017(2012)]}$$

$$R_\tau(M_\tau) = \frac{\sigma(\tau \rightarrow \nu_\tau + \text{hadrons})}{\sigma(\tau \rightarrow \nu_\tau + \bar{\nu}_e + e^-)} = 3 \sum |V_{ff'}|^2 [1 + \tilde{R}(M_\tau)],$$

$$\tilde{R}_n(M_\tau) = \sum_{i=1}^n r_i(\mu_r/M_\tau) \alpha_s^i(\mu_r). \quad [\text{PRD16,703(1977)}]$$

$$\Gamma(H \rightarrow b\bar{b}) = \frac{3G_F M_H m_b^2(M_H)}{4\sqrt{2}\pi} [1 + \tilde{R}(M_H)].$$

$$\tilde{R}_n(M_H) = \sum_{i=1}^n r_i(\mu_r/M_H) \alpha_s^i(\mu_r). \quad [\text{PRL96,012003(2006)}]$$

## 应用举例

$$R_{e^+e^-}(Q) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum_q e_q^2 [1 + R(Q)],$$

$$R_n(Q) = \sum_{i=1}^n r_i \alpha_s^i(\mu_r), \quad Q = 31.6 \text{ GeV. [JHEP1207,017(2012)]}$$

$$R_\tau(M_\tau) = \frac{\sigma(\tau \rightarrow \nu_\tau + \text{hadrons})}{\sigma(\tau \rightarrow \nu_\tau + \bar{\nu}_e + e^-)} = 3 \sum |V_{ff'}|^2 [1 + \tilde{R}(M_\tau)],$$

$$\tilde{R}_n(M_\tau) = \sum_{i=1}^n r_i(\mu_r/M_\tau) \alpha_s^i(\mu_r). \quad [\text{PRD16,703(1977)}]$$

$$\Gamma(H \rightarrow b\bar{b}) = \frac{3G_F M_H m_b^2(M_H)}{4\sqrt{2}\pi} [1 + \hat{R}(M_H)],$$

$$\hat{R}_n(M_H) = \sum_{i=1}^n r_i(\mu_r/M_H) \alpha_s^i(\mu_r). \quad [\text{PRL96,012003(2006)}]$$

# 能标

$\ln Q_*^2/Q^2$  计算到 LO, NLO, NNLO 分别得到,

$$Q_*|_{e^+e^-} = \{35.36, 39.67, 40.28\} \text{ GeV},$$

$$Q_*|_{\tau} = \{0.90, 1.01, 1.05\} \text{ GeV},$$

$$Q_*|_{H \rightarrow b\bar{b}} = \{60.93, 57.00, 58.41\} \text{ GeV}.$$



# 系数

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$r_i(\mu = Q)$	0.3183	0.1428	-0.4130	0.8257
$r_{i,0}$	0.3183	0.1865	-0.0324	-0.1128
$r_i(\mu = M_\tau)$	0.3183	0.5271	0.8503	1.3046
$r_{i,0}$	0.3183	0.2174	0.1108	0.0698
$r_i(\mu = M_H)$	1.8038	2.9530	1.3470	-8.4756
$r_{i,0}$	1.8038	1.3695	-4.3869	-4.4325

## 对比：系数的准确值与置信区间

$$R_n(Q) = \sum_{i=1}^n r_i(\mu_r) \alpha_S^i(\mu_r^2), \quad R_n(Q)|_{\text{PMCS}} = \sum_{i=1}^n r_{i,0} \alpha_S^i(Q_*^2).$$

表格:  $R_n(Q)$  系数的准确值 (EC) 与 95.5%-CI

	$r_3(\mu = Q)$	$r_4(\mu = Q)$	$r_5(\mu = Q)$
CI	$[-0.87, 0.87]$	$[-0.73, 0.73]$	$[-1.20, 1.20]$
EC	-0.41	0.83	-
	$r_{3,0}$	$r_{4,0}$	$r_{5,0}$
CI	$[-0.87, 0.87]$	$[-0.56, 0.56]$	$[-0.46, 0.46]$
EC	-0.03	-0.11	-

## 对比：系数的准确值与置信区间

$$\tilde{R}_n(M_\tau) = \sum_{i=1}^n r_i(\mu_r) \alpha_S^i(\mu_r^2), \quad \tilde{R}_n(M_\tau)|_{\text{PMCS}} = \sum_{i=1}^n r_{i,0} \alpha_S^i(Q_*^2).$$

表格:  $\tilde{R}_n(M_\tau)$  系数的准确值 (EC) 与 95.5%-CI

	$r_3(\mu = M_\tau)$	$r_4(\mu = M_\tau)$	$r_5(\mu = M_\tau)$
CI	$[-1.43, 1.43]$	$[-1.51, 1.51]$	$[-1.89, 1.89]$
EC	0.85	1.30	-
	$r_{3,0}$	$r_{4,0}$	$r_{5,0}$
CI	$[-0.87, 0.87]$	$[-0.56, 0.56]$	$[-0.46, 0.46]$
EC	0.11	0.07	-

## 对比：系数的准确值与置信区间

$$\hat{R}_n(M_H) = \sum_{i=1}^n r_i(\mu_r) \alpha_S^i(\mu_r^2), \quad \hat{R}_n(M_H)|_{\text{PMCS}} = \sum_{i=1}^n r_{i,0} \alpha_S^i(Q_*^2).$$

表格:  $\hat{R}_n(M_H)$  系数的准确值 (EC) 与 95.5%-CI

	$r_3(\mu = M_H)$	$r_4(\mu = M_H)$	$r_5(\mu = M_H)$
CI	$[-8.04, 8.04]$	$[-5.23, 5.23]$	$[-12.31, 12.31]$
EC	1.35	<b>-8.48</b>	-
	$r_{3,0}$	$r_{4,0}$	$r_{5,0}$
CI	$[-4.91, 4.91]$	$[-7.77, 7.77]$	$[-6.44, 6.44]$
EC	-4.39	-4.43	-

## 对比：系数的准确值与置信区间

表格：传统方法,  $R_n(Q)$ , 不同能标下系数的准确值 (EC) 与预测系数的 95.5%-CI

		$r_3$	$r_4$
$\mu = Q$	CI	$[-0.87, 0.87]$	$[-0.73, 0.73]$
	EC	-0.41	<b>-0.83</b>
$\mu = 2Q$	CI	$[-1.12, 1.12]$	$[-0.73, 0.73]$
	EC	0.16	<b>-1.01</b>
$\mu = Q/2$	CI	$[-0.87, 0.87]$	$[-0.95, 0.95]$
	EC	-0.53	0.43

# 预测的物理量的概率分布

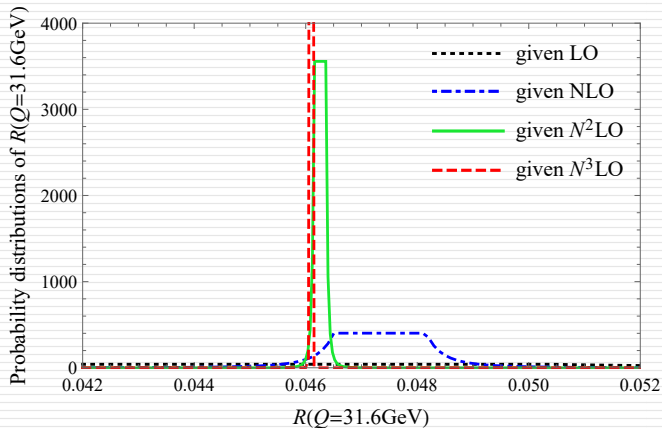


Figure: 不同条件下预测的  $R(Q)$  的概率分布.

# 预测的物理量的概率分布

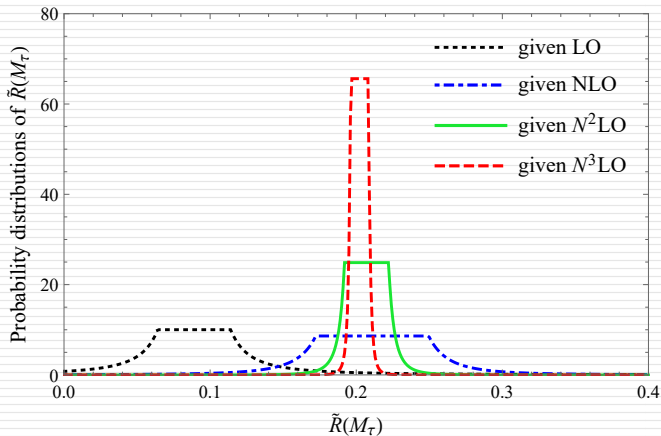


Figure: 不同条件下预测的  $\tilde{R}(M_\tau)$  的概率分布.

# 预测的物理量的概率分布

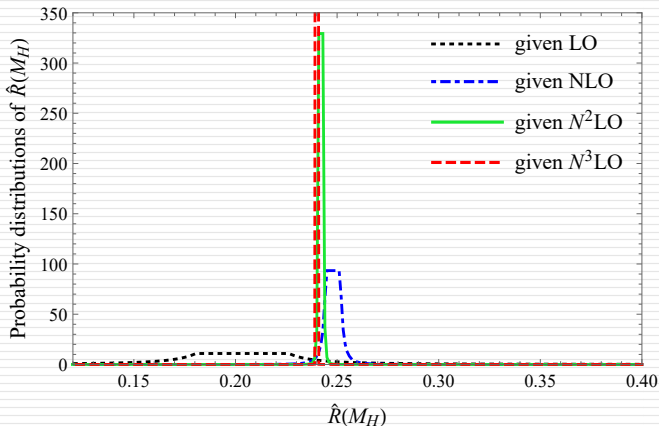


Figure: 不同条件下预测的  $\hat{R}(M_H)$  的概率分布.



## $[-k\sigma, k\sigma]$ 对应的置信度

根据概率密度函数  $f_c(c_5|c_1, c_2, c_3, c_4)$ ,  
 $f_\delta(\delta_5|c_1, c_2, c_3, c_4)$ ,  $f_\rho(\rho_5|c_1, c_2, c_3, c_4)$   
计算得到的  $[-k\sigma, k\sigma]$  区间置信度相同.

表格:  $[-k\sigma, k\sigma]$  区间置信度

置信区间	$[-\sigma, \sigma]$	$[-2\sigma, 2\sigma]$	$[-3\sigma, 3\sigma]$
置信度	99.4%	97.2%	65.3%

# 预测的物理量的置信区间

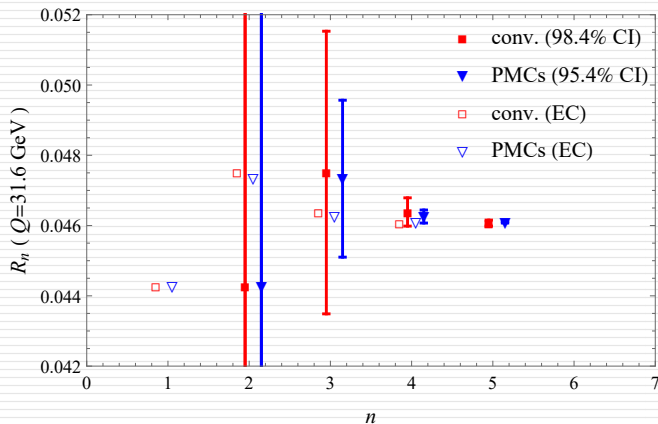


Figure: 根据  $R_n(Q)(n = 1, 2, 3, 4)$  预测  $R_{n+1}(Q)$  的  $p_c\%$ -CI.

# 预测的物理量的置信区间

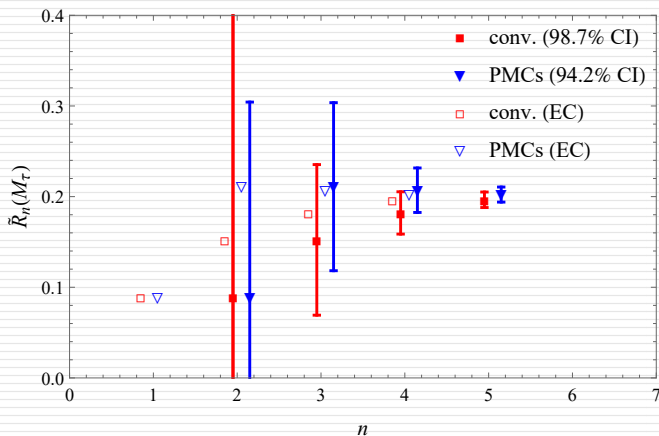


Figure: 根据  $\tilde{R}_n(M_\tau)$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) 预测  $\tilde{R}_{n+1}(M_\tau)$  的  $p_c\%$ -CI.

# 预测的物理量的置信区间

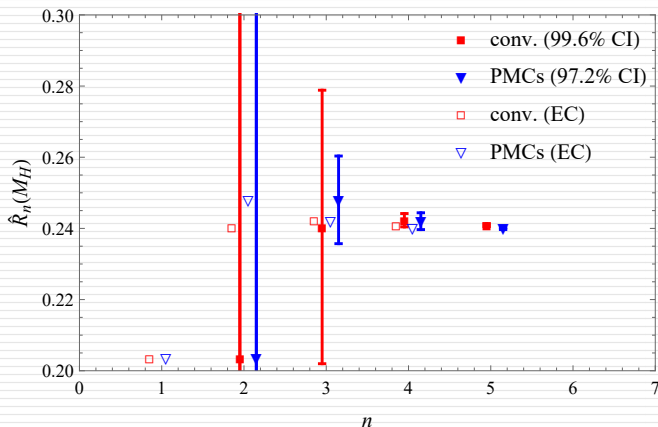


Figure: 根据  $\hat{R}_n(M_H)$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) 预测  $\hat{R}_{n+1}(M_H)$  的  $p_c\%$ -CI.



## 总结

- ▶ 运用 PMC 准确计算固定阶结果;
- ▶ 运用 Bayes 理论可靠的预测未知高阶的贡献;
- ▶ 采用临界置信度可得自洽的 pQCD 理论预言;
- ▶ 综合 PMC 与 Bayes 理论可提高 pQCD 预言能力.

## 展望

- ▶ Bayes 理论预测未知高阶具有良好的可拓展性;
- ▶ 当前 Bayes 理论的先验模型有改进之处.



## 总结

- ▶ 运用 PMC 准确计算固定阶结果;
- ▶ 运用 Bayes 理论可靠的预测未知高阶的贡献;
- ▶ 采用临界置信度可得自洽的 pQCD 理论预言;
- ▶ 综合 PMC 与 Bayes 理论可提高 pQCD 预言能力.

## 展望

- ▶ Bayes 理论预测未知高阶具有良好的可拓展性;
- ▶ 当前 Bayes 理论的先验模型有改进之处.

谢 谢 !