

光前夸克模型下 $P \rightarrow T$ 跃迁形状因子研究

学科、专业 : 物理学、 粒子物理与原子核物理
研究方向 : 粒子物理理论
申请学位 : 理学硕士
申请人 : 任玉宛
指导教师 : 常钦 教授、 陈丽丽 讲师

2022 年 4 月 4 日

Outline

- 1 研究动机
- 2 理论框架
- 3 数值结果与分析
- 4 总结与展望
- 5 致谢

- 由重夸克到轻夸克跃迁引起的 B 介子和 D 介子的衰变过程在检验标准模型和寻找新物理等方面具有重要意义。

受 $R_{D(*)}$ 反常的启发, 研究张量 (T) 介子的衰变对寻找新物理效应具有很大优势。

Y. S. Amhis *et al.* [HFLAV], *Eur. Phys. J. C* **81**, no.3, 226 (2021);

- 在介子弱衰变的研究中, 形状因子是必不可少的非微扰输入参数。

光前夸克模型为非微扰物理量的计算提供了一个概念上简单, 唯象上可行的理论框架。

M. V. Terentev. *Sov. J. Nucl. Phys.* **24**, 106 (1976);

V. B. Berestetsky and M. V. Terentev, *Sov. J. Nucl. Phys.* **25**, 347-354 (1977);

W. Jaus, *Phys. Rev. D* **41**, 3394 (1990);

W. Jaus and D. Wyler, *Phys. Rev. D* **41**, 3405 (1990).

主要任务:

$$\mathcal{B} \equiv \langle T(\epsilon^{\mu\nu*}, p'') | \bar{q}_1''(k_1'') \Gamma q_1'(k_1') | P(p') \rangle, \quad \Gamma = \sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\mu\nu} \gamma_5, \dots \quad (1)$$

标准光前夸克模型 (SLF QM) :

介子束缚态:

$$|M(p, L, J)\rangle = \sum_{h_1, h_2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2\sqrt{k_1^+}} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2\sqrt{k_2^+}} (2\pi)^3 \delta^3(p - k_1 - k_2) \\ \Psi_{LS}^{JJ_z}(k_1, h_1, k_2, h_2) |q_1(k_1, h_1)\rangle |\bar{q}_2(k_2, h_2)\rangle, \quad (2)$$

动量空间波函数 $\Psi_{LS}^{JJ_z}(k_1, h_1, k_2, h_2)$:

$$\Psi_{LS}^{JJ_z}(k_1, h_1, k_2, h_2) = S_{h_1, h_2}(x, \mathbf{k}_\perp) \psi(x, \mathbf{k}_\perp) \quad (3)$$

自旋轨道波函数 $S_{h_1, h_2}(x, \mathbf{k}_\perp)$: Phys. Rev. D **41**, 3405 (1990); Phys. Rev. D **69**, 074025 (2004);

$$S_{h_1, h_2} = \frac{\bar{u}(k_1, h_1) \Gamma' v(k_2, h_2)}{\sqrt{2} \hat{M}_0}, \quad (4)$$

其中, P 和 T 介子的顶角算符 Γ' :

$$\Gamma'_P = \gamma_5, \quad (5)$$

$$\Gamma'_T = -\frac{1}{2} \hat{\epsilon}^{\mu\nu} \left[\gamma_\mu - \frac{(k_1 - k_2)_\mu}{D_{T, LF}} \right] (k_1 - k_2)_\nu, \quad D_{T, LF} = M_0 + m_1 + m_2, \quad (6)$$

径向波函数 $\psi(x, \mathbf{k}_\perp)$:

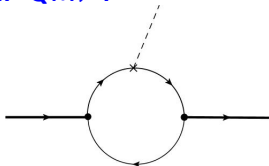
$$\psi_s(x, \mathbf{k}_\perp) = 4 \frac{\pi^{\frac{3}{4}}}{\beta^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\partial k_z}{\partial x}} \exp \left[-\frac{k_z^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{2\beta^2} \right], \quad (7)$$

$$\psi_p(x, \mathbf{k}_\perp) = \frac{\sqrt{2}}{\beta} \psi_s(x, \mathbf{k}_\perp), \quad (8)$$

矩阵元:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\text{SLF}} = & \sum_{h'_1, h'_1, h_2} \int \frac{dx d^2 \mathbf{k}'_\perp}{(2\pi)^3 2x} \psi''^*(x, \mathbf{k}''_\perp) \psi'(x, \mathbf{k}'_\perp) S_{h'_1, h_2}^{\prime \dagger}(x, \mathbf{k}''_\perp) \\ & C_{h'_1, h'_1}(x, \mathbf{k}'_\perp, \mathbf{k}''_\perp) S'_{h'_1, h_2}(x, \mathbf{k}'_\perp) \end{aligned} \quad (9)$$

协变光前夸克模型 (CLF QM) :

Figure: 矩阵元 $\mathcal{B}$ 费曼图

矩阵元:

$$\mathcal{B} = N_c \int \frac{d^4 k_1'}{(2\pi)^4} \frac{H_P H_T}{N_1' N_1'' N_2} i \mathbf{S}_{\mathcal{B}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^*, \quad (10)$$

内线费米子圈求迹部分 $\mathbf{S}_{\mathcal{B}}$:

$$\mathbf{S}_{\mathcal{B}} = \text{Tr} \left[\Gamma (\not{k}_1' + m_1') (i\Gamma_P) (-\not{k}_2 + m_2) (i\gamma^0 \Gamma_T^\dagger \gamma^0) (\not{k}_1'' + m_1'') \right], \quad (11)$$

顶角算符 $\Gamma_{P,T}$:

$$i\Gamma_P = -i\gamma_5, \quad (12)$$

$$i\Gamma_T = i \frac{1}{2} \left[\gamma_\mu - \frac{(k_1'' - k_2)_\mu}{D_{T,\text{con}}} \right] (k_1'' - k_2)_\nu, \quad D_{T,\text{con}} = M + m_1'' + m_2, \quad (13)$$

假设: $H_{P,T}$ 在 k_1^- 的复平面上是解析的。则, 在对 k_1^- 积分后, q_2 在壳, 且有以下替换:

$$N_1^{('')} \rightarrow \hat{N}_1^{('')} = x \left(M'^{('')2} - M_0'^{('')2} \right) \quad (14)$$

$$\chi_{P(T)} = H_{P(T)} / N'^{('')} \rightarrow h_{P(T)} / \hat{N}'^{('')}, \quad D_{T,\text{con}} \rightarrow D_{T,\text{LF}}, \quad (\text{type-I}) \quad (15)$$

其中, 顶角 $h_{P(T)}$ 为

$$h_{P(T)} / \hat{N}'^{('')} = \frac{1}{\sqrt{2N_c}} \sqrt{\frac{\bar{x}}{x}} \frac{\psi_{s(p)}}{\hat{M}_0'^{('')}} \quad (16)$$

$$\chi_{P(T)} = H_{P(T)} / N'^{('')} \rightarrow h_{P(T)}' / \hat{N}'^{('')}, \quad M \rightarrow M_0. \quad (\text{type-II}) \quad (17)$$

矩阵元:

$$\hat{B} = N_c \int \frac{dx d^2 \mathbf{k}'_{\perp}}{2(2\pi)^3} \frac{h_P h_T}{\bar{x} \hat{N}'_1 \hat{N}''_1} \hat{S}_B \cdot \epsilon^* \quad (18)$$

为了有效确定zero-mode贡献，我们需要以下的分解替换：

Jaus, Phys. Rev. D **60**, 054026 (1999); H. Y. Cheng, Phys. Rev. D **69**, 074025 (2004)

$$\begin{aligned} \hat{k}_1'^{\mu} \hat{k}_1'^{\nu} \rightarrow & g^{\mu\nu} A_1^{(2)} + P^{\mu} P^{\nu} A_2^{(2)} + (P^{\mu} q^{\nu} + q^{\mu} P^{\nu}) A_3^{(2)} + q^{\mu} q^{\nu} A_4^{(2)} \\ & + \frac{P^{\mu} \omega^{\nu} + \omega^{\mu} P^{\nu}}{\omega \cdot P} B_1^{(2)} + \dots (\omega, \mathbf{C}_i^{(j)}), \end{aligned} \quad (19)$$

CLF QM中形状因子完整结果：

$$[\mathcal{F}]^{\text{full}} = [\mathcal{F}]^{\text{CLF}} + [\mathcal{F}]^{\text{B}}. \quad (20)$$

$P \rightarrow T$ 跃迁形状因子的定义:

$$\langle T(\epsilon^{\mu\nu}, p'') | \bar{q}_2 \gamma_\mu q_1 | P(p') \rangle = i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} e^{*\nu} P^\alpha q^\beta \frac{V(q^2)}{M' + M''}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \langle T(\epsilon^{\mu\nu}, p'') | \bar{q}_2 \gamma_\mu \gamma_5 q_1 | P(p') \rangle = & -2M'' \frac{e^* \cdot q}{q^2} q_\mu A_0(q^2) \\ & - (M' + M'') \left(e_\mu^* - \frac{e^* \cdot q}{q^2} q_\mu \right) A_1(q^2) \\ & + \frac{e^* \cdot q}{M' + M''} \left(P_\mu - \frac{M'^2 - M''^2}{q^2} q_\mu \right) A_2(q^2), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \langle T(\epsilon^{\mu\nu}, p'') | \bar{q}_2 \sigma_{\mu\nu} q^\nu (1 + \gamma_5) q_1 | P(p') \rangle = & -\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} e^{*\nu} P^\alpha q^\beta T_1(q^2) \\ & + i \left[(M'^2 - M''^2) e_\mu^* - (e^* \cdot q) P_\mu \right] T_2(q^2) \\ & + i \left(e^* \cdot q \right) \left[q_\mu - \frac{q^2}{M'^2 - M''^2} P_\mu \right] T_3(q^2), \end{aligned} \quad (23)$$

其中, $\varepsilon_{0123} = -1$, $P = p' + p''$, $q = p' - p''$, $e^{*\nu} \equiv \frac{\epsilon^{*\mu\nu} \cdot p'_\mu}{M'}$.

■ 自治性问题

$$\begin{aligned} \tilde{T}_3^B = & \frac{2(M'^2 - M''^2)}{e^* \cdot q} \frac{\epsilon^{\lambda\delta*} q_\lambda \omega_\delta}{\omega \cdot P} \left\{ B_1^{(2)} \left[3 + \frac{4(m_1'' + 2m_2 - 2m_1'')}{D_{V,\text{con}}} \right] \right. \\ & \left. + 4B_1^{(3)} \left(1 + \frac{m_1' - m_1'' - 2m_2}{D_{V,\text{con}}} \right) + \frac{8(m_1' - m_2)B_2^{(3)}}{D_{V,\text{con}}} \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\tilde{T}_3^B = \begin{cases} \frac{2M'(M'^2 - M''^2)(M'^2 - M''^2 + q_\perp^2)}{(M'^2 - M''^2)^2 + 2(M'^2 - 2M''^2)q_\perp^2 + q_\perp^4} \left\{ B_1^{(2)} \left[3 + \frac{4(m_1'' + 2m_2 - 2m_1'')}{D_{V,\text{con}}} \right] \right. \\ \quad \left. + 4B_1^{(3)} \left(1 + \frac{m_1' - m_1'' - 2m_2}{D_{V,\text{con}}} \right) + \frac{8(m_1' - m_2)B_2^{(3)}}{D_{V,\text{con}}} \right\}, & \lambda'' = 0 \\ \frac{M'(M'^2 - M''^2)}{M'^2 - M''^2 + q_\perp^2} \left\{ B_1^{(2)} \left[3 + \frac{4(m_1'' + 2m_2 - 2m_1'')}{D_{V,\text{con}}} \right] + 4B_1^{(3)} \left(1 + \frac{m_1' - m_1'' - 2m_2}{D_{V,\text{con}}} \right) \right. \\ \quad \left. + \frac{8(m_1' - m_2)B_2^{(3)}}{D_{V,\text{con}}} \right\}, & \lambda'' = \pm 1 \\ 0. & \lambda'' = \pm 2 \end{cases} \quad (25)$$

显然，这依赖于螺旋度 λ'' 的选择。

$$[T_3]_{\lambda=0}^{\text{full}} \neq [T_3]_{\lambda=\pm 1}^{\text{full}} \neq [T_3]_{\lambda=\pm 2}^{\text{full}}$$

定义 $\Delta_B(x)$ 为

$$\Delta_B(x) \equiv \frac{d[\mathcal{F}^B]_{\lambda''}}{dx}, \quad (26)$$

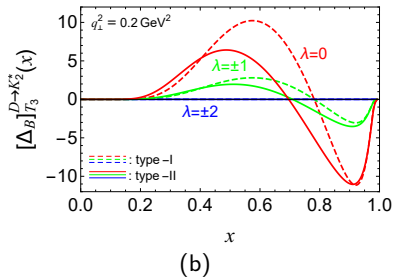
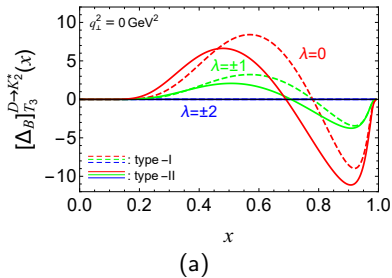


Figure: $D \rightarrow K_2^*$ 在 $q_\perp^2 = (0, 0.2) \text{ GeV}^2$ 时 $[\Delta_B]_{T_3}(x)$ 对 x 的依赖性

Table: $B_c \rightarrow D_2^*$ 过程形状因子 $T_3(q_\perp^2)$ 在 $q_\perp^2 = (0, 1, 4, 9) \text{ GeV}^2$ 数值结果

$B_c \rightarrow D_2^*$		$[T_3]_{\lambda''=\pm 2}^{\text{SLF}}$	$[T_3]_{\lambda''=0}^{\text{full}}$	$[T_3]_{\lambda''=\pm 1}^{\text{full}}$	$[T_3]_{\lambda''=\pm 2}^{\text{full}}$	$[T_3]^{\text{val.}}$	$[T_3]^{\text{CLF}}$
$q_\perp^2 = 0$	type-I	0.03	-0.14	-0.04	0.05	0.10	0.05
	type-II	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08	0.08
$q_\perp^2 = 1$	type-I	0.03	-0.13	-0.04	0.05	0.09	0.05
	type-II	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07
$q_\perp^2 = 4$	type-I	0.02	-0.11	-0.04	0.03	0.07	0.03
	type-II	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
$q_\perp^2 = 9$	type-I	0.02	-0.08	-0.03	0.02	0.05	0.02
	type-II	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04

$$[T_3]_{\lambda=0}^{\text{full}} \neq [T_3]_{\lambda=\pm 1}^{\text{full}} \neq [T_3]_{\lambda=\pm 2}^{\text{full}} \quad (\text{type - I}) \quad (27)$$

$$[T_3]_{\lambda=0}^{\text{full}} \doteq [T_3]_{\lambda=\pm 1}^{\text{full}} \doteq [T_3]_{\lambda=\pm 2}^{\text{full}} \quad (\text{type - II}) \quad (28)$$

■ “新” 的自洽性问题

H. Y. Cheng and C. K. Chua, Phys. Rev. D **69**, 094007 (2004)

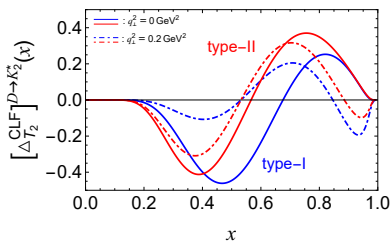
$$\text{CC} : 2ig_{\nu\lambda}g_{\alpha\mu}g_{\beta\sigma}(P+q)^\beta \hat{k}'_{1\sigma} \hat{k}'_{1\alpha} \hat{k}'_{1\delta} = 2ig_{\nu\lambda}g_{\alpha\mu}g_{\beta\sigma}(P+q)^\beta \left[(g^{\alpha\sigma}P_\delta + g_\delta^\alpha P^\sigma + g_\delta^\sigma P^\alpha)A_1^{(3)} + (g^{\alpha\sigma}q_\delta + g_\delta^\alpha q^\sigma + g_\delta^\sigma q^\alpha)A_2^{(3)} + P^\sigma P^\alpha P_\delta A_3^{(3)} + \dots \right]$$

$$\text{ours} : 2ig_{\nu\lambda}g_{\alpha\mu}g_{\beta\sigma}(P+q)^\beta \hat{k}'_{1\sigma} \hat{k}'_{1\alpha} \hat{k}'_{1\delta} = 2ig_{\nu\lambda} \hat{k}'_{1\mu} \hat{k}'_{1\delta} \hat{k}'_{1\alpha} \cdot (P+q) \quad (29)$$

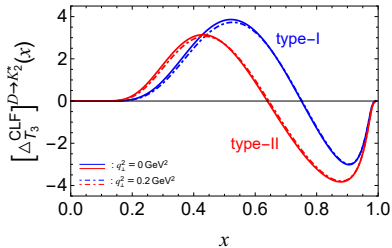
定义:

$$\Delta_{\mathcal{F}}^{\text{CLF}}(x, q_\perp^2) \equiv \frac{d[\mathcal{F}]_{\text{ours}}^{\text{CLF}}}{dx} - \frac{d[\mathcal{F}]_{\text{CC}}^{\text{CLF}}}{dx}, \quad (30)$$

其中, $\mathcal{F} = T_{2,3}$.



(a)



(b)

Figure: $D \rightarrow K_2^*$ 在 $q_{\perp}^2 = (0, 0.2) \text{ GeV}^2$ 时 $\Delta_{T_{2,3}}^{\text{CLF}}$ 对 x 的依赖性

■ 协变性问题

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\mathcal{B}}_{\text{B}}(\Gamma = \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 q^\nu) = & 4i\omega_{\mu} \epsilon^{*\lambda\delta} q_\lambda q_\delta \left\{ \frac{B_1^{(2)}}{\omega \cdot P} \left[2M'^2 - M''^2 + (m'_1 - m_2)(m_2 - m''_1) + q^2 \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{2}{D_{V,\text{con}}} ((M'^2 - M''^2)(m'_1 + m''_1) - q^2(m'_1 - m''_1 - 2m_2)) \right] \right. \\
 & \left. + \dots \right.
 \end{aligned} \tag{31}$$

type-I: 矩阵元的协变性被破坏。

type-II: 协变性问题得以解决。

■ 零模贡献

$$[\mathcal{F}]^{\text{CLF}} = [\mathcal{F}]^{\text{val.}} + [\mathcal{F}]^{\text{z.m.}}$$

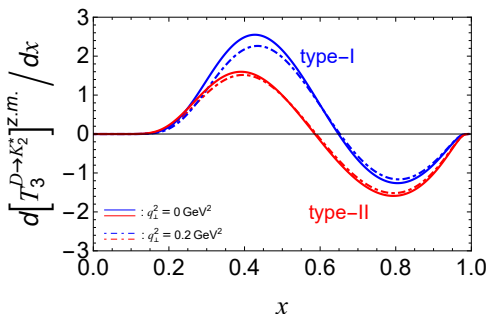


Figure: $D \rightarrow K_2^*$ 在 $q_{\perp}^2 = (0, 0.2) \text{ GeV}^2$ 时 $d[T_3]^{\text{z.m.}}/dx$ 对 x 的依赖性

■ 数值结果

拟合方式:

$$\mathcal{F}(q^2) = \frac{\mathcal{F}(0)}{1 - q^2/m_{i,pole}^2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^N b_k \left[z(q^2, t_0)^k - z(0, t_0)^k \right] \right\}, \quad (32)$$

其中, $z(q^2, t_0) = \frac{\sqrt{t_+ - q^2} - \sqrt{t_+ - t_0}}{\sqrt{t_+ - q^2} + \sqrt{t_+ - t_0}}$, $t_{\pm} = (M' \pm M'')^2$, $t_0 = (M' + M'')(\sqrt{M'} - \sqrt{M''})^2$.

Table: 本文在 $q^2 = 0$ 计算的 $B \rightarrow a_2$ 和 $B \rightarrow K_2^*$ 形状因子的理论预测, 以及采用QCD SR和传统CLF QM计算的结果。

	$B \rightarrow a_2$				$B \rightarrow K_2^*$			
	this work	QCD SR	pQCD	CLF	this work	QCD SR	pQCD	CLF
$V(0)$	$0.24^{+0.04}_{-0.04}$	$0.18^{+0.12}_{-0.07}$	$0.18^{+0.05}_{-0.04}$	0.28	$0.28^{+0.05}_{-0.05}$	$0.22^{+0.11}_{-0.08}$	$0.21^{+0.06}_{-0.05}$	0.29
$A_0(0)$	$0.21^{+0.03}_{-0.03}$	$0.30^{+0.06}_{-0.05}$	$0.18^{+0.06}_{-0.04}$	0.24	$0.24^{+0.04}_{-0.04}$	$0.30^{+0.06}_{-0.05}$	$0.18^{+0.05}_{-0.04}$	0.23
$A_1(0)$	$0.19^{+0.04}_{-0.03}$	$0.16^{+0.09}_{-0.05}$	$0.11^{+0.03}_{-0.03}$	0.21	$0.22^{+0.07}_{-0.01}$	$0.19^{+0.09}_{-0.07}$	$0.13^{+0.04}_{-0.03}$	0.22
$A_2(0)$	$0.17^{+0.03}_{-0.02}$	$0.07^{+0.08}_{-0.03}$	$0.06^{+0.02}_{-0.01}$	0.19	$0.20^{+0.04}_{-0.03}$	$0.11^{+0.05}_{-0.06}$	$0.08^{+0.03}_{-0.02}$	0.21
$T_1(0)$	$0.19^{+0.03}_{-0.03}$	$0.15^{+0.09}_{-0.05}$	$0.15^{+0.04}_{-0.03}$		$0.23^{+0.04}_{-0.04}$	$0.19^{+0.09}_{-0.06}$	$0.17^{+0.05}_{-0.04}$	0.28
$T_2(0)$	$0.19^{+0.03}_{-0.03}$	$0.15^{+0.09}_{-0.05}$	$0.15^{+0.04}_{-0.03}$		$0.23^{+0.04}_{-0.04}$	$0.19^{+0.09}_{-0.06}$	$0.17^{+0.05}_{-0.04}$	0.28
$T_3(0)$	$0.16^{+0.01}_{-0.05}$	$0.07^{+0.06}_{-0.03}$	$0.13^{+0.04}_{-0.03}$		$0.12^{+0.03}_{-0.01}$	$0.09^{+0.06}_{-0.04}$	$0.14^{+0.05}_{-0.03}$	-0.25

总结与展望:

- CLF QM会出现协变性破坏和两种自洽性问题：一种是由非零的类光矢量 ω 依赖项引起的，这部分贡献同时破坏了洛伦兹协变性；另一种是由于采用不同处理强子矩阵元方法导致的。
- 通过修改协变框架和光前框架的对应关系（type-II方案），即可同时解决自洽性和协变性问题。
- 以上研究结果不仅能够改进CLF计算框架，而且可以为介子唯象学研究提供必要的非微扰输入。

感谢各位专家老师批评指正！