

色-动量对偶研究进展

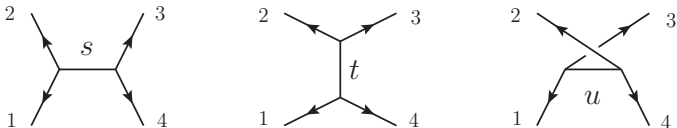
中科院理论物理研究所 李泽宇

第二届微扰量子场论研讨会杭州 2022 8.22-24

色-动量对偶简介

色-动量对偶

以四点振幅为例，我们可以将胶子四点树图振幅的结果用三张三顶点图表示出来，分别记为 s, t, u -channel:



$$A_4^{\text{tree}} = \frac{c_s n_s}{s} + \frac{c_t n_t}{t} + \frac{c_u n_u}{u} \quad (1)$$

其中:

$$c_s = f^{a_1 a_2 a_s} f^{a_s a_3 a_4}, \quad c_t = f^{a_4 a_1 a_t} f^{a_t a_2 a_3}, \quad c_u = f^{a_1 a_3 a_u} f^{a_u a_2 a_4} \quad (2)$$

分别是这三张图的色因子。 n_s, n_t, n_u 是对应的 numerator。 s, t, u 此处同时也标记这张图的传播子。

色-动量对偶

不难看出, c_s , c_t , c_u 之间满足 Jacobi 关系:

$$c_s = c_t + c_u \quad (3)$$

但同时我们发现, 我们也可以让对应的 numerator 满足类似的关系:

$$n_s = n_t + n_u \quad (4)$$

我们称为“对偶 Jacobi 关系”。这是最简单的色-动量对偶的例子。

更一般地, 色-动量对偶提出: 若我们将杨-米尔斯场中的振幅 (或者形状因子) 用三顶点图表示出来:

$$A_n^{\text{tree}} = \sum_{i \in \text{trivalent}} \frac{C_i N_i}{\Pi_a D_{i,a}} \quad (5)$$

则有:

$$C_s = C_t + C_u \implies N_s = N_t + N_u \quad (6)$$

[Bern, Carrasco, Johansson 0805.3993](#)

色-动量对偶

Bern, Carrasco 和 Johansson 在 0805.3993 这篇文章中提出, 若规范场振幅:

$$A_n^{\text{tree}} = \sum_{i \in \text{trivalent}} \frac{C_i N_i}{\Pi_a D_{i,a}} \quad (7)$$

中的 N_i 满足“对偶 Jacobi 关系”, 则引力振幅可以通过将 C_i 替换成相应的 N_i 得到:

$$M_n^{\text{tree}} = \sum_{i \in \text{trivalent}} \frac{N_i N_i}{\Pi_a D_{i,a}} \quad (8)$$

这个操作称为“double copy”。在圈图中也有类似的推广 (Bern, Carrasco, Johansson 1004.0476)。

因此“色-动量对偶”对于引力理论的研究也有很大的意义。

色-动量对偶

色-动量对偶在树图水平已被证明，但是在圈图上没有证明，只能具体的构造。在超对称场论中有很多的构造。但是在纯杨-米尔斯场中的构造还十分有限，一些有代表性的例子有：

- d 维四点单圈振幅 (Bern et.al 1303.6605)
- 外线为 “all-plus” 或 “single-minus” 的 n 点单圈振幅 (Boels et.al 1301.4165)
- 外线为 “all-plus” 的五点两圈振幅 (Mogull, O’Connell 1511.06652)

更多的例子可以参考：Song He, Oliver Schlotterer, 1612.00417; S. He, O. Schlotterer, Y. Zhang, 1706.00640.

本次报告将主要介绍纯杨-米尔斯场 d 维两点两圈形状因子的 “色-动量对偶” 构造。

Based on the work: Zeyu Li, Gang Yang, Jinxuan Zhang, 2204.09407

两点两圈形状因子的“色-动量”对偶构造

背景介绍

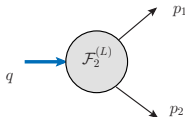
我们所研究的场论是：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \text{tr}(F^2),$$

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a, \quad a = 1, \dots, N_c$$
(9)

我们计算的物理量是算符 $\text{tr}(F^2)$ 的两点形状因子：

$$\hat{\mathcal{F}}_2(1, 2) = \int d^D x e^{-iq \cdot x} \langle g(p_1) g(p_2) | \text{tr}(F^2)(x) | 0 \rangle$$
(10)



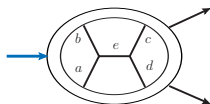
它可以看成是一个 Higgs 粒子到两个胶子的振幅。我们利用它来实现纯杨-米尔斯场中的色-动量对偶。

计算步骤

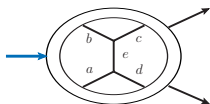
- ① 画出三顶点图并生成所有的“对偶 Jacobi 关系”
- ② 构建 ansatz, 得到满足色-动量对偶的被积函数
- ③ 用 Unitarity cut 限制 ansatz
- ④ 积分以及结果讨论

三顶点图与“对偶 Jacobi 关系”

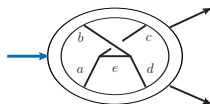
我们可以从一张图的某条传播子出发，局域的挑出一个 4 点振幅的拓扑，记成 s -channel 图，从它出发生成 t -channel 和 u -channel 的图，



(a) s -channel

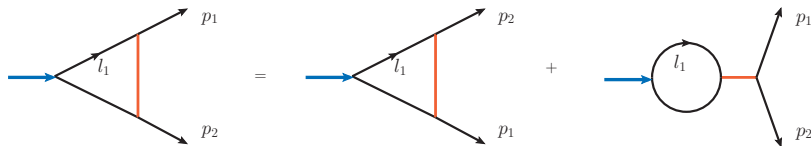


(b) t -channel



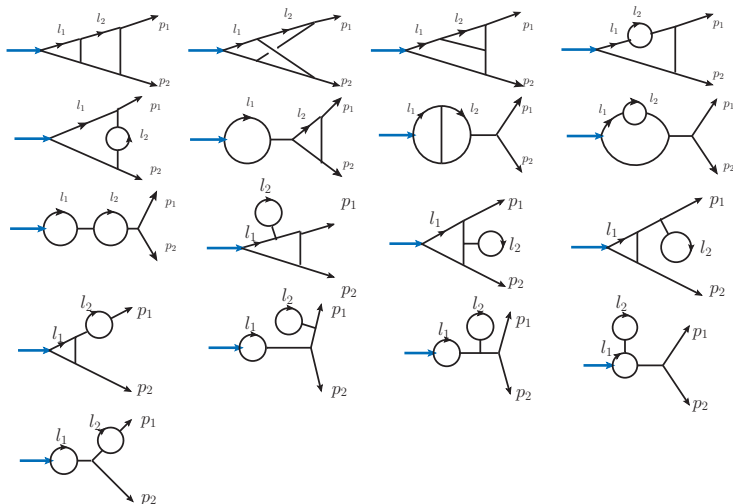
(c) u -channel

并得到相应的“对偶 Jacobi 关系”，以两点单圈形状因子为例：

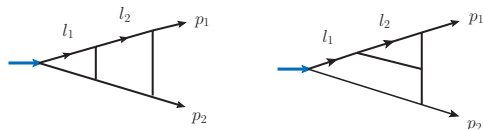


三顶点图与“对偶 Jacobi 关系”

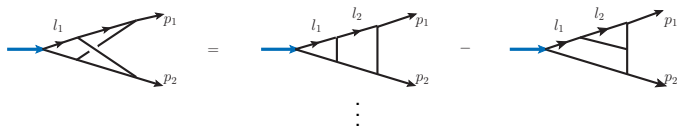
对于两点两圈形状因子，所有的三顶点图如下：



生成并求解所有的“对偶 Jacobi 关系”，最终所有图的 numerator 都可以由如下两张图解出：



比如：



我们称这两个拓扑为“master 拓扑”，其 numerator 记为 N_1 和 N_2 。

构建 ansatz

由于“对偶 Jacobi 关系”，我们只需要对 N_1 和 N_2 设 ansatz。

$$N_1 = \sum_{k=1}^{444} a_k M_k, \quad N_2 = \sum_{k=1}^{444} b_k M_k \quad (11)$$

其中 M_k 是由 $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$, $\varepsilon_i \cdot p_j$, $p_i \cdot p_j$ 等 lorentz product 构成的 monomial。 a_k , b_k 为待定系数。

同时，通过分析费曼图我们知道， a_k 会含有维数 d ：

$$a_k = a_{k,0} + d a_{k,1} + d^2 a_{k,2} \quad (12)$$

在要求每张图的 numerator 都满足这张图的对称性以及所有的“对偶 Jacobi 关系”都自洽之后，会剩下 380 个系数。

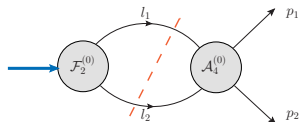
接下来我们使用 Unitarity cut 来施加物理约束。

Unitarity cut

圈图中，取若干传播子在壳：

$$\frac{i}{l^2} \xrightarrow{\text{cut}} 2\pi\delta_+(l^2) \quad (13)$$

则圈图会分解成低圈或者树图的乘积，如：



$$\mathcal{F}_2^{(1)}|_{s_{12}-\text{cut}} = \int d\text{PS}_2 \sum_{\text{helicities}} \mathcal{F}_2^{(0)}(l_1, l_2) \mathcal{A}_4^{(0)}(1, 2, -l_2, -l_1) \quad (14)$$

于是我们可以用更简单的树图信息重构出圈图的被积函数。

Unitarity cut

对于纯杨-米尔斯场，我们需要使用 d-维 cut 来得到完整的物理结果。

此时树图的表达式是用费曼图算出的 lorentz product，保证了在 d 维下的有效性。内线极化矢量的求和满足：

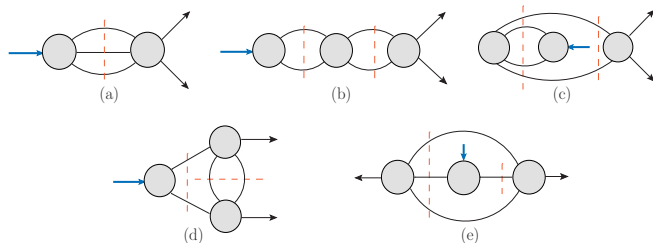
$$\sum_{\text{helicities}} \varepsilon^\mu(p) \varepsilon^\nu(p) = \eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu \xi^\nu + p^\nu \xi^\mu}{p \cdot \xi}, \quad (15)$$

ξ 是任意的类光 reference 动量。

得到树图乘积后，比较等式两边，给出参数的限制。

Unitarity cut

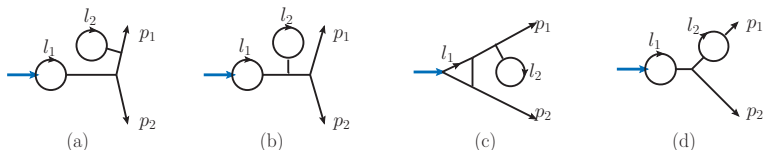
对于两点两圈形状因子，完备的 cut 如下：



在施加了所有 cut 的约束之后，还剩下 235 个系数未定。（此时参数已不影响物理结果）

剩余的参数

我们可以加一些额外条件进一步限制参数空间，比如令如下拓扑的 numerator 为 0:



但并不是所有含有 tadpole 或 massless bubble 的拓扑都能取为 0。

最终我们将参数个数减少为 65 个。

我们验证了在积分 (IBP) 之后，这些剩余参数不再存在，并且与已知的结果是一致的。(T. Gehrmann et.al 1004.03653)

总结与展望

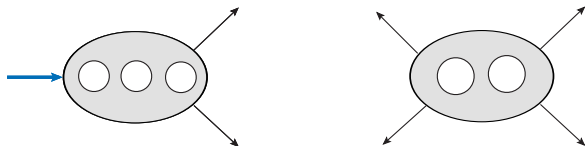
总结与展望

总结：

我们构造出了纯杨-米尔斯场中两点两圈形状因子满足色-动量对偶的被积函数，并且结果在 d 维下有效。

总结与展望

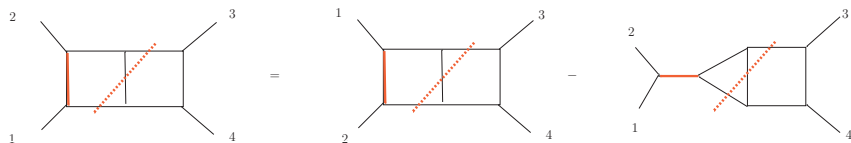
实现了两点两圈形状因子的“色-动量对偶”构造后，我们也尝试了构造两点三圈形状因子和四点两圈振幅的“色-动量对偶”。



此时我们发现在最小 ansatz 下（满足费曼图的 power counting 和每一个拓扑的对称性），两者都不存在满足“色-动量对偶”的解。

总结与展望

对于最小 ansatz 下四点两圈振幅不满足“色-动量对偶”这一事实, Bern 等人在文章 1510.03448 中就已经指出。文章提出, 可以将被积函数完全满足 off shell 的“色-动量对偶”的条件弱化为在“Unitarity cut”下满足, 比如:



这样的被积函数依然可以进行“double copy”得到引力振幅。

总结与展望

文章为了要求四点两圈振幅满足这一性质，放弃了从 master 拓扑出发利用“对偶 Jacobi 关系”得到被积函数的做法，转而对每一个拓扑单独假设了 ansatz，在求解“Unitarity cut”的同时要求“对偶 Jacobi 关系”成立。

文章一共引入了 120904 个参数，在要求对称性满足后剩下 28204 个参数。

他们的构造方法很难向更高圈进行推广，比如计算两点三圈形状因子和四点三圈振幅，就会非常困难，如何更加有效地实现这样的构造是一个值得研究的问题。

Thank you!