

自举方法在形状因子计算中的应用 和最大超越度原理

郭圆宏

中国科学院理论物理研究所

Based on the works: Y. Guo, L. Wang, G. Yang, PRL, 2106.01374
Y. Guo, Q. Jin, L. Wang, G. Yang, 2205.12969

第二届微扰量子场论研讨会, 2022.08.22-24

自举方法在形状因子计算中的应用和最大超越度原理

- 1 研究背景和动机
- 2 自举方法思想和最大超越度原理
- 3 自举方法的求解过程
- 4 通过自举方法理解最大超越度原理
- 5 主要结果和展望

高圈高点物理量计算

量子场论中的重要物理量：

- 振幅： $\mathcal{A}_n = \langle p_1, p_2, \dots, p_n | p'_1, p'_2, \dots, p'_m \rangle$
- 形状因子： $\mathcal{F}_{\mathcal{O},n} = \langle p_1, \dots, p_n | \mathcal{O}(q) | \Omega \rangle$ ，其中 $q = p_1 + \dots + p_n$

传统费曼图方法：费曼图的数量随着外线数和圈数上升增加得非常快

Table: 树图水平

胶子数目	4	5	6	7	8	9	10
费曼图的数目	4	25	220	2485	34300	559405	10525900

Parke-Taylor 公式¹：

$$\mathcal{A}_n^{(0)}(1^-, 2^-, 3^+, \dots, n^+) = \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n1 \rangle}. \quad (1)$$

¹S. J. Parke and T. R. Taylor, Phys. Rev. Lett. 56, 2459 (1986)

1 形状因子和有效理论顶点相关：

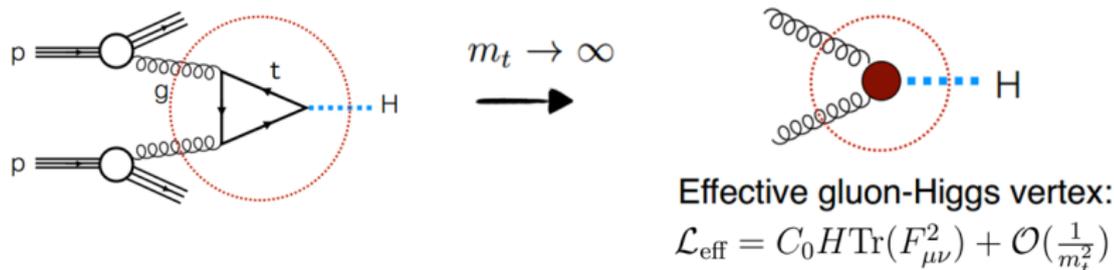


Figure: 胶子通过顶夸克圈产生希格斯玻色子的有效过程

- 2 $\mathcal{N} = 4$ SYM 中形状因子可被视为超对称版本的希格斯振幅。
- 3 $\mathcal{N} = 4$ SYM 和 QCD 中形状因子的最大超越度部分相同。
- 4 通过计算加深对场论的理解，发展更有效的计算方法。

自举方法在形状因子计算中的应用和最大超越度原理

- 1 研究背景和动机
- 2 自举方法思想和最大超越度原理
- 3 自举方法的求解过程
- 4 通过自举方法理解最大超越度原理
- 5 主要结果和展望

自举方法介绍

自举方法 (bootstrap method) 的思想: **直接假设可能的结果, 通过一般的物理要求进行约束, 从而得到最终结果。**

物理结果的最终形式: 维数正规化下, 任意 L 圈 n 外线的物理结果总可以由一族**有限个数**的主积分 (master integral) 线性表示

$$\underbrace{\mathcal{F}_n^{(L)}}_{\text{形状因子}} = \underbrace{\mathcal{F}_n^{(0)}}_{\text{树图因子}} \sum_k c_k(s_{ij}, \epsilon) \underbrace{I_{n,k}^{(L)}}_{\text{主积分}}, \quad (2)$$

$s_{ij} = (p_i + p_j)^2$, $\epsilon = (4 - D)/2$ 。通过物理要求的约束直接求解系数 c_k 。

超越函数和超越度

超越度：约定 ϵ^n 超越度为 $-n$ ，费曼积分中出现的超越函数

Table: 超越函数的超越度

函数	有理函数	π^n	ζ_n	$\log(x)^n$	$\text{Li}_n(x)$	\dots
超越度	0	n	n	n	n	\dots

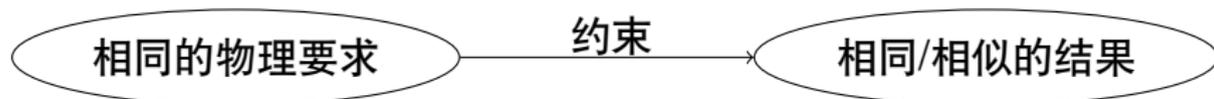
最大超越度部分 (maximally transcendental part): 维数正规化下, L 圈结果中超越度为 $2L$ 的部分, 例如

$$\mathcal{I}_{n,\text{M.T.}}^{(1)} = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{\epsilon^2} + \frac{\log(s_{i,i+1}/\mu)}{\epsilon} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^0). \quad (3)$$

最大超越度原理

最大超越度原理 (MTP, maximally transcendentality principle)²: $\mathcal{N} = 4$ SYM 和 QCD 中一类物理量 (比如尖点 (cusp) 反常量纲, 形状因子) 的最大超越度部分是相同的。

自举方法的启示:



²A. V. Kotikov and L. N. Lipatov, Nucl. Phys. B661 (2003) 19, hep-ph/0208220; A. Kotikov, L. Lipatov, A. Onishchenko and V. Velizhanin, Phys.Lett. B595 (2004) 521, hep-th/0404092.

自举方法在形状因子计算中的应用和最大超越度原理

- 1 研究背景和动机
- 2 自举方法思想和最大超越度原理
- 3 自举方法的求解过程
- 4 通过自举方法理解最大超越度原理
- 5 主要结果和展望

求解目标

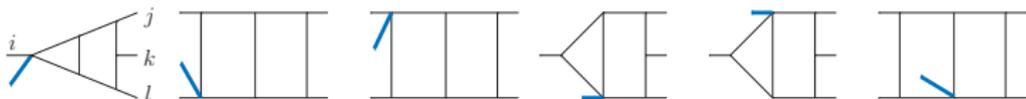


Figure: 最大拓扑包含 221 个主积分³

拟设 (ansatz) 形式 (最大超越度部分):

$$\mathcal{I}_{\text{tr}(\phi^3),4}^{(2),\text{ansatz}}(1^\phi, 2^\phi, 3^\phi, 4^+) = \sum_{k=1}^{221} (a_k B_1 + b_k B_2) I_{4,k}^{(2)}, \quad B_1 = \frac{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle}{\langle 13 \rangle \langle 24 \rangle}, \quad B_2 = \frac{\langle 14 \rangle \langle 23 \rangle}{\langle 13 \rangle \langle 24 \rangle},$$
$$\mathcal{I}_{\text{tr}(F^3),4,\text{M.T.}}^{(2),\text{ansatz}}(1^-, 2^-, 3^-, 4^+) = \sum_{k=1}^{221} \left(a_k B_1 + b_k B_2 + c_k B_1 B_2 + d_k \frac{B_1}{B_2} + e_k \frac{B_2}{B_1} \right) I_{4,k}^{(2)}. \quad (4)$$

物理约束: (1) 红外减除; (2) 共线极限; (3) 非物理极点消除; (4) 么正性切割。

³S. Abreu, H. Ita, F. Moriello, B. Page, W. Tschernow and M. Zeng, JHEP 11 (2020) 117, 2005.04195; D. D. Canko, C. G. Papadopoulos and N. Syrrakos, JHEP 01 (2021) 199, 2009.13917

红外发散：在维数正规化下，高圈结果的红外发散由已知的低圈结果和尖点反常量纲唯一决定，以两圈为例

$$\mathcal{I}_n^{(2)} = \underbrace{\frac{A_0}{\epsilon^4} + \frac{A_1}{\epsilon^3} + \frac{A_2}{\epsilon^2} + \frac{A_3}{\epsilon}}_{\text{红外部分}} + \underbrace{\frac{A_4}{\epsilon}}_{\text{有限部分}} + \mathcal{O}(\epsilon), \quad \mathcal{I}_n^{(L)} = \mathcal{F}_n^{(L)} / \mathcal{F}_n^{(0)}. \quad (5)$$

$\mathcal{N} = 4$ SYM: BDS 公式⁴

$$\mathcal{I}_n^{(2)}(\epsilon)|_{\text{IR}} = \left[\frac{1}{2} (\mathcal{I}_n^{(1)}(\epsilon))^2 + f^{(2)}(\epsilon) \mathcal{I}_n^{(1)}(2\epsilon) \right] |_{\text{IR}}, \quad f^{(2)} = -2(\zeta_2 + \zeta_3 \epsilon + \zeta_4 \epsilon^2). \quad (6)$$

QCD: Catani 公式⁵(最大超越度部分与 BDS 公式一致)。

⁴Z. Bern, L. J. Dixon and V. A. Smirnov, Phys. Rev. D72 (2005) 085001, hep-th/0505205.

⁵S. Catani, Phys. Lett. B427 (1998) 161, hep-ph/9802439.

BDS 公式减除之后的有限剩余函数 (Remainder function):

$$\mathcal{R}_n^{(2)} = \mathcal{I}_n^{(2)}(\epsilon) - \frac{1}{2} \left(\mathcal{I}_n^{(1)}(\epsilon) \right)^2 - f^{(2)}(\epsilon) \mathcal{I}_n^{(1)}(2\epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (7)$$

共线极限: 高点 $\mathcal{R}_n^{(L)}$ 在共线极限 $p_i \parallel p_j$ 下退化到低点 $\mathcal{R}_{n-1}^{(L)}$

$$\mathcal{R}_n^{(L)} \xrightarrow{p_i \parallel p_{i+1}} \mathcal{R}_{n-1}^{(L)}. \quad (8)$$

非物理极点消除

非物理极点消除：系数中包含非物理极点时，结果不应当在极点处发散

$$\mathcal{F}_n^{(L)} = \underbrace{\mathcal{F}_n^{(0)}}_{\text{物理极点}} \sum_k \underbrace{c_k(s_{ij}, \epsilon)}_{\text{非物理极点}} I_{n,k}^{(L)}. \quad (9)$$

以 $\text{tr}(\phi^3)$ 为例：

$$\mathcal{F}_{\text{tr}(\phi^3),4}^{(0)}(1^\phi, 2^\phi, 3^\phi, 4^+) = \frac{\langle 31 \rangle}{\langle 34 \rangle \langle 41 \rangle}, \quad B_1 = \frac{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle}{\langle 13 \rangle \langle 24 \rangle}, \quad B_2 = \frac{\langle 14 \rangle \langle 23 \rangle}{\langle 13 \rangle \langle 24 \rangle}, \quad (10)$$

物理极点： $s_{i,i+1} \rightarrow 0$ ；非物理极点： $\langle 24 \rangle \rightarrow 0$ 。

么正性切割

么正性切割：使传播子在壳

$$\frac{i}{p^2 + i\epsilon} \rightarrow 2\pi\delta_+(p^2). \quad (11)$$

通过么正性切割得到主积分的系数：

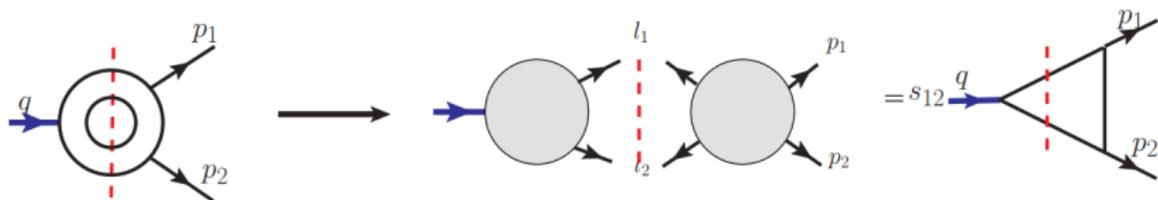


Figure: 单圈的么正性切割

Table: 自由参数被约束的过程

物理约束	$\text{tr}(\phi^3)$	$\text{tr}(F^3)$
对称性	221	560
红外减除 (symbol)	82	207
共线极限 (symbol)	38	119
非物理极点消除 (symbol)	22	53
红外减除 (数值)	17	24
共线极限 (数值)	10	20
么正性切割	0	0

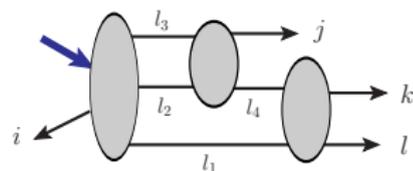


Figure: D 维么正性切割

自举方法在形状因子计算中的应用和最大超越度原理

- 1 研究背景和动机
- 2 自举方法思想和最大超越度原理
- 3 自举方法的求解过程
- 4 通过自举方法理解最大超越度原理
- 5 主要结果和展望

最大超越度部分的自由度

Table: 自由参数被约束的过程

物理约束	$\text{tr}(F^3)$
对称性	560
红外减除 (symbol)	207
共线极限 (symbol)	119
非物理极点消除 (symbol)	53
红外减除 (数值)	24
共线极限 (数值)	20

对于 QCD 和 $\mathcal{N} = 4$ SYM 中结果的最大超越度部分，**物理约束仅在么正性切割这一步不同**：存在与**20**个自由参数相关的差异？

结果相同的么正性切割

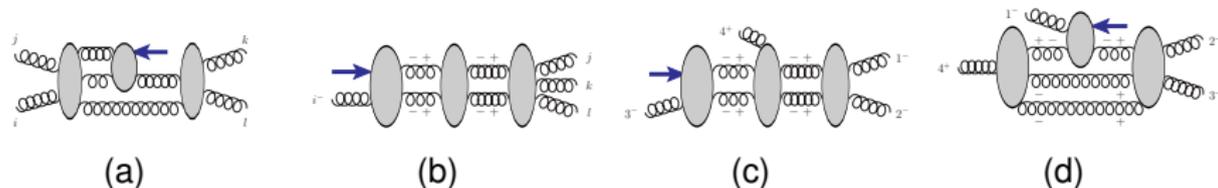


Figure: 仅包含胶子贡献的么正性切割

(a)-(d) 能限定剩余 20 个自由参数里的 18 个: $\mathcal{N} = 4$ SYM 和 QCD 的结果差异只与 2 个自由参数相关

$$\tilde{\Delta}_{\text{M.T.}}^{(2)} = \frac{B_1}{B_2} (c_1 \tilde{G}_1^{(2)} + c_2 \tilde{G}_2^{(2)}) + (p_1 \leftrightarrow p_3). \quad (12)$$

结果差异

最大超越度原理

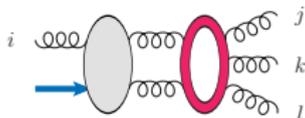
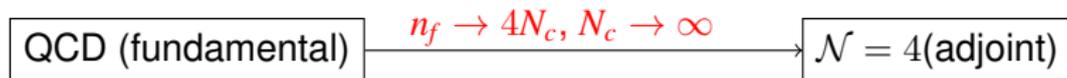


Figure: 产生差异的么正性切割

只有费米子贡献最大超越度部分。



$$\mathcal{F}_{4, \text{tr}(F^3), \text{M.T.}}^{(2), \text{QCD}} \Big|_{n_f \rightarrow 4N_c, N_c \rightarrow \infty} = \mathcal{F}_{4, \text{tr}(F^3), \text{M.T.}}^{(2), \mathcal{N} = 4} \quad (13)$$

自举方法在形状因子计算中的应用和最大超越度原理

- 1 研究背景和动机
- 2 自举方法思想和最大超越度原理
- 3 自举方法的求解过程
- 4 通过自举方法理解最大超越度原理
- 5 **主要结果和展望**

主要结果和展望

主要结果：

应用自举方法，在平面 $\mathcal{N} = 4$ SYM 中，首次计算得到了一系列两圈四点形状因子结果：算符 $\text{tr}(\phi^3)^6$ ，算符 $\text{tr}(F^3)$ 的最大超越度部分⁷。

展望：

- 1 使用自举方法计算更复杂的情形，例如非平面部分、低阶超越度部分和 QCD 结果。
- 2 通过自举方法进一步验证和理解最大超越度原理。
- 3 在自举方法中考虑其它可能的物理约束，例如 FFOPE 等。

⁶Y. Guo, L. Wang, G. Yang, Phys. Rev. Lett. 127, 151602, arXiv:2106.01374.

⁷Y. Guo, Q. Jin, L. Wang, G. Yang, arXiv:2205.12969.

感谢!