

PI Controller Optimization for Fast Orbit Feedback System of Storage Ring with Desired Performance and Robustness

黄玺洋

高能物理研究所

2022.08.19

目录

- ① 简要介绍快轨道反馈（FOFB）系统及其稳定性判据。
- ② 给出一种通用的，数学的方法优化 FOFB 反馈控制器参数。

FOFB loop

为了满足光源非常高的稳定性要求（亚微米量级），需要 FOFB 系统（执行频率 kHz 量级）。FOFB 系统根据储存环上 BPM 测得的束流位置信息，在控制器中计算得到各个快速校正子需要设置的电流强度，通过快校正子电源实现快校正子的快速响应，进行对轨道扰动的快速反馈。

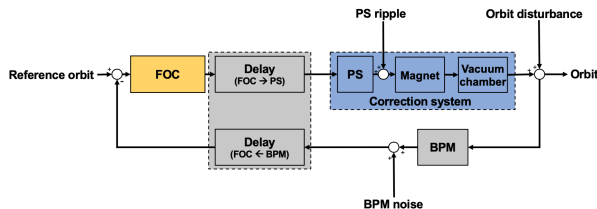


图: Feedback loop

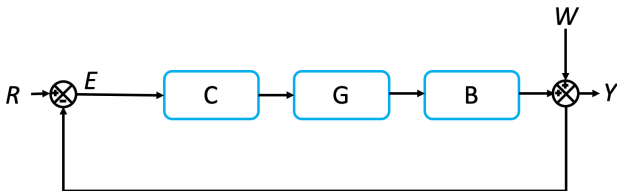


图: Feedback loop

$$C(s) = k_p + k_i/s, G(s) = \frac{k}{s+a}, G_d(s) = e^{-sL}, B(s) = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-sNT}}{1 - e^{-sT}}.$$

C 代表控制器, G 代表校正系统, B 代表 BPM。L 为系统延时, 延时模块在上图中并未画出 (包含了数据打包和传输, PI 控制器的计算延迟, PSC 的延迟)。

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)B(s)G_d(s)}.$$

S 代表了一个系统的性能。

稳定性判据

闭环特征方程:

$$D(s) = (s^2 + as)e^{sL}(1 - e^{-sT}) + (kk_p s + kk_i)(1 - e^{-sNT})/N.$$

令 $s = j\omega$ 代入上式并且两边同时乘以 $e^{j\omega NT/2}/2j$ 并假设 $D(j\omega) = D_r(\omega) + jD_i(\omega)$, 那么

$$D_r(\omega) = -\omega^2 \cos(\tau\omega) \sin\left(\frac{T\omega}{2}\right) - a\omega \sin\left(\frac{T\omega}{2}\right) \sin(\tau\omega) + \frac{kk_i \sin\left(\frac{NT\omega}{2}\right)}{N},$$
$$D_i(\omega) = a\omega \cos(\tau\omega) \sin\left(\frac{T\omega}{2}\right) - \omega^2 \sin\left(\frac{T\omega}{2}\right) \sin(\tau\omega) + \frac{kk_p \omega \sin\left(\frac{NT\omega}{2}\right)}{N}.$$

其中 $\tau = L + (N-1)T/2$ 。

考虑在 (k_p, k_i) 平面有这么一个点 (k_p^0, k_i^0, ω) 使得 D_r, D_i 都为 0., 定义 $\mathbf{J}$ 为:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial D_r(\omega)}{\partial k_p} & \frac{\partial D_r(\omega)}{\partial k_i} \\ \frac{\partial D_i(\omega)}{\partial k_p} & \frac{\partial D_i(\omega)}{\partial k_i} \end{bmatrix}_{(k_p^0, k_i^0, \omega)}$$

如果 $\det \mathbf{J}$ 非 0, 根据隐函数定理¹, 上式中的 D_r, D_i 有唯一的 (k_p, k_i, ω) 的解曲线。并且随着 ω 增加, 如果 $\det \mathbf{J} < 0$, 边界右边的参数对应了稳定区; 反之如果 $\det \mathbf{J} > 0$, 边界左边的参数对应了稳定区。对于任意 $\omega > 0$, $\det \mathbf{J} = -k^2 \omega \sin^2(NT\omega/2)/N^2 < 0$ 恒成立, 这意味着满足稳定性要求的 (k_p, k_i) 都在边界曲线右边。稳定性边界可以通过令 $D_r = 0$ 和 $D_i = 0$ 求得:

$$k_p = -\frac{N \csc(\frac{NT\omega}{2}) \sin(\frac{T\omega}{2})}{k} (a \cos(\tau\omega) - \omega \sin(\tau\omega)),$$

$$k_i = \frac{N \csc(\frac{NT\omega}{2}) \sin(\frac{T\omega}{2})}{k} (\omega^2 \cos(\tau\omega) + a\omega \sin(\tau\omega)).$$

此时, 我们仅仅知道如何使系统稳定, 但是对系统的性能和稳定裕度都不清楚...

¹<https://mathworld.wolfram.com/ImplicitFunctionTheorem.html>

GM 和 PM 是衡量两个指标，分别是 180° 相移下的增益和单位增益下的相移，可以告诉我们系统与振荡的接近程度。系统的 PM 即为 180° 减去单位增益下的实际相移，GM 即为将 1 除以 180° 相移时的增益。系统的响应时间也是一个很重要的指标，代表了反馈系统的性能。

如何去调参数？通常来说有两种方法：1，手动调参；2，matlab 中的“PID tuner” toolbox 来调节。这两种方法都需要依靠经验，且并无系统性或者普适性。

如何去调参数？通常来说有两种方法：1，手动调参；2，matlab 中的“PID tuner” toolbox 来调节。这两种方法都需要依靠经验，且并无系统性或者普适性。

利用增益-相位裕度测试因子（GPMT）和极点配置方法，只要给定想要的系统响应，就可以直接求得我们所需的 PI 参数。

FOFB loop

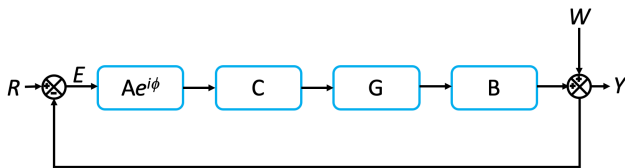


图: Feedback loop

$$S(s) = \frac{1}{1 + Ae^{-j\phi} G(s) C(s) B(s) G_d(s)}.$$

$Ae^{j\phi}$ 是 GPMT 环节^{2,3,4}, 并不真实存在于反馈回路里面, 只是为了辅助计算增益裕度 (GM) 和相位裕度 (PM)。

²S.Srivastava, J. of Process Control 37 (2016) 70–77.

³N.Tan, ISA Transactions 44 (2005) 213–223.

⁴D.J.Wang, J. Process Control 22(2012) 1298–1306.

保证 GM 和 PM 的 PI 参数

在开环环节中前置增加一项 $Ae^{-j\phi}$ (GPMT) 可以求得 (k_p, k_i) 平面上的 GM 和 PM 边界。当 $A = 1$ 时, ϕ 给出 (k_p, k_i) 平面上的 PM 边界, 当 $\phi = 0$ 时, A 给出 (k_p, k_i) 平面上的 GM 边界。加上了 GPMT 环节后的闭环特征方程可以写为:

$$F(s) = (s^2 + as)e^{sL}(1 - e^{-sT})e^{j\phi} + A(kk_p s + kk_i)(1 - e^{-sNT})/N.$$

如同之前的步骤, 可以求得

$$k_p = -\frac{N \csc(\frac{NT\omega}{2}) \sin(\frac{T\omega}{2})}{Ak} (a \cos(\tau\omega + \phi) - \omega \sin(\tau\omega + \phi)),$$
$$k_i = \frac{N \csc(\frac{NT\omega}{2}) \sin(\frac{T\omega}{2})}{Ak} (\omega^2 \cos(\tau\omega + \phi) + a\omega \sin(\tau\omega + \phi)).$$

而 $\det \mathbf{J} = -A^2 k^2 \omega \sin^2(NT\omega/2)/N^2 < 0$ 对于任意 $\omega > 0$ 恒成立, 说明求得的裕度边界曲线的右侧是满足我们需要的控制器参数。

保证极点配置的 PI 参数

如果考虑闭环时间响应，我们就需要考虑极点配置的问题。此时假设闭环传递函数阻尼比为 ζ ，无阻尼固有频率为 ω_{cl} 。那么我们配置的极点为 $s = \sigma \pm j\omega = -\zeta\omega_{cl} \pm j\omega_{cl}\sqrt{1-\zeta^2}$ 。如果这样的极点存在，那么必定是的 $D(s) = 0$ 解，将 $s = \sigma + j\omega$ 代入可得：

$$H(\sigma + j\omega) = e^{\tau(j\omega + \sigma)}(a(j\omega + \sigma) + (j\omega)^2) + ((j\omega + \sigma)kk_p + kk_i) \sin\left(\frac{NT\omega}{2}\right)/N.$$

令 $H_r = 0, H_i = 0$ ，那么我们可以得到配置了极点的 (k_p, k_i) ：

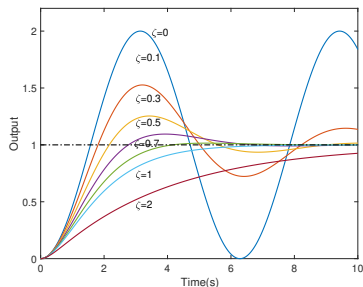
$$k_p = -\frac{Ne^{\sigma\tau} \csc\left(\frac{NT\omega}{2}\right) \sin\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{k\omega} (\chi_2 \cos(\omega\tau) + \chi_1 \sin(\omega\tau)),$$
$$k_i = \frac{Ne^{\sigma\tau} \csc\left(\frac{NT\omega}{2}\right) \sin\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{k\omega} ((\chi_2\sigma - \chi_1\omega) \cos(\omega\tau) + (\chi_2\omega + \chi_1\sigma) \sin(\omega\tau))$$

其中 $\chi_1 = \sigma^2 + a\sigma - \omega^2, \chi_2 = a\omega + 2\sigma\omega$ 。通过对 ζ 和 ω_{cl} 的选择，我们可以得到满足闭环响应时间的控制器参数。

阻尼比和无阻尼自然频率

复数极点 $s = \sigma \pm j\omega = -\zeta\omega_{cl} \pm j\omega_{cl}\sqrt{1-\zeta^2}$ ，在 s 平面中，该极点位于半径 ω_{cl} 、角速度 $\theta = \arcsin \zeta$ 处。系统的脉冲响应可以写成：

$h(t) = \frac{\omega_{cl}}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} \sin \omega t$ 。当 $\zeta = 0$ 时，系统无阻尼（系统会振荡）；当 ζ 接近 1 时，系统响应无振荡。



图：阻尼比与二阶系统阶跃响应

Scan PI paremeters

给定一套参数: $N = 10, a = k = 31400, L = 80\mu s, T = 4.5\mu s$.

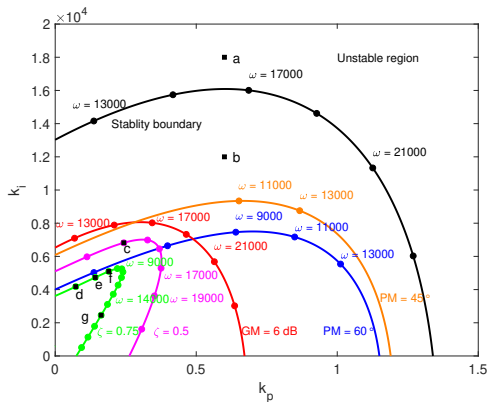


图: PI parameters under different conditions

Scan PI paremeters

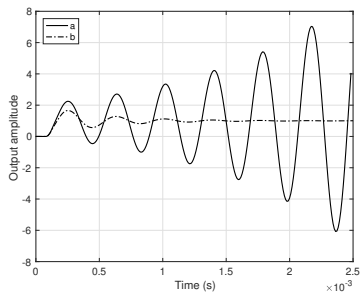
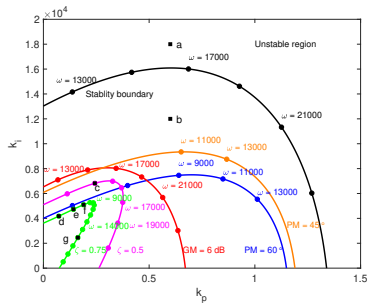


图: Step response of a, b

Scan PI paremeters

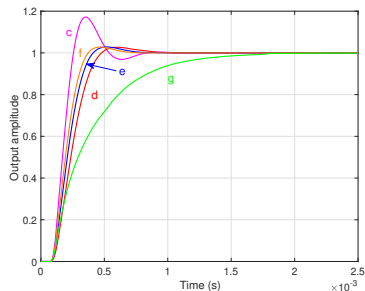
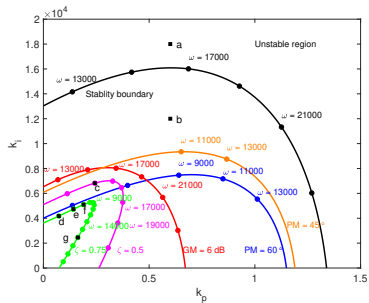


图: c,d,e,f,g 的对应的系统的阶跃响应

Scan PI paremeters

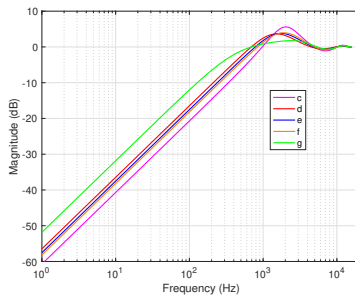
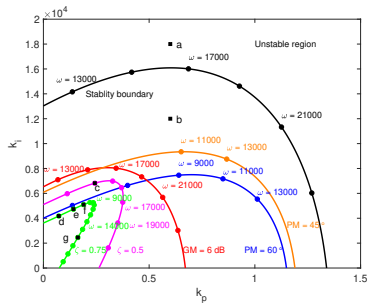


图: c,d,e,f,g 的对应的系统对噪声抑制的能力

表: 不同 PI 参数对应的 FOFB 闭环时间响应和噪声抑制带宽

Points	(k_p, k_i)	ζ	GM	PM	OS	t_r	t_s	f_c	G_{DC}
c	(0.24,6800)	0.5	7.4 dB	52°	17.2%	0.12 ms	0.72 ms	1070 Hz	-61 dB
d	(0.72,4178)	0.75	11.1 dB	63°	2.7%	0.25 ms	0.70 ms	690 Hz	-56 dB
e	(0.14,4731)	0.75	10.5 dB	62°	2.9%	0.21 ms	0.61 ms	780 Hz	-57 dB
f	(0.19,5096)	0.75	10 dB	62°	2.8%	0.19 ms	0.55 ms	840 Hz	-58 dB
g	(0.16,2455)	0.75	15 dB	81°	0	0.72 ms	1.4 ms	690 Hz	-51 dB

总结

- ① 针对如何优化 FOFB 控制器参数，给出了一种通用的方法。
- ② 此方法通过对闭环传递函数分析，可以得到 (k_p, k_i) 平面上的稳定性边界，满足条件的 PM 和 GM 边界，以及指定极点的 PI 参数曲线。
- ③ 此方法通过对闭环时间响应和带宽的分析，可以得到我们需要的 PI 参数。通常来说，我们在需要的 GM 和 PM 的重叠区域里选择合适的 ζ ，并取 $k_p(\omega)$ 和 $k_i(\omega)$ 单调增的点。

Backup slides

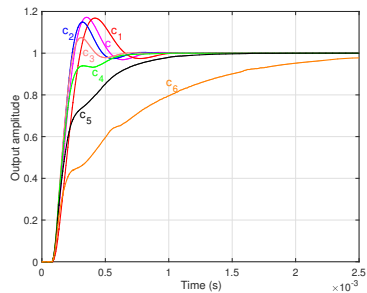
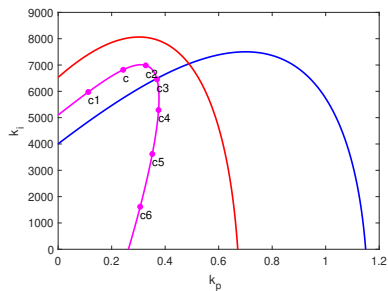


图: Step response of $\zeta = 0.5$

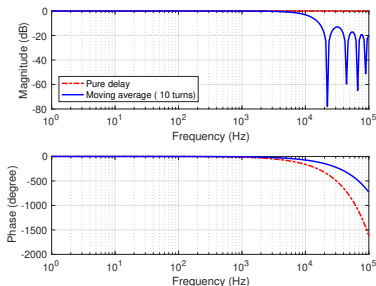
BPM transfer function

$$B(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-N+1}}{N} = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}.$$

将 $z = e^{sT}$ 代入可以得到: (T 为回旋频率, N 为 FA 数据的平均圈数)

$$B(s) = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-sNT}}{1 - e^{-sT}}.$$

将 FA 数据的模拟带宽 f_{cutoff} 定义为幅值下降到-3dB, $f_{cutoff} \approx 9.8\text{kHz}$ 。



FOFB Bandwidth

