

SCATTERING THEORY — THE POTENTIAL SCATTERING FOR A SINGLE PARTICLE

Zhiguang Xiao

Reference: Taylor, Scattering theory

2023 年 3 月 2 日

1 引言

2 单粒子势散射的时间相关的描述

- 经典散射
- 量子散射: 入射态, 出射态
- 渐近条件
- Møller operators
- 散射态和束缚态, 渐近完备

3 散射算符

- 散射算符 S 及幺正性
- Intertwine relation, 能量守恒
- T 矩阵元

4 散射截面

- 经典散射截面
- 量子的散射截面
- 散射截面的计算
- 光学定理

5 两无自旋粒子散射

6 两个带自旋粒子的散射

散射过程是研究量子物理的一个最重要的实验手段

- 卢瑟福的散射实验： $\alpha \rightarrow$ 金箔，发现了原子核。
- 弗兰克-赫兹实验：电子在水银蒸汽中散射 — 原子能级。
- 原子核的结构： $\alpha + {}^{14}\text{N} \rightarrow p + {}^{17}\text{O}$
- 粒子物理中：高能粒子散射—产生新的粒子。LHC, 重离子碰撞等。

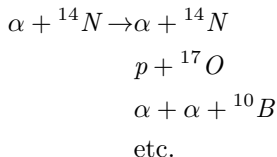
$$p + p \rightarrow p + p + \pi^0$$

研究散射理论不同的方式：

- 非相对论和相对论性散射：我们这里主要讨论非相对论散射
- 单道散射和多道散射。
- 时间依赖和时间无关的方式。

单道散射和多道散射

- 散射道 (Channel): 同样的入射态, 可以有不同组散射末态, 每一组末态 — 散射道。
- 单道散射 (Single channel scattering): 只有一组散射末态。
- 多道散射 (Multichannel scattering): 可以有不止一组散射末态。
- 例: 多道散射.



单道散射: e.g. low energy



量子力学中的势散射。

- 单道散射: 实际上是理想化的近似。
 $n - \alpha$ collision above 20MeV, n knock α apart.
 $e - p$ always produce photons.

时间依赖 & 时间无关的散射描述

- 量子力学教科书中：势散射，时间无关的表述

$$\psi_{\mathbf{p}}^+ \xrightarrow{r \rightarrow \infty} (2\pi)^{-3/2} [e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + f(E, \theta) \frac{e^{ipr}}{r}]$$

入射动量为 $\mathbf{p}$ 的粒子束 + 散射的球面波，振幅为 $f(E, \theta)$.
微分散射截面 (Differential cross section) :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{scattered flux/solid angle}}{\text{incident flux/area}} = |f(E, \theta)|^2$$

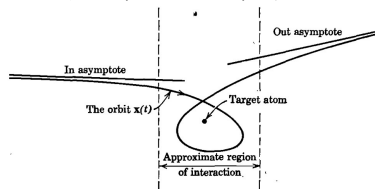
- 时间依赖的描述：free particles $\rightarrow$ collision $\rightarrow$ free particles.
- 可归一化的时间相关的波函数：不同定态 $\psi_{\mathbf{p}}^+$ 的叠加态。

Section 2

单粒子势散射的时间相关的描述

CLASSICAL SCATTERING

这一章，我们主要考虑一个粒子打到靶上的弹性散射。靶子看成质量很大，不动的，粒子质量很小。



典型的经典散射：设想经典的电子和原子散射，分成三段

- 电子入射
- 相互作用阶段
- 电子出射

每一个散射轨道由入射和出射的渐近线完全刻画：如果给定入射的渐近线 $\mathbf{x}_{in}$ ，我们能够求出出射的渐近线 $\mathbf{x}_{out}(t)$ ，那么这个散射问题就解决了。

入射渐近线： $(\mathbf{a}_{in}(t=0), \mathbf{v}_{in})$,
出射渐近线： $(\mathbf{a}_{out}(t=0), \mathbf{v}_{out})$, $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{入射渐近线} \\ \text{出射渐近线} \end{matrix}} \right\}$ 由真实的轨道 $\mathbf{x}(t)$ 联系起来

系统除了散射态外，可能还有束缚态，没有有入射和出射的渐近线。

系统所有的可能的解包括两种轨道：

- 散射轨道：

入射渐近线 $\rightarrow$ 散射轨道 $\rightarrow$ 出射渐近线

- 束缚态轨道：不对应入射渐近线和出射渐近线。

说明：

- 不是所有的势对应的散射轨道都有渐近线：如果相互作用势在趋于无穷时下降的不是足够快，则即使粒子相隔很远也不能像自由粒子一样运动。例如，库仑势。
- 如果在近距离吸引相互作用足够强，例如 $V = -1/r^3$ ，则入射粒子可能会被俘获，则有入射渐近线，没有出射的渐近线，或者反过来。
- 我们的散射理论主要考虑有入射和出射渐近线的过程，这种类型的势基本上几乎包括了所有我们关心的势。
- 我们极限中的 $t \rightarrow \infty$ 轨道与自由轨道无法区分，实际上微观粒子的散射过程时间非常短 $\sim 10^{-10}$ 秒，所以说对于微观散射过程，散射发生的 $t < -10^{-10}$ 和 $t > 10^{-10}$ 可以看成是 $-\infty$ 和 ∞ 。

我们考虑无自旋的单粒子处于一个特定的相互作用势中的散射问题。波函数 $\langle \mathbf{x} | \psi \rangle \in L^2(\mathbb{R}^3)$, 模方可积的波函数空间 $(\mathcal{H})$ 。

对于量子散射过程, 波函数随时间演化满足

$$i \frac{d}{dt} |\psi_t\rangle = H |\psi_t\rangle, \quad \Rightarrow |\psi_t\rangle = U(t) |\psi\rangle = e^{-iHt} |\psi\rangle$$

$|\psi\rangle$ 是初始时刻系统的波函数。 $U(t)|\psi\rangle$, 类似于经典情形, 我们也称之为轨道 (orbit)。

- 初始时刻波函数决定了轨道。
- 假设相互作用势是定域的, 只与粒子的坐标有关,
 $H = H_0 + V(\mathbf{x})$.
- 相互作用空间趋于 ∞ 时势趋于 0 的速度足够快, 粒子远离相互作用趋向于自由粒子运动。

渐近入射、出射态

- 在散射发生之前很长时间 $U(t)|\psi\rangle$ 表示的是一个离相互作用中心很远的一个波包，与某一个自由粒子的波包无法分辨，对应于自由粒子态， $|\psi_{0,t}\rangle = U_0|\psi_{in}\rangle = e^{-iH_0t}|\psi_{in}\rangle$ ，所以我们有

$$U(t)|\psi\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} U_0(t)|\psi_{in}\rangle$$

- 而在发生散射很长时间之后，也与某自由粒子的波包无法分辨

$$U(t)|\psi\rangle \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} U_0(t)|\psi_{out}\rangle$$

- 类似于经典情形的渐近线， $U_0(t)|\psi_{in}\rangle$ 和 $U_0(t)|\psi_{out}\rangle$ ，可以称为渐近入射、出射态，分别由 $|\psi_{in}\rangle$ 和 $|\psi_{out}\rangle$ 决定，我们也称 $|\psi_{in}\rangle$ 和 $|\psi_{out}\rangle$ 为相应的渐近入射、出射态。
- 与经典类似，不是所有的轨道都有渐近态。束缚态则没有渐近态。
- 我们期望有渐近态的散射态和没有渐近态的束缚态张成整个 Hilbert 空间。

INTERLUDE: 矢量的极限

在散射理论里面我们经常要考虑 $t \rightarrow \infty$ 时 Hilbert 空间中态矢的极限。

- 强极限：我们说 $|\psi_t\rangle$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时强收敛于极限矢量 $|\psi\rangle$ 当且仅当

$$\|\psi_t - \psi\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

其中范数 $\|\psi\| = \langle \psi | \psi \rangle^{1/2}$.

- 弱极限：我们说 $|\psi_t\rangle$ 在 $t \rightarrow \infty$ 时弱收敛于极限矢量 $|\psi\rangle$ 当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \chi | \psi_t \rangle = \langle \chi | \psi \rangle, \text{ for } \forall |\chi\rangle \in \mathcal{H}$$

- 强收敛 $\psi_t \rightarrow \psi$ ，则一定弱收敛， $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \phi | \psi_t \rangle = \langle \phi | \psi \rangle$ ，反之则不一定成立。弱极限存在的话不一定存在强极限。
例如：自由波包 $|\psi_0\rangle$ ，随时间演化 $e^{-iH_0 t} |\psi_0\rangle$ ，在空间会弥散开来 $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle x | \psi_t \rangle = 0$ ，但是，始终 $\|\psi_t\| = 1$ ，没有强极限。
- 物理上，前面渐近态的定义是强极限意义下的。

散射理论适用条件:

很不幸, 我们并没有一个散射理论适用的充分必要条件。我们只列出对于球对称势, 散射理论可以适用的条件

- ① 当 $r \rightarrow \infty$, $V(r) = O(r^{-3-\epsilon})$, $\epsilon > 0$, 比 r^{-3} 更快趋于 0。库仑势不满足。
- ② 当 $r \rightarrow 0$, $V(r) = O(r^{-3/2+\epsilon})$, $\epsilon > 0$, 不比 $r^{3/2}$ 更奇异。不满足此条件的称之为奇异势 (singular)。
- ③ 在 $0 < r < \infty$ 时 $V(r)$ 连续, 或有有限个有限的不连续性。

实际上, 散射理论可以适用于更广泛的相互作用势, 比如对于非球对称的势, 有好几个散射中心的时候, 或与自旋相关的, 或非局域的势等。

我们后面先假设满足上面的三个条件。例如, 方形势, Yukawa 势, 电子和原子散射等。

注意以上条件下, $\int d^3x |V(r)|^2 < \infty$ 。

渐近条件

$\mathcal{H}$ 中的每一个矢量都可以对应一个真实的轨道的渐近态:

$\forall |\psi_{in}\rangle \in \mathcal{H}, \exists |\psi\rangle, \text{ s.t. 当 } t \rightarrow -\infty,$

$$U(t)|\psi\rangle - U_0(t)|\psi_{in}\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0,$$

对于 $t \rightarrow +\infty, |\psi_{out}\rangle$ 同样。此条件称为渐近条件。

如果 $V(r)$ 满足上页的条件, 那么渐近条件成立。(证明跳过 goto pg. 17)

证明: 上面式子可以写为

$$|\psi\rangle - U(t)^\dagger U_0(t)|\psi_{in}\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} 0$$

我们只需证明 $\forall |\psi_{in}\rangle \in \mathcal{H}, U(t)^\dagger U_0(t)|\psi_{in}\rangle$ 存在极限。考虑

$$\frac{d}{dt} U^\dagger(t) U_0(t) = i e^{iHt} (H - H_0) e^{-iH_0 t} = i U^\dagger(t) V U_0(t)$$

那么

$$U(t)^\dagger U_0(t)|\psi_{in}\rangle = |\psi_{in}\rangle + i \int_0^t d\tau U^\dagger(\tau) V U_0(\tau)|\psi_{in}\rangle$$

期望 $t \rightarrow -\infty$

$$U(t)^\dagger U_0(t) |\psi_{in}\rangle = |\psi_{in}\rangle + i \int_0^t d\tau U^\dagger(\tau) V U_0(\tau) |\psi_{in}\rangle$$

存在，只需要积分在 $t \rightarrow -\infty$ 时收敛，一个充分条件是

$$\int_{-\infty}^0 d\tau \|U^\dagger(\tau) V U_0(\tau) |\psi_{in}\rangle\| = \int_{-\infty}^0 d\tau \|V U_0(\tau) |\psi_{in}\rangle\| < \infty \quad (1)$$

我们先考虑 $\langle \mathbf{x} | \psi_{in} \rangle = e^{-(\mathbf{x}-\mathbf{a})^2/(2\xi^2)}$ 是高斯型

$$|\langle \mathbf{x} | U_0(\tau) |\psi_{in}\rangle|^2 = \left(1 + \frac{\tau^2}{m^2 \xi^4}\right)^{-3/2} \exp \left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^2}{\xi^2 + \tau^2/m^2 \xi^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \|V U_0(\tau) |\psi_{in}\rangle\|^2 &= \int d^3x |V(\mathbf{x})|^2 \left(1 + \frac{\tau^2}{m^2 \xi^4}\right)^{-3/2} \exp \left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^2}{\xi^2 + \tau^2/m^2 \xi^2} \right] \\ &\leq \left[\int d^3x |V(\mathbf{x})|^2 \right] \left(1 + \frac{\tau^2}{m^2 \xi^4}\right)^{-3/2} \end{aligned}$$

所以，(1) 中积分，

$$\int_{-\infty}^0 d\tau \|V U_0(\tau) |\psi_{in}\rangle\| < \left[\int d^3x |V(\mathbf{x})|^2 \right]^{1/2} \int_{-\infty}^0 \left(1 + \frac{\tau^2}{m^2 \xi^4}\right)^{-3/4} < \infty$$

- 上面对高斯型波函数证明了渐近条件。
- 数学上可以证明，对于非高斯型的 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中的波函数，总可以通过有限的高斯型函数线性叠加来无穷逼近。
- 由范数的性质 $\|\psi + \chi\| \leq \|\psi\| + \|\chi\|$ 可以证明对一般的 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 中的波函数，渐近条件都满足。
- 上面证明中我们只需要用到 $\int d^3x |V(\mathbf{x})|^2 < \infty$ 。
- 对出射态，同样也可以证明渐近条件。

MØLLER OPERATORS

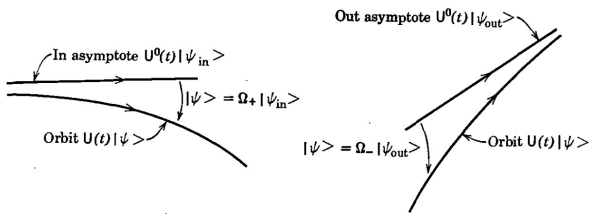
- 证明中，我们实际上看到，实际的态 $|\psi\rangle$ 在 $t=0$ 时线性依赖于渐近态 $|\psi_{in}\rangle$

$$|\psi\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} U^\dagger(t) U_0(t) |\psi_{in}\rangle \equiv \Omega_+ |\psi_{in}\rangle$$

同样，对于出射态，

$$|\psi\rangle = \lim_{t \rightarrow +\infty} U^\dagger(t) U_0(t) |\psi_{out}\rangle \equiv \Omega_- |\psi_{out}\rangle$$

- 我们定义了 $\Omega_\pm = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} U^\dagger(t) U_0(t)$, 称为 Møller wave operators, 是么正算符的极限，所以是 isometric operator.
- 意义：对于 $\mathcal{H}$ 中的任意态 $|\psi_{in}\rangle$, Ω_+ 作用后得到 $t=0$ 时刻的有相互作用系统的态，此态是由 $|\psi_{in}\rangle$ 所标记的渐近态演化而来。对出射态同理。



实际实验中,

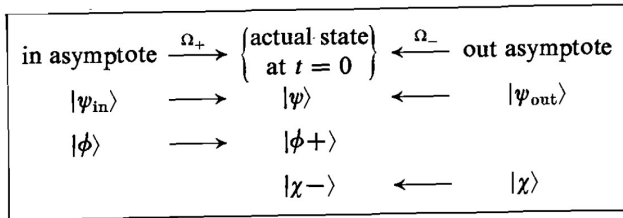
- 加速器中制备好入射的渐近态波包 $U_0(t)|\psi_{in}\rangle$, $|\psi_{in}\rangle = |\phi\rangle$
由加速器特性决定。我们引入

$$|\phi+\rangle \equiv \Omega_+|\phi\rangle, \quad \forall |\phi\rangle$$

- 测量仪器测量特定的出射渐近态 $|\psi_{out}\rangle = |\chi\rangle$

$$|\chi-\rangle \equiv \Omega_-|\chi\rangle, \quad \forall |\chi\rangle$$

- $|\phi+\rangle$ 代表 $t=0$ 时刻, 由 $t \rightarrow -\infty$ 的渐近态 $U_0(t)|\phi\rangle$ 演化来的态。
- $|\chi-\rangle$ 代表 $t=0$ 时刻, 将要在 $t \rightarrow +\infty$ 演化为渐近态 $U_0(t)|\chi\rangle$ 的态。



INTERLUDE: 幺正算符 (UNITARY) 和 ISOMETRIC OPERATOR

Hilbert 空间 $\mathcal{H}$ 中的幺正算符定义:

- 定义域和值域都是整个空间: $\mathcal{D}(U) = \mathcal{R}(U) = \mathcal{H}$.
- 保内积: $\forall u, v \in \mathcal{H}, \langle Uu | Uv \rangle = \langle u | v \rangle$.

Isometric operator:

- 定义域是整个空间: $\mathcal{D}(U) = \mathcal{H}$.
- 保 norm: $\forall u \in \mathcal{H}, \|Uu\| = \|u\|$.

- 注意 Isometric operator 没有说值域是整个空间, 一般来说 $\mathcal{R}(U) \neq \mathcal{H}$ 。
- 幺正算符都是 isometric operators. 但是反之不一定成立。
- 对于有限维空间, 幺正算符和 isometric operators 没有区别。
- 只有在无穷维空间中两者有区别。
- 例如: a set of basis, $|1\rangle, |2\rangle \dots, \Omega|1\rangle = |2\rangle, \Omega|2\rangle = |3\rangle \dots,$

$$|\Omega n\rangle = |n+1\rangle$$

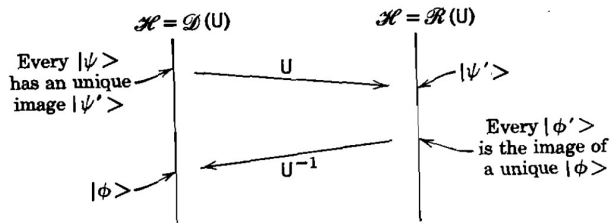
Ω has an inverse.

$$\Omega^{-1}|n\rangle = |n-1\rangle, \quad \text{for } n \geq 2,$$

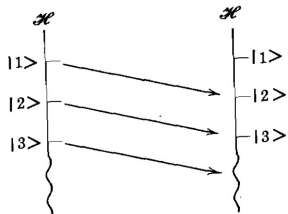
However, $\Omega^{-1}|1\rangle$ is not defined.

- $\Omega^{-1}\Omega = I$, however $\Omega\Omega^{-1} \neq I$. Ω^{-1} 的定义域只包含 $|2\rangle, |3\rangle \dots$ 张成的空间。

Unitary operator:



Isometric operator:



INTERLUDE: 算符的极限

- 算符的弱收敛:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \psi | A_t | \chi \rangle = \langle \psi | A | \chi \rangle, \quad \text{for } \forall |\psi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$$

- 算符的强收敛: $\forall |\chi\rangle \in \mathcal{H}, \exists |\phi_\chi\rangle \in \mathcal{H}, \text{ s.t.}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|A_t |\chi\rangle - |\phi_\chi\rangle\| = 0,$$

定义算符 A , for $\forall |\chi\rangle, A|\chi\rangle \equiv \phi_\chi, \lim_{t \rightarrow \infty} A_t \equiv A$.

- 后面我们要用到的是算符的强极限。
- 在无穷维空间中, $A_t \rightarrow A$ 并不意味着 $A_t^\dagger \rightarrow A^\dagger$.
- 在无穷维空间中, $A_t \rightarrow A, B_t \rightarrow B$, 并不意味着 $A_t B_t \rightarrow AB$.
- 么正算符的极限并不一定是么正算符。

$$\begin{aligned} U_t |\psi\rangle &\rightarrow \Omega |\psi\rangle, \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} \\ \Rightarrow \|\Omega \psi\| &= \lim_t \|U_t \psi\| = \|\psi\| \end{aligned}$$

所以仅仅得到 Ω 是 isometric 的, $\Omega^\dagger \Omega = 1$ 。但是 $\Omega \Omega^\dagger = 1$ 一般来说不一定成立。

散射态和束缚态

- 前面说过 $\mathcal{H}$ 中任何一个态都可以标记一个 (有相互作用的) 真实态 $U(t)|\psi\rangle$ (轨道) 对应的 (自由) 渐近态 $|\psi_{in}\rangle$ 。

$$\forall \psi_{in} \in \mathcal{H}, \exists |\psi\rangle, s.t. \quad U(t)|\psi\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} U_0(t)|\psi_{in}\rangle$$

- 那么, $\mathcal{H}$ 中任何一个态 $|\phi\rangle$ 对应的轨道 $U(t)|\phi\rangle$ 是否对应有关渐近态呢?

$$\forall |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \exists |\psi_{in}\rangle, s.t. \quad U(t)|\psi\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} U_0(t)|\psi_{in}\rangle?$$

类似于经典情形, 答案是否定的。对于足够强的吸引势还可以有束缚态。

- 对于束缚态 $|\phi\rangle$ 对应的轨道 $U(t)|\phi\rangle$ 是定态, 粒子束缚在势的局部, 不会变成自由态。所有束缚态张成的空间 $\mathcal{B}$ 。
- 我们期望散射态: 有渐近入射态的轨道都有渐近出射态。
 $\mathcal{R}_{\pm} : |\psi_{\pm}\rangle = \Omega_{\pm}|\psi\rangle, \quad |\psi\rangle \in \mathcal{H}, \text{ range of } \Omega_{\pm}$
- 我们期望所有散射态和束缚态张成整个 Hilbert 空间。

定理: 满足前面适用条件的势, 散射态空间和束缚态空间正交, $\mathcal{R}_{\pm} \perp \mathcal{B}$ 。

证明: 考虑 $\mathcal{R}_+$ 。若 $|\psi\rangle \in \mathcal{R}_+$, $|\phi\rangle \in \mathcal{B}$, 我们需要证明 $\langle\psi|\phi\rangle = 0$
由于

$$\begin{aligned}\langle\phi|\psi\rangle &= \langle\phi|U^\dagger(t)U(t)|\psi\rangle, \quad \text{for } \forall t \\ &= e^{iEt}\langle\phi|U(t)|\psi\rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iEt}\langle\phi|U(t)|\psi\rangle \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{iEt}\langle\phi|U_0(t)|\psi_{in}\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

由于 $U(t)|\phi\rangle$ 是定态, 始终局域在势里, 而散射态渐近的入射态 $U_0(t)|\psi_{in}\rangle$ 是自由的波包, 会渐渐弥散开来所以最后的内积趋于 0。

一个散射理论是渐近完备的如果

$$\mathcal{R}_+ = \mathcal{R}_- = \mathcal{R}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{all states with} \\ \text{in asymptotes} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{all states with} \\ \text{out asymptotes} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{all states orthogonal} \\ \text{to the bound states} \end{array} \right)$$

这时, $\mathcal{R} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{H}$ 。

对于某些相互作用理论是渐近完备的证明很复杂, 我们这里就不讨论了。我们后面用另一种方式证明。这里只是陈述满足前面适用性条件的相互作用下的散射理论都是渐近完备的。

我们对散射的描述,

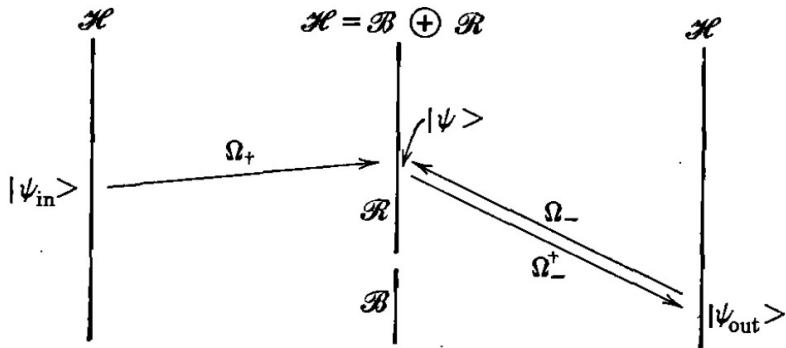
- 整个 Hilbert 空间分成互相正交的两部分: 散射态 $\mathcal{R}$ 和束缚态空间 $\mathcal{B}$ 。
- $\forall |\psi\rangle \in \mathcal{R}$, 轨道 $U(t)|\psi\rangle$ 描述一个具有入射渐近态和出射渐近态的散射过程,

$$U(t)|\psi\rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} U_0(t)|\psi_{in}\rangle \\ \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} U_0(t)|\psi_{out}\rangle$$

- 对于 $\forall |\psi_{in}\rangle (|\psi_{out}\rangle) \in \mathcal{H}$, 唯一标记一个轨道 $U(t)|\psi\rangle$ 的渐近入射 (出射) 态, 由 Møller operator 联系起来

$$|\psi\rangle = \Omega_+ |\psi_{in}\rangle = \Omega_- |\psi_{out}\rangle$$

- Møller operator 是 isometric 的, 但是如果有束缚态时不是幺正的。只有在没有束缚态时, 即 $\mathcal{R} = \mathcal{H}$ 时, 才是幺正的。
- Bound state $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ 也唯一标记一个散射态的入射态: $U_0(t)|\phi\rangle$ 也会弥散掉, 但 $U(t)|\phi\rangle$ 不会弥散掉。



Ω 是 isometric operator, $\Omega_\pm^\dagger \Omega_\pm = 1$, 但是 $\Omega_\pm \Omega_\pm^\dagger \neq 1$ 。

$\Omega_\pm \Omega_\pm^\dagger \mathcal{R} = \mathcal{R}$, $\Omega_\pm^\dagger \mathcal{B} = 0$ 。

Section 3

散射算符

散射算符

实验上的散射只关心渐近的入射渐近态对应的出射渐近态:

入射渐近态 $\rightarrow$ 相互作用决定 $\rightarrow$ 出射渐近态。

- 问题主要是将出射渐近态用入射渐近态表示出来，而不去关心中间态是什么。
- 由 $\Omega_-^\dagger \Omega_- = 1$

$$|\psi\rangle = \Omega_- |\psi_{out}\rangle \Rightarrow |\psi_{out}\rangle = \Omega_-^\dagger |\psi\rangle = \Omega_-^\dagger \Omega_+ |\psi_{in}\rangle$$

- 我们定义散射算符 (scattering operator)

$$S = \Omega_-^\dagger \Omega_+$$

则 $|\psi_{out}\rangle = S|\psi_{in}\rangle$ 。如果我们得到 S 算符那么就给出了散射问题的解。

- 实验上，加速器制备 $|\psi_{in}\rangle = |\phi\rangle \rightarrow t=0, |\phi+\rangle = \Omega_+ |\phi\rangle$, 探测器希望探测 $|\psi_{out}\rangle = |\chi\rangle \leftarrow t=0, |\chi-\rangle = \Omega_- |\chi\rangle$ 。
那么探测到信号的概率

$$w(\chi \leftarrow \phi) = |\langle \chi - | \phi + \rangle|^2 = |\langle \chi | \Omega_-^\dagger \Omega_+ | \phi \rangle|^2 = |\langle \chi | S | \phi \rangle|^2$$

概率振幅 $\langle \chi | S | \phi \rangle$ 就是 S -矩阵元。

- 实际上，我们后面会定义更加实用的可观测量，散射截面。

S 算符的幺正性

- $\Omega_{\pm}$ 渐近完备: $\Omega_+ \mathcal{H} = \mathcal{R} = \Omega_- \mathcal{H} \Rightarrow S\mathcal{H} = \mathcal{H}$,
 $\mathcal{D}(S) = \mathcal{R}(S) = \mathcal{H}$.
- $\Omega_{\pm}$ 都是 isometric $\Rightarrow S$ is isometric.

所以, S 是幺正的。实际上, 上面的渐近完备性是关键。
幺正性的意义: 概率守恒

- $\langle \psi_{in} | \psi_{in} \rangle = 1 \Rightarrow \langle \psi_{out} | \psi_{out} \rangle = \langle \psi_{in} | S^\dagger S | \psi_{in} \rangle = 1$

这是散射算符最重要的性质。

INTERTWINING RELATION

总的哈密顿量: $H = H_0 + V$

Møller 算符的一个性质:

$$H\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}H_0$$

证明:

$$\begin{aligned} e^{iH\tau}\Omega_{\pm} &= e^{iH\tau}\left[\lim_{t\rightarrow\mp\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t}\right] \\ &= \lim_{t\rightarrow\mp\infty} e^{iH(t+\tau)}e^{-iH_0t} \\ &= \lim_{t\rightarrow\mp\infty} e^{iH(t+\tau)}e^{-iH_0(t+\tau)}e^{iH_0\tau} \\ &= \left[\lim_{t\rightarrow\mp\infty} e^{iHt}e^{-iH_0t}\right]e^{iH_0\tau} \\ &= \Omega_{\pm}e^{iH_0\tau} \end{aligned}$$

对 τ 求导, $\tau \rightarrow 0$

$$e^{iH\tau}H\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}H_0e^{iH_0\tau} \quad \rightarrow \quad H\Omega_{\pm} = \Omega_{\pm}H_0$$

由前面的 intertwine 关系, 及 $\Omega_{\pm}^{\dagger}\Omega_{\pm} = 1$

$$\Omega_{\pm}^{\dagger}H\Omega_{\pm} = H_0$$

- $\Omega_{\pm}$ 将完全哈密顿量和自由哈密顿量联系起来。
- 在有束缚态时, $\Omega_{\pm}$ 并不是幺正变换, 所以 H 的谱和 H_0 的谱可以不一样。
- 注意: 不能得到 $\Omega_{\pm}H_0\Omega_{\pm}^{\dagger} = H$

A PROPERTY OF S-MATRIX: CONSERVATION OF ENERGY

- $H = H_0 + V$ 不显含时间, 总能量守恒。
- 但是, 我们关心的是入射和出射的渐近态, 渐近态的能量是 H_0 表示的, 可以想象在渐近态处没有相互作用势, 总能量就是自由粒子的能量, 所以也是守恒的。
- 实际需要证明这件事。

由 $S = \Omega_-^\dagger \Omega_+$, $\Omega_\pm H_0 = H \Omega_\pm$, $H_0 \Omega_\pm^\dagger = \Omega_\pm^\dagger H$,

$$\begin{aligned} [S, H_0] &= [\Omega_-^\dagger \Omega_+, H_0] = \Omega_-^\dagger \Omega_+ H_0 - H_0 \Omega_-^\dagger \Omega_+ \\ &= \Omega_-^\dagger H \Omega_+ - \Omega_-^\dagger H \Omega_+ = 0 \end{aligned}$$

能量平均值: 由 $[S, H_0] = 0$, $S^\dagger S = S S^\dagger = 1$

$$\langle \psi_{out} | H_0 | \psi_{out} \rangle = \langle \psi_{in} | S^\dagger H_0 S | \psi_{in} \rangle = \langle \psi_{in} | H_0 | \psi_{in} \rangle$$

换一种方式：由 $[S, H_0] = 0$, 有共同本征态,

- 自由粒子能量本征态, 可以选自由平面波作为基矢,

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \langle \mathbf{p}' | \mathbf{p} \rangle = \delta_3(\mathbf{p} - \mathbf{p}'),$$

$$H_0 | \mathbf{p} \rangle = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

- 平面波 $\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ 并不属于 $L^2(\mathbb{R}^3)$, 并不是现实中可实现的态, 但是 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 的态可以用平面波进行叠加。

$$|\varphi\rangle = \int d^3p \varphi(\mathbf{p}) |\mathbf{p}\rangle, \quad \langle \varphi | \varphi \rangle = \int d^3p |\varphi(\mathbf{p})|^2 < \infty$$

- S 矩阵元可以在从 $|\mathbf{p}\rangle$ 基矢的表象下表示, $\langle \mathbf{p}' | S | \mathbf{p} \rangle$, 由 $\psi_{in}(\mathbf{p})$ 散射到 $|\mathbf{p}'\rangle$ 上的概率振幅 $\psi_{out}(\mathbf{p}')$

$$\psi_{out}(\mathbf{p}') = \int d^3p \langle \mathbf{p}' | S | \mathbf{p} \rangle \psi_{in}(\mathbf{p})$$

由 $0 = [H_0, S]$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{p}' | [H_0, S] | \mathbf{p} \rangle = (E' - E) \langle \mathbf{p}' | S | \mathbf{p} \rangle, \\ &\Rightarrow \langle \mathbf{p}' | S | \mathbf{p} \rangle = \delta(E - E') \times (\text{remainder}) \end{aligned}$$

这也是能量守恒在动量空间中的表现。

T 矩阵元与散射振幅

进一步我们定义 R 算符, $S = 1 + R$, 矩阵元

$$\langle \mathbf{p}' | R | \mathbf{p} \rangle = -2\pi i \delta(E - E') t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$$

即

$$\langle \mathbf{p}' | S | \mathbf{p} \rangle = \delta_3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - 2\pi i \delta(E - E') t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$$

- 第一项代表没有相互作用时粒子穿过去的振幅。
- 第二项代表由于相互作用散射的振幅, 总能量守恒, 但是动量分量并不守恒。
- 对于一大类相互作用势, $t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$ 是动量的解析函数, 我们这里先假设至少是连续的。
- $t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$ 只有在 $E = E'$, 即 $\mathbf{p}^2 = \mathbf{p}'^2$ 时有定义, 我们称之为能量在壳的 (on the energy shell) 或在壳的 T 矩阵元 (on-shell T matrix element)。(非相对论)
- 显然在壳的 $t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$ 并不能定义一个算符, 后面我们会看到实际上我们可以定义一个 T 算符, 其在壳矩阵元 $\langle \mathbf{p}' | T | \mathbf{p} \rangle$ 给出 $t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$ 。

对于实验来说，只有在壳的 T 矩阵元才与可观测量相关。我们定义散射振幅

$$f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = -(2\pi)^2 m t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$$

后面会看到这个定义和量子力学课程中定义的散射振幅是一致的。S 矩阵用 f 写则为

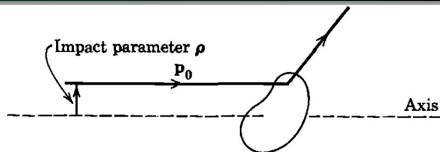
$$\langle \mathbf{p}' | S | \mathbf{p} \rangle = \delta_3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - \frac{i}{2\pi m} \delta(E - E') f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$$

Section 4

散射截面

经典散射截面

假设我们可以测量入射动量和出射动量, 无法测量碰撞参数 (impact factor) ρ 。我们要获得尽量多的靶的信息。



- 如果一次实验, 只能知道是否发生了散射: 如果动量没变, 没有发生散射; 如果动量改变了, 则发生散射了。
- 多次散射实验, 随机的碰撞参数: 已知垂直 $\mathbf{p}_0$ 方向上每单位面积的入射粒子数 n_{inc} , 那么总的发生散射的粒子数 N_{sc}

$$N_{sc} = n_{inc}\sigma$$

σ 可以看成是靶子在垂直于 $\mathbf{p}_0$ 方向上的横截面积, 称为散射截面 (scattering cross section)。

- 还可以数散射到不同方向立体角 $\Delta\Omega$ 内的粒子数 $N_{sc}(\Delta\Omega) = n_{inc}\sigma(\Delta\Omega)$, 对于无穷小的 $d\Omega$,

$$\sigma(d\Omega) = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 称为微分散射截面 (differential cross section)。

说明：

- 入射粒子必须足够多，入射的碰撞参数足够随机，均匀，这样入射的粒子数面密度才真实。
- 我们入射粒子束的截面只要比散射截面大就可以了。
- 向前散射的微分散射截面并没有好的定义，因为向前散射的粒子跟没有散射的粒子没法区分。但是实际上数学上我们可以通过连续的延拓其他方向的微分散射截面外推来定义向前的微分散射截面。

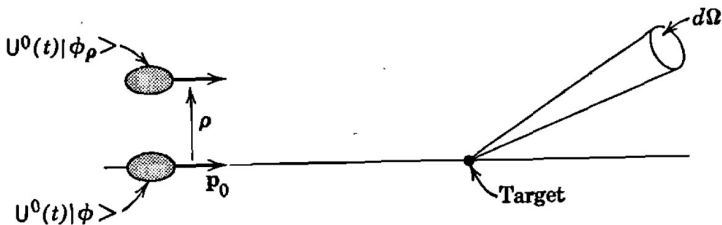
量子的散射截面

- 入射渐近态, 动量空间 $\psi_{in}(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \psi_{in} \rangle$ 。
- 出射渐近态, 动量空间 $\psi_{out}(\mathbf{p}) = \langle \mathbf{p} | \psi_{out} \rangle$ 。
- 给定相互作用势, ψ_{in} 决定 $\psi_{out} \rightarrow$ 在 $t \rightarrow \infty$ 在动量 $\hat{\mathbf{p}}$ 方向附近探测到粒子的概率:

$$w(d\Omega \leftarrow \psi_{in}) = d\Omega \int_0^\infty p^2 dp |\psi_{out}(\mathbf{p})|^2, \quad \mathbf{p} = p\hat{\mathbf{p}}$$

- 加速器制备的态我们只知道是一个波包, 动量分布集中在 $\mathbf{p}_0$ 附近, 与经典类似, 我们要对随机的碰撞参数 $\boldsymbol{\rho} \perp \mathbf{p}_0$ 的态取平均 $|\psi_{in}\rangle = |\phi_{\boldsymbol{\rho}}\rangle = e^{-i\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\rho}} |\phi\rangle$, 动量表象

$$\phi_{\boldsymbol{\rho}}(\mathbf{p}) = e^{-i\hat{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\rho}} \phi(\mathbf{p})$$





- 足够多次散射实验, 随机的 $\rho_i, i = 1, 2, \dots$, 散射到 $d\Omega$ 中的粒子数

$$N_{sc}(d\Omega) = \sum_i w(d\Omega \leftarrow \phi_{\rho_i}) \rightarrow N_{sc}(d\Omega) = \int d^2\rho n_{inc} w(d\Omega \leftarrow \phi_{\rho})$$

$$= n_{inc} \sigma(d\Omega \leftarrow \phi)$$

$$d\sigma = \sigma(d\Omega \leftarrow \phi) = \int d^2\rho w(d\Omega \leftarrow \phi_{\rho}) \quad (2)$$

$d\sigma = \sigma(d\Omega \leftarrow \phi) \propto d\Omega$, $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ 为微分散射截面。

- 换一种方式: 对每一块面元 $d^2\rho$ 以权重 $w(d\Omega \leftarrow \phi_{\rho})$ 求和 $\rightarrow \phi_{\rho}$ 当 ρ 均匀随机分布时, 散射到 $d\Omega$ 立体角内粒子对应的靶子的等效的散射截面。

说明：(跳过)

- 加速器产生的粒子的波函数可能不同，我们实际还要对不同的波函数对应的 $w(d\Omega \leftarrow \phi)$ 求平均。
- 对于足够集中于平均动量 $\mathbf{p}_0$ 的动量分布，截面 $\sigma(d\Omega \leftarrow \phi)$ 与 $\phi(\mathbf{p})$ 分布的细节关系不大，可以写成 $\sigma(d\Omega \leftarrow \mathbf{p}_0)$ 。
- 实际的实验中，加速器产生粒子束打到金属薄片的靶子上，入射粒子很多，而且靶粒子散射中心也很多，若入射粒子和靶粒子都是均匀分布的，则等效于对入射粒子随机的碰撞参数做平均。
- 要达到我们计算散射截面的理想情况必须入射粒子束和靶粒子都比较稀薄，这样保证入射粒子之间的相互作用可以忽略，而且每一个入射粒子主要是和一个靶粒子进行散射。

散射截面的计算

散射截面：入射波包动量集中在 $\mathbf{p}_0$ 附近，

$$\sigma(d\Omega \leftarrow \phi) = \int d^2\rho w(d\Omega \leftarrow \phi_\rho)$$
$$w(d\Omega \leftarrow \phi_\rho) = d\Omega \int_0^\infty p^2 dp |\psi_{out}(\mathbf{p})|^2$$

可以用散射振幅来表示。 $\psi_{out}(\mathbf{p})$ 是对于入射态为 $|\psi_{in}\rangle = |\phi_\rho\rangle$ 的态散射后的波函数。又由散射矩阵元定义，以及

$$\langle \mathbf{p} | S | \mathbf{p}' \rangle = \delta_3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - \frac{i}{2\pi m} \delta(E - E') f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}')$$

$$\begin{aligned}\psi_{out}(\mathbf{p}) &= \int d^3p' \langle \mathbf{p} | S | \mathbf{p}' \rangle \psi_{in}(\mathbf{p}') \\ &= \psi_{in}(\mathbf{p}) + \frac{i}{2\pi m} \int d^3p' \delta(E - E') f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}') \psi_{in}(\mathbf{p}')\end{aligned}$$

其中 $\psi_{in}(\mathbf{p}) = e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}\phi(\mathbf{p})$. 下面假设出射 $\mathbf{p}$ 不在 $\mathbf{p}_0$ 方向的小邻域内，则第一项 $\psi_{in}(\mathbf{p})$ 没有了。用 (2) 求微分散射截面。

$$\begin{aligned}
\sigma(d\Omega \leftarrow \phi) &= \frac{d\Omega}{(2\pi)^2 m^2} \int d^2\rho \int_0^\infty p^2 dp \\
&\times \int d^3p' \delta(E_p - E_{p'}) f^*(\mathbf{p} - \mathbf{p}') e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}'} \phi^*(\mathbf{p}') \\
&\times \int d^3p'' \delta(E_p - E_{p''}) f(\mathbf{p} - \mathbf{p}'') e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}''} \phi(\mathbf{p}'')
\end{aligned}$$

利用 $\int d^2\rho e^{-i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')} = (2\pi)^2 \delta_2(\mathbf{p}'_\perp - \mathbf{p}''_\perp)$,
 $\delta(E_{p''} - E_{p'}) = 2m\delta(\mathbf{p}'^2 - \mathbf{p}''^2)$

$$\delta_2(\mathbf{p}'_\perp - \mathbf{p}''_\perp) \delta(E_{p''} - E_{p'}) = \frac{m}{p'_\parallel} \delta_3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')$$

$$\begin{aligned}
\sigma(d\Omega \leftarrow \phi) &= \frac{d\Omega}{m} \int_0^\infty p^2 dp \int d^3p' \frac{1}{p'_\parallel} \delta(E_p - E_{p'}) |f(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \phi(\mathbf{p}')|^2 \\
&= d\Omega \int d^3p' \frac{p'}{p'_\parallel} |f(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \phi(\mathbf{p}')|^2, \quad |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|
\end{aligned}$$

$$\frac{\phi(\mathbf{p}) \text{sharply}}{\text{peaks at } \mathbf{p}_0} d\Omega |f(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)|^2 \int p^2 dp |\phi(\mathbf{p}')|^2 = d\Omega |f(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)|^2$$

当 $\phi(\mathbf{p})$ 主要集中在 $\mathbf{p}_0$ 附近时,

$$\begin{aligned}\sigma(d\Omega \leftarrow \phi) &= d\Omega |f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0)|^2 \equiv \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0) d\Omega \\ &\implies \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0) = |f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0)|^2\end{aligned}$$

这就是我们熟悉的量子力学里面给出的微分散射截面的公式。剩下的工作则是如何利用相互作用势计算出 S 矩阵元或 f 。

说明：

- 上面我们的波包 $\phi(\mathbf{p})$ 要求足够集中在 $\mathbf{p}_0$ 其目的就是将 $f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0)$ 从积分中拿出来; $f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0)$ 必须在 $\phi(\mathbf{p})$ 不为零区域 $\mathbf{p}_0$ 附近足够连续, 变化缓慢。

$f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0)$ 往往和 $V(\mathbf{r})$ 的傅氏变换有关。所以上面条件实际上要求在坐标空间中, 波包必须比势的变化要缓慢, 比势要更宽。

- 我们的散射方向不包括向前的方向, $\mathbf{p} \neq \mathbf{p}_0$ 。如果包含的话, 对 ρ 积分会发散。但是 f 是连续的, 数学上我们可以从其他方向上连续外推到 $\mathbf{p}_0$ 方向上来定义向前的散射振幅。
- 这里只和 $|f|^2$ 有关, 跟相位没有关系。

光学定理

可以由 S 的么正性 $S^\dagger S = 1$ ，将向前散射振幅的虚部和散射截面联系起来。由 $S = 1 + R$ 带入么正性关系，

$$(1 + R^\dagger)(1 + R) = 1 \Rightarrow R + R^\dagger = -R^\dagger R$$

矩阵元

$$\langle \mathbf{p}' | R | \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{p} | R | \mathbf{p}' \rangle^* = - \int d^3 p'' \langle \mathbf{p}'' | R | \mathbf{p}' \rangle^* \langle \mathbf{p}'' | R | \mathbf{p} \rangle$$

由

$$\langle \mathbf{p}' | R | \mathbf{p} \rangle = \frac{i}{2\pi m} \delta(E_{p'} - E_p) f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$$

代入得 ($E_p = E_{p'}$ 时)

$$f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) - f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}')^* = \frac{i}{2\pi m} \int d^3 p'' \delta(E_{p''} - E_p) f^*(\mathbf{p}'' \leftarrow \mathbf{p}') f(\mathbf{p}'' \leftarrow \mathbf{p})$$

设 $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$,

$$\text{Im} f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}) = \frac{p}{4\pi} \int d\Omega_{p''} |f(\mathbf{p}'' \leftarrow \mathbf{p})|^2 = \frac{p}{4\pi} \sigma(\mathbf{p})$$

$\sigma(\mathbf{p})$ 是总散射截面， $\sigma(\mathbf{p}) = \int d\Omega_{p'} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$ 。

光学定理告诉我们

- 散射振幅一般来说不是实的，向前散射振幅的虚部是正定的。
- 微分散射截面只能得到 $|f|$ ，但是由光学定理可以得到向前散射的 $\text{Im}f$ ，所以可以得到 $\text{Re}f$ 。
- 后面我们会讲到色散关系，将振幅的实部和虚部的积分产生关系，由光学定理，跟散射截面产生关系。
- 可以推广到非弹性散射。
- 因为只用到 S 的幺正性，可以推广到相对论情形。

Section 5

两无自旋粒子散射

- Summary (pg. 64)

两无自旋粒子的散射

- 前面我们讨论了单粒子在靶粒子产生的相互作用势下的散射。面讨论两无自旋的粒子的弹性散射。
- 我们先只考虑非全同粒子的散射。
- 前面单粒子的讨论可以很容易的推广到这个情形：在质心系，两粒子弹性散射和单粒子情形一样。

两粒子波函数

- Hilbert 空间, $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $(\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \phi(\mathbf{x}_1)\chi(\mathbf{x}_2))$, 对应的态 $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$
- 两非全同粒子系统波函数 $|\psi\rangle = \sum_{mn} c_{nm} |n\rangle_1 \otimes |m\rangle_2$, 特殊情形 $|\psi\rangle = |\phi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2$ 。
- 内积: $({}_1\langle\phi'| \otimes {}_2\langle\chi'|)(|\phi\rangle_1 \otimes |\chi\rangle_2) = \langle\phi'|\phi\rangle\langle\chi'|\chi\rangle$
- 这种张量积空间实际上只要多了一个自由度就可以用张量积空间表示, 例如, 空间和自旋的张量积空间 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{space} \otimes \mathcal{H}_{spin}$ 。
- 算符的张量积: $(A \otimes B)(|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle) = (A|\phi\rangle) \otimes (B|\chi\rangle)$
- $\mathcal{H}_1$ 中的算符 A 在 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 空间中应看成是 $A \otimes \mathbf{1}_2$, 同理对于 $\mathcal{H}_2$ 中的算符 B 在 $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 空间中应看成是 $\mathbf{1}_1 \otimes B$,

$$AB = A \otimes B = (A \otimes \mathbf{1}_2)(\mathbf{1}_1 \otimes B), \quad \text{且} \quad [A, B] = 0$$

例如, 总动量算符 $P = P_1 + P_2 = P_1 \otimes \mathbf{1}_2 + \mathbf{1}_1 \otimes P_2$.

- $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}$ 因子化为两个 Hilbert 空间。但是因子化的方式可以不同。每个波函数可以用两粒子坐标表象来写, 也可以用质心系的坐标来写, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{cm} \otimes \mathcal{H}_{rel}$,

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$$

考虑两粒子 Hamiltonian:

$$H = \frac{\mathbf{P}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{P}_2^2}{2m_2} + V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = H_0 + V$$

可以用总动量 $\bar{\mathbf{P}}$ 和相对动量 $\mathbf{P}$ 表示:

$$\bar{\mathbf{P}} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2, \quad \mathbf{P} = \frac{m_2 \mathbf{P}_1 - m_1 \mathbf{P}_2}{m_1 + m_2}.$$

质心坐标, 相对坐标:

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{m_1 \mathbf{X}_1 + m_2 \mathbf{X}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{x} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$$

定义总质量 $M = m_1 + m_2$, 约化质量 $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

$$H = \frac{\bar{\mathbf{P}}^2}{2M} + \left[\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) \right] \equiv H_{cm} + H_{rel}$$

$\bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{X}}, H_{cm}$ 只作用到 $\mathcal{H}_{cm}$ 上, $\mathbf{X}, \mathbf{P}, H_{rel}$ 只作用到 $\mathcal{H}_{rel}$ 上。
 $[H_{cm}, H_{rel}] = 0$ 。

时间演化算符也因子化成

$$\begin{aligned}U(t) &\equiv e^{-iHt} = e^{-i(H_{cm}+H_{rel})t} \\&= e^{-iH_{cm}t} e^{-iH_{rel}t} \\&= e^{-iH_{cm}t} \otimes e^{-iH_{rel}t}\end{aligned}$$

- 质心的运动和相对运动是独立的。
- 质心部分哈密顿量 $H_{cm} = \frac{\bar{\mathbf{p}}^2}{2M}$, 质量为 M 的自由运动粒子。
- 相对运动部分, 与单粒子在势中运动相同。
- 自由两粒子演化算符也可以分成两部分:

$$\begin{aligned}H_0 &= \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m_2} = H_1 + H_2 \\&= \frac{\bar{\mathbf{p}}^2}{2M} + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} = H_{cm} + H_{0,rel}\end{aligned}\tag{3}$$

$$U_0(t) = e^{-iH_0t} = e^{-iH_1t} e^{-iH_2t} = e^{-iH_{cm}t} e^{-iH_{0,rel}t}$$

两粒子散射算符

两粒子散射问题实际上跟单粒子势散射等价。我们期望会有散射态随时间演化 $U(t)|\psi\rangle$, 在 $t \rightarrow \mp\infty$ 时趋于自由态 $U_0(t)|\psi_{in/out}\rangle$

- 渐近态条件: 对于每一个 $|\psi_{in}\rangle \in \mathcal{H}$, $\exists U(t)|\psi\rangle$

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} \|U(t)|\psi\rangle - U_0(t)|\psi_{in/out}\rangle\| = 0$$

即 $|\psi\rangle = U^\dagger(t)U_0(t)|\psi_{in/out}\rangle$ 存在极限,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \mp\infty} U^\dagger(t)U_0(t) &= \lim_{t \rightarrow \mp\infty} (e^{iH_{cm}t} \otimes e^{iH_{rel}t})(e^{-iH_{cm}t} \otimes e^{-iH_{0,rel}t}) \\ &= \lim_{t \rightarrow \mp\infty} \mathbf{1}_{cm} \otimes (e^{iH_{rel}t} e^{-iH_{0,rel}t})\end{aligned}$$

$$H_{rel} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}), \quad H_{0,rel} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

- H_{rel} , $H_{0,rel}$ 与单粒子情形下的哈密顿量和自由哈密顿量相同。所以, 如果势满足之前单粒子散射时的条件的話, $(e^{iH_{rel}t} e^{-iH_{0,rel}t})$ 存在极限 $\Omega_\pm = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} e^{iH_{rel}t} e^{-iH_{0,rel}t}$
- 与 $|\psi_{in}\rangle$ 对应的轨道 (对于 $|\psi_{out}\rangle$ 类似)

$$|\psi\rangle = \lim_{t \rightarrow -\infty} U(t)U_0(t)|\psi_{in}\rangle = (\mathbf{1}_{cm} \otimes \Omega_+)|\psi_{in}\rangle \equiv \mathbf{\Omega}_+|\psi_{in}\rangle$$

渐近完备的性质可以由单粒子势散射直接搬过来。跟单粒子情形满足同样的适用条件的势时，

- 所有有入射态的轨道空间与有出射态的轨道空间相等构成散射态空间 $\mathcal{R}$

$$\Omega_+ \mathcal{H} = \Omega_- \mathcal{H} = \mathcal{R},$$

- 散射态空间和束缚态空间一起张成整个两粒子态的 Hilbert 空间。

$$\mathcal{H} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{B}$$

我们同样定义散射算符 $\mathbf{S} = \Omega_-^\dagger \Omega_+$ ，类似于单粒子情形， $\mathbf{S}$ 是幺正算符，将 $|\psi_{in}\rangle$ 映射到对应的出射渐近态 $\psi_{out} = \mathbf{S}|\psi_{in}\rangle$ 。由 $\Omega_\pm = 1_{cm} \otimes \Omega_\pm$ ，我们有

$$\mathbf{S} = 1_{cm} \otimes \mathbf{S}$$

$\mathbf{S} = \Omega_-^\dagger \Omega_+$ 就是 $\mathcal{H}_{rel}$ 作为单粒子哈密顿量计算的散射算符是一样的。

能量动量守恒

- 由 $\mathbf{S} = \mathbf{1}_{cm} \otimes S$, 可得 $[\mathbf{S}, \bar{\mathbf{P}}] = 0$, 所以质心总动量守恒。
- 与单粒子时相同, $[\mathbf{S}, H_0] = 0$, 能量守恒。
- $\mathbf{S}$ 矩阵元应该满足

$$\langle \mathbf{p}'_1 \mathbf{p}'_2 | \mathbf{S} | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle \sim \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) \delta_3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2)$$

对于非相对论系统 $E_i = \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i}$.

- $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2; \bar{\mathbf{P}}, \mathbf{P}$, 共同本征态: $|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2\rangle = |\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}\rangle$

$$e^{i(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{x}_2)} = e^{i(\bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \quad (4)$$

- 由 $\mathbf{S} = \mathbf{1}_{cm} \otimes S$.

$$\langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 | \mathbf{S} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle = \langle \bar{\mathbf{p}}', \mathbf{p}' | \mathbf{1}_{cm} \otimes S | \bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p} \rangle = \delta_3(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}') \langle \mathbf{p}' | S | \mathbf{p} \rangle$$

- 相对运动 S 矩阵可以定义相对运动的 t 矩阵元

$$\langle \mathbf{p}' | S | \mathbf{p} \rangle = \delta_3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) - 2\pi i \delta(E_p - E_{p'}) t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 | \mathbf{S} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle &= \delta_3(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}') \delta_3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\
&\quad - 2\pi i \delta_3(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}') \delta(E_p - E_{p'}) t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \\
&= \delta_3(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1) \delta_3(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) \\
&\quad - 2\pi i \delta_3(\sum_i \mathbf{p}_i - \sum_i \mathbf{p}'_i) \delta(\sum_i E_i - \sum_i E'_i) t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})
\end{aligned}$$

注意： $\sum_i E_i = E_{cm} + E_{rel}$.

在不同参考系中的散射截面

常用的参考系：

- 实验室系 (laboratory frame of reference): 初始靶粒子处于静止的参考系。
- 质心系 (center of mass frame): 质心处于静止的参考系。

任意参考系: 两个粒子都是运动的参考系, 到某立体角 $\Delta\Omega$ 的散射截面

$$N_{sc}(\Delta\Omega \leftarrow \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = n_{inc}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)\sigma(\Delta\Omega \leftarrow \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$$

- 总的散射到 $\Delta\Omega$ 的粒子数与参考系选取无关,

$$N_{sc}(\Delta\Omega \leftarrow \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = N_{sc}(\Delta\Omega' \leftarrow \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$$

- n_{inc} 取与相对动量垂直方向的截面上的密度, 与参考系选取无关。 $n_{inc}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = n_{inc}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$

所以,

$$\sigma(\Delta\Omega \leftarrow \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \sigma(\Delta\Omega' \leftarrow \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$$

对于微分散射截面：

$$\sigma(d\Omega \leftarrow \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(d\Omega \leftarrow \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$$

由于在不同参考系变换前后散射角不同，对应的立体角 $d\Omega$ 则会变换，导致微分散射截面会差一个变换

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)'(d\Omega' \leftarrow \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \frac{d\Omega}{d\Omega'}$$

非相对论情形：质心系到实验室系变换

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} \frac{(1 + 2\lambda \cos \theta_{cm} + \lambda^2)^{3/2}}{|1 + \lambda \cos \theta_{cm}|}$$

$$\lambda = m_1/m_2$$

质心系散射截面

质心系：波包主要集中在 $\bar{\mathbf{p}} = 0, \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0$ 。

$$w(d\Omega \leftarrow \psi_{in}) = d\Omega \int d^3\bar{p} \int_0^\infty p^2 dp |\psi_{out}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p})|^2$$

此处对 $\bar{p}$ 积分是因为实验并不关心总动量。其中 ψ_{out}

$$\psi_{out}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) = \psi_{in}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) + \frac{i}{2\pi m} \int d^3p' \delta(E_p - E_{p'}) f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}') \psi_{in}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}')$$

- $\psi_{in}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) \sim \phi_1(\mathbf{p}_1)\phi_2(\mathbf{p}_2)$, $\phi_1(\mathbf{p}_1)$ 和 $\phi_2(\mathbf{p}_2)$ 分别集中在 $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_0$, 相当于总分布 $\psi_{in}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p})$ 主要集中在 $\bar{\mathbf{p}} = 0, \mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ 。
- 考虑入射态 $\mathbf{p}_1$ 可以有随机的非零碰撞参数 $\boldsymbol{\rho} \perp \mathbf{p}_0$,
 $\psi_{in}(\bar{\mathbf{p}}, \mathbf{p}) = e^{-i\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{p}_1} \phi_1(\mathbf{p}_1)\phi_2(\mathbf{p}_2)$,

$$\begin{aligned} N_{sc}(d\Omega \leftarrow \phi) &= \sum_i w(d\Omega \leftarrow \phi_{\rho_i}) = n_{inc} \int d^2\rho w(d\Omega \leftarrow \phi_\rho) \\ &= n_{inc} \sigma(d\Omega \leftarrow \phi) \end{aligned}$$

- 与前面类似考虑到 ψ_{in} 主要集中在 $\bar{\mathbf{p}} = 0$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$, $d\Omega$ 不包含向前散射 p_0 , 可得

$$\sigma(d\Omega \leftarrow \phi) = d\Omega |f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}')|^2$$

- 由于这个表达式与 ϕ 无关, 我们可以写成

$$\sigma(d\Omega \leftarrow \mathbf{p}_0) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0) d\Omega, \quad \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0) = |f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}')|^2$$

Summary:

- 两粒子态空间 $\mathcal{H}$ 可以写成质心运动态空间和相对运动态空间的张量积——质心自由运动 $\otimes$ 单粒子散射 (pg.52): 选择不同表象, $\{\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2\}$, $\{\bar{\mathbf{P}}, \mathbf{P}\}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_{cm} \otimes \mathcal{H}_{rel}$
- Møller 算符和 $\mathbf{S}$: $\Omega_{\pm} = \mathbf{1}_{cm} \otimes \Omega_{\pm}$, $\mathbf{S} = \mathbf{1}_{cm} \otimes \mathbf{S}$. (pg.56)
- 渐近完备: $\Omega_{\pm} \mathcal{H} = \mathcal{R}$, $\mathcal{H} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{B}$. (pg.57)
- 散射初末态总能量动量守恒: $[\mathbf{S}, \bar{\mathbf{P}}] = [\mathbf{S}, H_0] = 0$, (pg.58)

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 | \mathbf{S} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rangle &= \delta_3(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}') \delta_3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \\ &\quad - 2\pi i \delta_3(\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{p}}') \delta(E_p - E_{p'}) t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \\ &= \delta_3(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1) \delta_3(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) \\ &\quad - 2\pi i \delta_3\left(\sum_i \mathbf{p}_i - \sum_i \mathbf{p}'_i\right) \delta\left(\sum_i E_i - \sum_i E'_i\right) t(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})\end{aligned}$$

- 质心系散射振幅 $f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}') = -4\pi^2 m t(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}')$, 质心系的散射截面 (pg.62)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}_0) = |f(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}')|^2$$

- 质心系到实验室系变换 (pg.61): (非相对论) $\lambda = m_1/m_2$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} \frac{(1 + 2\lambda \cos \theta_{cm} + \lambda^2)^{3/2}}{|1 + \lambda \cos \theta_{cm}|}$$

Section 6

两个带自旋粒子的散射

- Summary: page (76)

两个有自旋粒子的散射

与无自旋对比：

- Hilbert 空间会比较复杂：包括空间和自旋两部分。
- 哈密顿量可能会跟自旋有关，如自旋轨道耦合。
- 对不同自旋分量的初末态可能会有不同的散射振幅。

带自旋的两粒子 HILBERT SPACE

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 = (\mathcal{H}_{space} \otimes \mathcal{H}_{spin})_1 \otimes (\mathcal{H}_{space} \otimes \mathcal{H}_{spin})_2.$$

- 波函数 $\langle \mathbf{x}_1 m_1; \mathbf{x}_2 m_2 | \psi \rangle = \psi_{m_1 m_2}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2),$

$$m_i = -s_i, -s_i + 1, \dots, s_i.$$

- 分解为质心运动和相对运动,

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= (\mathcal{H}_{space,cm} \otimes \mathcal{H}_{space,rel}) \otimes (\mathcal{H}_{spin1} \otimes \mathcal{H}_{spin2}) \\ &= \mathcal{H}_{space,cm} \otimes \mathcal{H}_{rel};\end{aligned}$$

$$\mathcal{H}_{rel} = (\mathcal{H}_{space,rel} \otimes \mathcal{H}_{spin1} \otimes \mathcal{H}_{spin2})$$

$$\langle \bar{\mathbf{x}}; \mathbf{x}_{rel}; m_1, m_2 | \psi \rangle = \psi_{m_1 m_2}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$$

- 两粒子自旋空间的态, 可以用耦合表象 $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2,$
 $\{\mathbf{S}^2, S_3; \mathbf{S}_1^2, \mathbf{S}_2^2\}: |s, m; s_1, s_2\rangle \equiv |s, m\rangle,$

$$|s, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |m_1, m_2\rangle \langle s_1 s_2 m_1 m_2 | sm\rangle$$

$\langle s_1 s_2 m_1 m_2 | sm\rangle$ Clebsch-Gordon 系数。我们用 ξ 表示一个一般的表象下的基矢指标, 或者 (s, m) , 或者

$$(m_1, m_2), \chi = \sum_{\xi} \chi_{\xi} |\xi\rangle.$$

- 动量空间基矢: $|\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2, \xi\rangle = |\bar{\mathbf{p}} \mathbf{p}; \xi\rangle = |\bar{\mathbf{p}}\rangle \otimes |\mathbf{p}; \xi\rangle$

哈密顿算符

哈密顿量 $H = H_0 + V$, 决定粒子随时间演化 $U(t)|\psi\rangle = e^{-iHt}|\psi\rangle$

- $H_0 = \frac{\mathbf{P}_1^2}{2M_1} + \frac{\mathbf{P}_2^2}{2M_2} = \frac{\bar{\mathbf{P}}^2}{2M} + \frac{\mathbf{P}^2}{2m}$
- 相互作用项 V : 可以包含纯空间项, 也可以包含自旋和空间耦合项, 例如典型的核子核子耦合

$$V = V_1(r) + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 V_2(r) + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{x}_1 \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{x}_2 V_3(r), \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, r = |\mathbf{x}|.$$

或者自旋轨道耦合项

$$V = V_1(r) + \mathbf{S} \cdot \mathbf{L} V_2(r)$$

其中的空间部分 $V_i(r)$ 随 r 下降的足够快的趋于 0。

渐近条件, 渐近完备, MØLLER, S 算符

- 与前面类似, 在我们要求的势条件下, 可以证明渐近条件: 每一个态 $|\psi_{in}\rangle \in \mathcal{H}$, 存在一个轨道 $U(t)|\psi\rangle$ 在 $t \rightarrow -\infty$ 时趋于 $U_0(t)|\psi_{in}\rangle$.
- 仍然类似前面, 我们有 Møller 算符

$$\Omega_{\pm}(t) = \lim_{t \rightarrow \mp\infty} U(t)^{\dagger} U_0(t)$$

- $\Omega_{\pm}$ 将 $|\psi_{in/out}\rangle$ 映射成 $t=0$ 时的态。
- 我们假设后面我们遇到的势都使得我们的散射理论满足渐近条件和渐近完备性 $\Omega_+ \mathcal{H} = \Omega_- \mathcal{H} = \mathcal{R}$, $\mathcal{R} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{H}$ 。
- 我们定义 $\mathbf{S} = \Omega_-^{\dagger} \Omega_+$, 由渐近完备性, $\mathbf{S}$ 是幺正算符, $|\psi_{out}\rangle = \mathbf{S}|\psi_{in}\rangle$ 。
- 与前面两粒子讨论类似, $\mathbf{S} = \mathbf{1}_{cm} \otimes \mathbf{S}$ 。只是这里 $\mathbf{S}$ 作用到相对运动的空间上, 包含两个粒子的自旋。
- 我们将两带自旋粒子的问题变成了单个准粒子的问题, 将一个带 s_1 自旋的粒子与一个带自旋 s_2 的固定靶散射。

散射振幅

类似于前面， $\mathbf{S}$ 保证总能量守恒和总动量守恒

$\sim \delta_3(\vec{p}' - \vec{p})\delta(E_{p'} - E_p) = \delta(\sum_i E_i - \sum_i E'_i)\delta_3(\sum_i \mathbf{p}_i - \sum_i \mathbf{p}'_i)$,
定义 T 矩阵元和散射振幅

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \xi' | \mathbf{S} | \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \xi \rangle &= \delta_3(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1)\delta_3(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) \\ &\quad - 2\pi i \delta_3\left(\sum_i \mathbf{p}_i - \sum_i \mathbf{p}'_i\right)\delta\left(\sum_i E_i - \sum_i E'_i\right)t(\mathbf{p}'\xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi) \\ f(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi) &= -(2\pi)^2 m t(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi)\end{aligned}$$

这里 ξ 代表不同表象基矢的量子数 (m_1, m_2) 或 (s, m) ,
 $(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)$ 个。同前面，我们可以得到微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi) = |f(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi)|^2$$

一般的过程，初末态的自旋态 $|\chi\rangle, |\chi'\rangle$ 可以用 ξ 展开

$$|\chi\rangle = \sum_{\xi} \chi_{\xi} |\xi\rangle$$

微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \chi' \leftarrow \mathbf{p}, \chi) = \left| \sum_{\xi, \xi'} \chi_{\xi'}^* f(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi) \chi_{\xi} \right|^2$$

我们可以将振幅写成一个矩阵形式，

$$f_{\xi'\xi}(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \equiv f(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi),$$

$$F(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = \{f_{\xi'\xi}(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})\}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \chi' \leftarrow \mathbf{p}, \chi) = \left| \chi'^{\dagger} F(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \chi \right|^2$$

例子：自旋 1/2 和自旋 0 的粒子散射, $S_z|\pm\rangle = \pm 1/2|\pm\rangle$

$$F(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = \begin{pmatrix} f_{++}(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) & f_{+-}(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \\ f_{-+}(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) & f_{--}(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

- f_{+-}, f_{-+} 称为 spin-flip amplitude,
 f_{++}, f_{--} 称为 spin-nonflip amplitude,
- 对于初末态是一般的 $\chi = \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix}$, $\chi' = \begin{pmatrix} \chi'_+ \\ \chi'_- \end{pmatrix}$
- $(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$ 的振幅为 $\chi'^{\dagger} F(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \chi$
- 微分散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \chi' \leftarrow \mathbf{p}, \chi) = \left| \chi'^{\dagger} F(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \chi \right|^2$$

自旋求和及平均

在现实的实验中，入射粒子的自旋态并不是确定的，探测器也不能区分出射粒子的不同的自旋状态。

我们先假设，入射粒子自旋 s_1 ，靶粒子自旋 s_2 ，相对动量 $\mathbf{p}$ ，完全非极化，散射后我们考虑相对动量为 $\mathbf{p}'$ ，有确定自旋 $\xi' = (m'_1, m'_2)$ 的态。

- 入射粒子束和靶粒子都是完全非极化的：粒子的自旋方向完全随机，自旋在某个方向的投影均匀分布。
- 在入射粒子束中具有确定自旋态 ξ 的粒子数占总粒子数密度 n_{inc} 的 $1/(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)$ ，对最后结果的贡献

$$\frac{n_{inc}}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi) d\Omega$$

- 总的事例数 $n_{inc} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}) d\Omega$ 要对所有入射态求和：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}) d\Omega = \frac{1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{\xi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi) d\Omega$$

入射粒子和靶粒子非极化，出射到确定 ξ' 自旋态的等效的散射截面是对基本的散射过程的散射截面的入射粒子的自旋求平均。

考虑入射粒子具有确定的极化 $|\xi\rangle$ ，但是我们的探测器不能分辨出射粒子的极化。

- 进入我们探测器中具有确定某个极化 ξ' 的粒子数

$$n_{inc} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi) d\Omega$$

- 我们对所有 ξ' 的末态都进行计数，即对 ξ' 求和，等效散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}, \xi) = \sum_{\xi'} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi) d\Omega$$

对于末态自旋态不敏感的探测器，我们计算散射截面的时候要对基础散射过程 $(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi)$ 的散射截面的末态求和。

实际实验中，往往初态是非极化的，探测器对末态自旋也不敏感，此时等效散射截面

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = \frac{1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{\xi, \xi'} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi) d\Omega$$

入射和出射的旋量

考虑 blue 入射粒子态为归一化的旋量 χ^{in} , 我们定义出射旋量

$$\chi^{out} = F(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})\chi^{in}$$

表示的是入射动量为 $\mathbf{p}$, 自旋态旋量为 χ 的粒子对应的出射态为 $\mathbf{p}'$ 的粒子的自旋态的没有归一化的旋量。

- 这可以由散射截面公式看出

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \chi' \leftarrow \mathbf{p}, \chi) d\Omega = |\chi'^{\dagger} F(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})\chi^{in}|^2 = |\chi'^{\dagger} \chi^{out}|^2$$

- χ^{out} 是没有归一化的

$$\begin{aligned}\|\chi^{out}\|^2 &= \sum_{\xi'} \left| \sum_{\xi} f_{\xi'\xi}(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \chi_{\xi}^{in} \right|^2 \\ &= \sum_{\xi'} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \chi^{in}) \\ &= \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{p}, \xi^{in}), \quad [\text{out - spin not monitored}]\end{aligned}$$

SUMMARY:

- Hilbert space and wave function: (pg.66)

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{space,cm} \otimes \mathcal{H}_{rel};$$

$$\mathcal{H}_{rel} = (\mathcal{H}_{space,rel} \otimes \mathcal{H}_{spin1} \otimes \mathcal{H}_{spin2})$$

$$\langle \bar{\mathbf{x}}; \mathbf{x}_{rel}; m_1, m_2 | \psi \rangle = \psi_{m_1 m_2}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x})$$

- 渐近条件, 渐近完备, Møller 算符, S 算符: $\mathbf{S} = \mathbf{1}_{cm} \otimes \mathbf{S}$, 包含自旋空间, 化成带自旋的准单粒子散射。(pg.69)
- 散射振幅, 带自旋自由度 (pg.70): ξ 标记自旋部分基矢, 振幅矩阵形式 $F(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = \{f_{\xi'\xi}(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})\} \equiv \{f(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi)\}$
- 微分散射截面 (pg.71): 初末态极化 χ, χ' 在基矢 ξ 下的矢量形式,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \chi' \leftarrow \mathbf{p}, \chi) = \left| \chi'^{\dagger} F(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) \chi \right|^2$$

- 实验上不区分初态极化末态极化的话, 等效散射截面为对初态求平均, 末态求和, (pg.73-74)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = \frac{1}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_{\xi, \xi'} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{p}', \xi' \leftarrow \mathbf{p}, \xi) d\Omega$$