Scattering Theory – The Partial Wave Stationary States

Zhiguang Xiao

Reference: Taylor, Scattering theory

2022 年 12 月 19 日

1. 分波散射态、分波散射振幅
   - 分波的 S 矩阵
   - 自由的径向波函数
   - 分波散射态
2. 分波的 Lippmann-Schwinger 方程及分波振幅
3. 分波波函数及振幅的性质
4. 正则 (Regular) 解, Jost 函数及玻恩展开收敛性
5. 正则解、Jost 函数、s_l 的解析性质 (关于 p)
   - 单变量解析函数
   - 正则解的解析性质 (关于 p)
   - Jost 函数和分波 S 矩阵元的解析性
6. 束缚态与 Levinson 定理
   - 阈 ($p=0$) 附近的行为

Section 1

分波散射态、分波散射振幅

- Summary: go to page (15)

The partial-Wave S Matrix

前面我们考虑两无自旋粒子的散射，相互作用是球对称的，

- 那么 S 是对角的

$$\langle E' l' m' | \mathrm{S} | E l m \rangle = \delta(E' - E)\delta_{ll'}\delta_{mm'}\mathbf{s}_l(p), \quad \mathbf{s}_l(p) = e^{2i\delta_l(p)},$$

- $\delta_l(p)$ 相移：有一个 $n\pi$ 不确定性，$n \in \mathbb{Z}$ (modulo π ambiguity)
- 平面波 $|\mathbf{p}\rangle$ 可以用 $|Elm\rangle$ 展开

$$\langle \mathbf{p} | E, l, m \rangle = (\mathrm{m}p)^{-1/2}\delta(E_p - E)\, Y_l^m(\hat{\mathbf{p}})$$

由此可得

$$f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = \sum_l (2l+1) f_l(p) P_l(\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}),$$

$$f_l(p) = \frac{\mathbf{s}_l - 1}{2ip} = \frac{e^{i\delta_l(p)} \sin \delta_l(p)}{p}, \quad \mathbf{s}_l(p) = e^{2i\delta_l(p)}$$

$f_l(p)$ 为分波振幅。

微分散射截面 $\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2$, 及总截面 $\sigma = \sum_l \sigma_l(p)$

$$\sigma_l(p) = 4\pi(2l+1)|f_l(p)|^2 = 4\pi(2l+1)\frac{\sin^2\delta_l(p)}{p^2}$$

Unitary bound

$$\sigma_l(p) \leq \frac{4\pi(2l+1)}{p^2}$$

自由的径向波函数

自由的空间波函数 $\langle \mathbf{x}|Elm\rangle = \frac{y(r)}{r} Y_l^m(\hat{x})$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + p^2\right] y(r) = 0, \quad p = (2\mathrm{m}E)^{1/2}$$

有两个独立解，有物理意义的解在$r \to 0$ 时趋于 0。在 $r \to 0$ 的极限下，$l(l+1)/r^2$ 项主导，两个独立解的行为 r^{l+1}，r^{-l}，物理上可接受的解的行为应该是 r^{l+1}，解应为 Riccati-Bessel 函数

$$\hat{j}_l(z) \equiv z j_l(z) \equiv \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{1/2} J_{l+1/2}(z) = z^{l+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2/2)^n}{n!(2l+2n+1)!!}$$

j_l: 球贝塞尔函数。在0附近的行为$\hat{j}_l = \frac{z^{l+1}}{(2l+1)!!}\left[1 + O(z^2)\right]$，有内积，$\int_0^\infty dr \hat{j}_l(p'r)\hat{j}_l(pr) = \frac{\pi}{2}\delta(p'-p)$，由此得到归一化的波函数

$$\langle \mathbf{x}|E,l,m\rangle = i^l \left(\frac{2\mathrm{m}}{\pi p}\right)^{1/2} \frac{1}{r} \hat{j}_l(pr) Y_l^m(\hat{\mathbf{x}})$$

Notice: $l = 0$, $r \to 0$, $\langle \mathbf{x}|E,l,m\rangle \to$ finite. $l \geq 1$, $\langle \mathbf{x}|E,l,m\rangle \to 0$.

另一个解，$r\to 0$, r^{-l} 行为，Riccati-Neumann 函数 $\hat{n}_l(pr)$

$$
\begin{aligned}
\hat{n}_l(z) \equiv & z n_l(z) \equiv (-)^l \left(\frac{\pi z}{2}\right)^{1/2} J_{-l-1/2}(z) \\
= & z^{-l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z^2/2)^n (2l-2n-1)!!}{n!} \\
\sim & z^{-l}(2l-1)!![1+O(z^2)] , \quad [z\to 0]
\end{aligned}
$$

方程的一般解为此两个函数的线性叠加。

$r\to\infty$ 时，$l(l+1)/r^2\to 0$，只有 p^2 主导，方程解为 $e^{\pm ipr}$ 的线性叠加，趋于 $e^{\pm ipr}$ 的函数为 Riccati-Hankel 函数 $\hat{h}_l^{\pm}(pr)$

$$\hat{h}_l^{\pm}(z)=\hat{n}_l(z)\pm i\hat{\jmath}_l(z)=e^{\pm i(z-l\pi/2)}[1+O(z^{-1})]$$

所以，

$$\hat{\jmath}_l(z)=\frac{\hat{h}_l^{+}(z)-\hat{h}_l^{-}(z)}{2i}=\sin(z-\frac{1}{2}l\pi)+O(z^{-1})\,,\quad [z\to\infty, z\in\mathbb{R}]$$

$$\hat{n}_l(z)\to\cos(z-\frac{1}{2}l\pi)$$

Riccati Functions:

	$l=0$	$l=1$	$l=2$
$\hat{\jmath}_l(z)$	$\sin z$	$\frac{1}{z}\sin z-\cos z$	$\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\sin z-\frac{3}{z}\cos z$
$\hat{n}_l(z)$	$\cos z$	$\frac{1}{z}\cos z-\sin z$	$\left(\frac{3}{z^2}-1\right)\cos z-\frac{3}{z}\sin z$
$\hat{h}_l^{+}(z)$	e^{iz}	$(1+\frac{1}{z})e^{i(z-\pi/2)}$	$\left(1+\frac{3i}{z}-\frac{3}{z^2}\right)e^{i(z-\pi)}$
$\hat{h}_l^{-}(z)$	e^{-iz}	$(1-\frac{1}{z})e^{-i(z-\pi/2)}$	$\left(1-\frac{3i}{z}-\frac{3}{z^2}\right)e^{-i(z-\pi)}$

$$\hat{\jmath}_l(-z)=(-)^{l+1}\hat{\jmath}_l(z)\,,\quad \hat{n}_l(-z)=(-)^l\hat{n}_l(z)$$

$$\hat{h}_l^{\pm}(-z)=(-)^l\hat{h}_l^{\mp}(z),\quad [\hat{h}_l^{\pm}(z)]^*=\hat{h}_l^{\mp}(z^*)$$

平面波用球面波展开：

$$|\mathbf{p}\rangle = \int dE \sum_{l,m} |E, l, m\rangle \langle E, l, m|\mathbf{p}\rangle = (\mathrm{m}p)^{-1/2} \sum_{l,m} |E_p, l, m\rangle\, Y_l^m(\hat{\mathbf{p}})^*,$$

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}\rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{pr} \sum_{l,m} i^l \hat{j}_l(pr)\, Y_l^m(\hat{\mathbf{x}})\, Y_l^m(\hat{\mathbf{p}})^*$$

$$= (2\pi)^{-3/2} \frac{1}{pr} \sum_l (2l+1)\, i^l \hat{j}_l(pr) P_l(\hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{p}})$$

分波散射态

我们有了 $|E,l,m\rangle$ 自由的球面波，可以定义有相互作用的散射态的球面波 $|E,l,m+\rangle$

$$|E,l,m+\rangle = \Omega_+|E,l,m\rangle, \quad \langle E',l,m+|E,l,m+\rangle = \delta(E-E')\delta_{l'l}\delta_{m'm}$$

- $|E,l,m+\rangle$ 是 H 的本征态：由 $H\Omega_+ = \Omega_+ H_0$ 可得，$H|E,l,m+\rangle = \Omega_+ H_0|E,l,m\rangle = E|E,l,m+\rangle$。
- 可以认为 $|E,l,m+\rangle$ 是 $|E,l,m\rangle$ 对应的 $t=0$ 时的散射态。
- $\mathbf{L}$ 与 Ω_+ 对易，$|E,l,m+\rangle$ 是 $\mathbf{L}^2$, L_3 的本征态，$\mathbf{L}^2|E,l,m+\rangle = l(l+1)|E,l,m+\rangle$, $L_3|E,l,m\rangle = m|E,l,m\rangle$:

$$\langle \mathbf{x}|E,l,m+\rangle = i^l\left(\frac{2\mathrm{m}}{\pi p}\right)^{1/2}\frac{1}{r}\psi^+_{l,p}(r)\,Y^m_l(\hat{\mathbf{x}})$$

当 $V=0$ 时，$\psi^+_{l,p}(r) \to \hat{j}_l(pr)$

- Normalization，由 $\langle E',l,m+|E,l,m+\rangle = \delta(E-E')\delta_{l'l}\delta_{m'm}$,

$$\int_0^\infty dr\psi^{+*}_{l,p'}(r)\psi^+_{l,p}(r) = \frac{\pi}{2}\delta(p'-p)$$

$\psi^+_{l,p}(r)$ 称作归一化的径向波函数。(对 out-态也是类似的)

$|\mathbf{p}+\rangle$ 可以用 $|E,l,m+\rangle$ 展开：

$$|\mathbf{p}\rangle = (\mathrm{m}p)^{-1/2}\sum_{l,m}|E_p,l,m\rangle\, Y_l^m(\hat{\mathbf{p}})^*$$

$$\Rightarrow |\mathbf{p}+\rangle = (\mathrm{m}p)^{-1/2}\sum_{l,m}|E_p,l,m+\rangle\, Y_l^m(\hat{\mathbf{p}})^*$$

坐标空间，利用 $P_l(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{p}}) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_m Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{x}})\, Y_l^m(\hat{\mathbf{p}})$

$$\langle\mathbf{x}|\mathbf{p}+\rangle = (2\pi)^{-3/2}\frac{1}{pr}\sum_l (2l+1)i^l\psi_{l,p}^+(r)P_l(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{p}})$$

ψ_{lp}^+ 满足薛定谔方程：边界条件 $\psi_{l,p}(0)=0$ (后面省略上指标 $+$)

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}-U(r)+p^2\right]\psi_{l,p}(r)=0, \qquad U(r)\equiv 2\mathrm{m}\,V(r)$$

同时满足归一化条件：

$$\int_0^\infty dr\psi_{l,p'}^{+*}(r)\psi_{l,p}^+(r) = \frac{\pi}{2}\delta(p'-p)$$

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}+\rangle = (2\pi)^{-3/2}\frac{1}{pr}\sum_l (2l+1)i^l\psi_{l,p}(r)P_l(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{p}})$$

$r\to\infty$ 时，我们可以得到散射振幅 $f(p\hat{\mathbf{x}}\leftarrow\mathbf{p})$ 的分波展开

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}+\rangle &\xrightarrow{r\to\infty}(2\pi)^{-3/2}\left[e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}+f(p\hat{\mathbf{x}}\leftarrow\mathbf{p})\frac{1}{r}e^{ipr}\right]\\ &=(2\pi)^{-3/2}\frac{1}{pr}\sum_{l,m}(2l+1)[i^l\hat{\jmath}_l(pr)+pf_l(p)e^{ipr}]P_l(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{p}})\end{aligned}$$

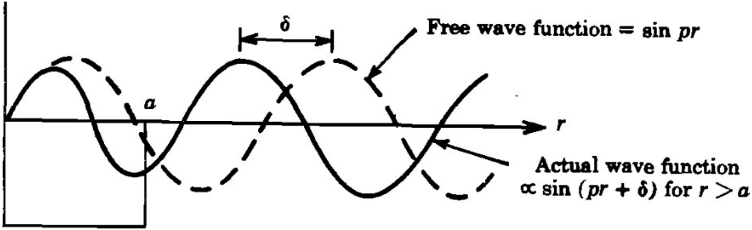
$$\begin{aligned}\Rightarrow \psi_{l,p}(r) &\xrightarrow{r\to\infty}\hat{\jmath}_l(pr)+pf_l(p)e^{i(pr-l\pi/2)}\\ &\xrightarrow{r\to\infty}\hat{\jmath}_l(pr)+pf_l(p)\hat{h}_l^+(pr)\\ &\xrightarrow{r\to\infty}e^{i\delta_l(p)}\sin[pr-\frac{l\pi}{2}+\delta_l(p)]\end{aligned}$$

$\hat{\jmath}_l(pr)$ 对应渐近的自由的入射态的 l 分波波函数，$pf_l\hat{h}_l^+$ 对应的散射后的渐近的自由的出射波 l 分波。
(利用 $\hat{\jmath}(pr)\to\sin(pr-\frac{1}{2}l\pi)$, $pf_l=e^{i\delta_l}\sin\delta_l$, $\hat{h}_l^+(pr)\to e^{i(pr-l\pi/2)}$)

$$\psi_{l,p}(r) \xrightarrow{r\to\infty} e^{i\delta_l(p)} \sin[pr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(p)]$$

对比自由的分波波函数 $\hat{j}_l(pr) \to \sin(pr - \frac{1}{2}l\pi)$, 振幅的模相差一个位相 $\delta_l(p)$, 所以称 $\delta_l(p)$ 为相移。我们可以从径向薛定谔方程及边界条件的解得到散射振幅和相移.

例：对于方势阱, 吸引势, 阱内 $V < 0$, 动能比外面大，所以阱内的位相变化的比阱外的快，位相比自由平面波超前，“pull the wave function inward”, 给出一个正的相移。反之，排斥势，“push the wave function outward”, 给出一个负的相移。



我们可以脱离三维讨论，只考虑单个分波的径向方程，

- 由 $\hat{j} = (\hat{h}^+ - \hat{h}^-)/2i$, $pf_l = \frac{1}{2i}(\mathbf{s}_l - 1)$, 无穷远渐近条件

$$\psi_{l,p} \to \frac{i}{2}[\hat{h}_l^- - \mathbf{s}_l(p)\hat{h}_l^+(pr)]$$

- 第一项可以看成是内行波，第二项可以看成是散射之后的外行波。
- 由于没有粒子产生湮灭，所以 $|\mathbf{s}| = 1$, $\mathbf{s} = e^{2i\delta_l}$ 只是纯相位。

Summary

- 无自旋分波散射态径向波函数: (pg. 10)

$$\langle \mathbf{x}|E,l,m+\rangle = i^l\left(\frac{2\mathrm{m}}{\pi p}\right)^{1/2}\frac{1}{r}\psi^{+}_{l,p}(r)\,Y_l^m(\hat{\mathbf{x}}),$$

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}+\rangle = (2\pi)^{-3/2}\frac{1}{pr}\sum_l (2l+1)i^l\psi_{l,p}(r)P_l(\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{p}})$$

$$\int_0^\infty dr\psi^{+*}_{l,p'}(r)\psi^{+}_{l,p}(r) = \frac{\pi}{2}\delta(p'-p)$$

- 与分波散射态波函数及相移关系 (pg. 12)

$$\psi^{+}_{l,p}(r) \xrightarrow{r\to\infty} \hat{j}_l(pr) + pf_l(p)\hat{h}^{+}_l(pr)$$

$$\xrightarrow{r\to\infty} e^{i\delta_l(p)}\sin[pr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(p)]$$

- 与分波 s_l 关系 (pg. 13)

$$\psi^{+}_{l,p} \xrightarrow{r\to\infty} \frac{i}{2}[\hat{h}^{-}_l - \mathrm{s}_l(p)\hat{h}^{+}_l(pr)]$$

Section 2

分波的 Lippmann-Schwinger 方程及分波振幅

- Summary: go to page (22)

分波的 Lippmann-Schwinger 方程

我们可以将径向薛定谔方程 + 边界条件化为 $\psi_{l,p}(r)$ 的积分方程。
由 $|\mathbf{p}\pm\rangle = (\mathrm{m}p)^{-1/2}\sum_{l,m}|E_p, l, m\pm\rangle\, Y_l^m(\hat{\mathbf{p}})^*$

$$|\mathbf{p}\pm\rangle = |\mathbf{p}\rangle + G_0(E_p \pm i\epsilon)\, V|\mathbf{p}\pm\rangle$$
$$\Rightarrow |E_p, l, m\pm\rangle = |E_p, l, m\rangle + G_0(E_p \pm i\epsilon)\, V|E_p, l, m\pm\rangle$$

$$\langle\mathbf{x}|E, l, m\pm\rangle = \langle\mathbf{x}|E, l, m\rangle + \int d^3x'\, G_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}')\, V(\mathbf{x}')\langle\mathbf{x}'|E, l, m\pm\rangle$$

定义 $U(r) = 2\mathrm{m}\, V(r)$, $r_> = \max\{r, r'\}$, $r_> = \min\{r, r'\}$ 利用

$$\langle\mathbf{x}|E, l, m\pm\rangle = i^l\left(\frac{2\mathrm{m}}{\pi p}\right)^{1/2}\frac{1}{r}\psi_{lp}^{\pm}(r)\, Y_l^m(\hat{\mathbf{x}})$$

$$\begin{aligned}\psi_{lp}^{+}(r) &= \hat{\jmath}_l(pr) + \left(\frac{1}{p}\right)\int dr'\, \hat{h}_l^{+}(pr_>)\hat{\jmath}_l(pr_<)\, U(r')\psi_{lp}^{+}(r'),\\ &= \hat{\jmath}_l(pr) + \int dr'\, G_{l,p}^{0}(r, r')\, U(r')\psi_{lp}^{+}(r'), \qquad G_{l,p}^{0}(r, r') = -\frac{\hat{h}_l^{+}(pr_>)\hat{\jmath}_l(pr_<)}{p}\end{aligned} \tag{1}$$

分波的 Lippmann-Schwinger 方程可以简写成算符形式：

$$\psi_{l,p} = \hat{\jmath}_l + G^0_{l,p} U \psi_{l,p}$$

可以有迭代的级数解

$$\psi_{l,p} = \hat{\jmath}_l + G^0_{l,p} U \hat{\jmath}_l + (G^0_{l,p} U)^2 \hat{\jmath}_l + \dots$$

利用

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}+\rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{pr}\sum_{l,m} i^l \psi_{l,p}(r)\, Y_l^m(\hat{\mathbf{x}})\, Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{p}})$$

可以得到分波的振幅

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) &= \sum_l (2l+1) f_l(p)\, P_l(\hat{\mathbf{p}}' \cdot \hat{\mathbf{p}}) = -(2\pi)^2 \mathrm{m} \langle \mathbf{p}'|\, V|\mathbf{p}+\rangle, \\
&= -\, (2\pi)^2 \mathrm{m} \int d^3x \langle \mathbf{p}'|\mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{x}|\mathbf{p}+\rangle\, V(r) \\
&= -\, (8\pi)\frac{\mathrm{m}}{p^2}\int dr \sum_{l,m} Y_l^m(\hat{\mathbf{p}}')\, Y_l^{m*}(\hat{\mathbf{p}})\hat{\jmath}_l(p' r)\psi_{lp}^+(r)\, V(r) \\
&= -\, \frac{1}{p^2}\sum_l \int dr (2l+1)\, P_l(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}')\hat{\jmath}_l(p' r)\psi_{lp}^+(r)\, U(r)
\end{aligned}$$

得

$$f_l(p) = -\frac{1}{p^2}\int_0^\infty dr \hat{\jmath}_l(pr)\psi_{lp}^+(r)\, U(r)$$

利用前面 ψ_{lp} 的迭代解, 可得:

$$f_l(p) = -\frac{1}{p^2}\Big(\int_0^\infty dr\hat{\jmath}_l U\hat{\jmath}_l + \int_0^\infty dr\hat{\jmath}_l U G^0_{l,p} U\hat{\jmath}_l + \dots\Big)$$

上式也可以由玻恩级数

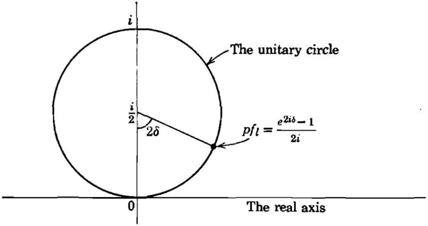
$$f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = -(2\pi)^2\mathrm{m}(\langle\mathbf{p}'|V|\mathbf{p}\rangle + \langle\mathbf{p}'|VG(E+i\epsilon)V|\mathbf{p}\rangle + \dots)$$

分波展开得到。
玻恩近似:

$$f_l(p) = -\frac{1}{p^2}\int_0^\infty dr\hat{\jmath}_l U\hat{\jmath}_l$$

说明：

- 玻恩近似是实的。
- 由于幺正性，严格的振幅 $f_l(p)=\frac{1}{p}e^{i\delta_l}\sin\delta_l$ 是复的。
- 只有在 δ （mod π) 很小的时候, 玻恩近似才成立。



Summary

- $\psi_{l,p}$ 的分波的 Lippmann-Schwinger 方程：(1)

$$\psi_{l,p} = \hat{\jmath}_l + G^0_{l,p} U \psi_{l,p}, \quad G^0_{l,p}(r, r') = -\frac{\hat{h}^+_l(pr_>)\hat{\jmath}_l(pr_<)}{p}$$

迭代的级数解

$$\psi_{l,p} = \hat{\jmath}_l + G^0_{l,p} U \hat{\jmath}_l + (G^0_{l,p} U)^2 \hat{\jmath}_l + \dots$$

- 分波振幅 f_l 的级数展开：(pg. 19)

$$\begin{aligned} f_l(p) &= -\frac{1}{p^2}\int_0^\infty dr \hat{\jmath}_l(pr)\psi^+_{lp}(r)\, U(r) \\ &= -\frac{1}{p^2}\Big(\int_0^\infty dr \hat{\jmath}_l U \hat{\jmath}_l + \int_0^\infty dr \hat{\jmath}_l U G^0_{l,p} U \hat{\jmath}_l + \dots\Big) \end{aligned}$$

- 第一项为 Born 近似

Section 3

分波波函数及振幅的性质

Summary (go to 31)

分波振幅的性质

分波径向波函数满足方程

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}+p^2-\lambda U(r)\right]\psi_{l,p}(r)=0$$

我们引入了一个 λ 参数，代表相互作用强度。假设 $V(r)$ 除了特殊说明以外满足 (实际上大多数只要满足括号中条件即可)

- $r\to\infty$, $V(r)=O(r^{-3-\epsilon})$, $\epsilon>0$。 ($V(r)=O(r^{-2-\epsilon})$)
- $r\to 0$, $V(r)=O(r^{-3/2+\epsilon})$. ($V(r)=O(r^{-2+\epsilon})$)
- $V(r)$ 除了在有限点处有有限的跳跃外在 $0<r<\infty$ 上连续。

若 $\lambda U(r) \ll |l(l+1)/r^2 - p^2|$ 项的话，方程近似自由的径向方程。
$\psi_{l,p}(r) \to \hat{j}_((pr)$, $pf_l(p) \sim e^{i\delta_l}\sin\delta_l \to 0$。

- $\lambda \to 0$ 时, $f_l(p) \to 0$, $\delta_l \to n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$。
- 给定 l, $E \to \infty$ 时, $pf_l(p) \to 0$, $\delta_l \to n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$。
- 若 $p \to \infty$, 规定 $\delta_l \to 0$，则没有 $n\pi$ 的不确定性，$\lambda \to 0$ 时，$\delta_l \to 0$。
- 给定势和能量，$l \to \infty$,$f_l(p) \to 0$, $\delta \to n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$。
  $l(l+1)/2mr^2$ 离心势越来越强, 粒子穿入势的深度越来越小，感受到相互作用越小，相移越小。
  我们可以估算有明显相移的 l:
  势的范围 a, 离心势高度 $l^2/2ma^2$, 能量
  $E = p^2/2m \ll l^2/2ma^2$，则粒子不容易进入的势的范围，
  $l \gg pa$。

上述条件下, 分波振幅的 Born 近似有效。即使是对于完全振幅 $f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p})$ Born 近似不成立时，也存在 l_0，当 $l > l_0$ 分波振幅 Born 近似比较好。对于低分波可以用其他方法估算。

分波波函数的低能性质

考虑 $\psi_{lp}(r)$ 满足的 Lippmann-Schwinger 方程

$$
\begin{aligned}
\psi_{l,p}(r) =& \hat{\jmath}_l(pr) + \int dr' \, G^0_{l,p}(r,r')\, U(r') \psi^+_{lp}(r'), \\
G^0_{l,p}(r,r') =& -\frac{\hat{h}^+_l(pr_>)\hat{\jmath}_l(pr_<)}{p} \xrightarrow{p\to 0} -\frac{(r_<)^{l+1}(r_>)^{-l}}{2l+1}
\end{aligned}
$$

p 很小时，$G^0_{l,p}$ 与 p 无关。由 Lippmann-Schwinger 方程，$\psi_{l,p}$ 与 $\hat{\jmath}_l(pr)$ 在 $p\to 0$ 时对 p 依赖关系相同，p^{l+1}.

分波散射振幅的低能性质

$$f_l(p) = -\frac{1}{p^2}\int_0^\infty dr \hat{j}_l(pr)\,U(r)\psi_{l,p}(r)$$

若在 $r > a$, $U(r) = 0$ 那么 $p \to 0$ 时，$\hat{j}_l$ 和 $\psi_{l,p}(r)$ 都可用 $p \to 0$ 时的行为来替代，我们得到

$$f_l(p) \xrightarrow{p\to 0} -a_l p^{2l}, \quad e^{i\delta_l(p)} \sin\delta_l(p) \to -p^{2l+1} a_l \tag{2}$$

a_l 称作散射长度 (scattering length)，只有在 $l = 0$ 时候才具有长度量刚。

- 如果势延伸到无穷远，我们后面会看到，如果 $V(r)$ 比 $1/r^n$ $\forall n$ 下降的都更快，上面结论仍然成立。
- 如果 $V(r) \sim 1/r^\nu$, 则上面只有在 $l \geq (\nu - 3)/2$ 时成立。
- 后面我们会看到在某些条件下，$a_l \to \infty$。

注：有些文献定义散射长度与上面定义差一个符号，即 $f_l(p) \xrightarrow{p\to 0} a_l p^{2l}$。一般来说，只是将 $l = 0$ 分波的 a_0 称为散射长度。

假设 (2) 成立，$p \to 0$ 时

- $l = 0$, s 波，$f_0 \to -a_0 \neq 0$。
- $l \neq 0$, $f_l \to 0$
- $f(\mathbf{p}' \leftarrow \mathbf{p}) = \sum (2l+1) f_l(p) P_l(\cos\theta) \to -a_0$
- $\lim_{p\to 0} d\sigma/d\Omega \to a_0^2$。
- $f_l = \frac{1}{p} e^{i\delta_l} \sin\delta_l \sim -a_l p^{2l}$, $\delta_l \to n\pi - a_l p^{2l+1}$。$a_l \in \mathbb{R}$。
- 如果约定 $p \to \infty$, $\delta_l \to 0$，那么 δ_l 没有 $n\pi$ 的不确定性，在 $p \to 0$ 时，δ_l 则不一定趋于 0。
- 我们后面会讲到在满足我们上面 $V(r)$ 条件时，有 Levinson 定理，$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = n_l \pi$, n_l 是角动量为 l 的束缚态的个数，$\delta_l(0) = n_l \pi$。
- 有一个例外是当 s-波散射长度 $a_0 = \infty$ 时，
  $\delta_l(0) = (n_0 + \frac{1}{2})\pi$。

作业: 计算球方势阱 $(2ma^2V_0)^{1/2} = 4.8$ 时, $l=0$ 有两个束缚态, $l=1,2$ 各一个束缚时的波函数以及散射振幅, 验证如下性质

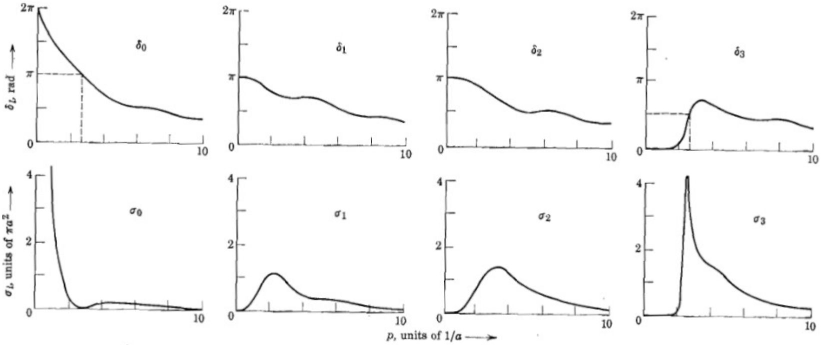


FIGURE 11.3. Phase shifts $\delta_l(p)$ and partial cross sections $\sigma_l(p)$ for a square well of depth V_0 given by $(2ma^2V_0)^{1/2} = 4.8$.

1. $\delta_0(0) = 2\pi$, $\delta_1(0) = \delta_2(0) = \pi$，其他分波 $\delta_l(0) = 0$。分波散射截面 $\sigma_0(0) = 0$。
2. 当 l 变大，$p \to 0$ 时, $\delta_l \to n\pi - a_l p^{2l+1}$, 越来越平缓。
   $0 \le pa \lesssim 1$, σ_0 给出 90% 的散射截面的贡献。$1 \lesssim pa \lesssim 2$ 时，$\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2$ 主要贡献。
3. 在 $pa = 10$ 时，所有的相移小于 60 度, $pa = 50$, 小于 15 度。

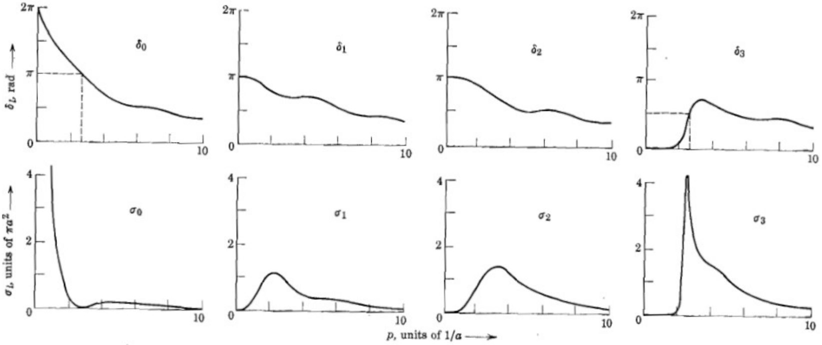


FIGURE 11.3. **Phase shifts $\delta_l(p)$ and partial cross sections $\sigma_l(p)$ for a square well of depth V_0 given by $(2ma^2V_0)^{1/2} = 4.8$.**

4. $pa = 2.7$ 时，s-波相移过 π, $\sigma_0 = 0$。这是因为此时波函数在势阱内正好比自由的波函数多了一个周期，出了势阱之后跟自由波函数一样没有区别。
5. 某些情况下此现象发生在所有其他 $l > 0$ 的截面可以忽略的时候，此时在此能量处几乎没有散射现象，这叫做 Ramsauer-Townsend 效应。
6. 在 $pa = 2.6$, $l = 3$ 的相移很快的通过 $\pi/2$，σ_3 有一个很尖锐的峰。这是一个共振态现象，势几乎能够束缚住一个态，但还没有完全束缚住。

Summary

- $\psi_{l,p}(r)$: $\lambda \to 0$, or $E \to \infty$, or $l \to \infty$ 时 $\sin\delta_l \to 0$, $\delta \to n\pi$, 玻恩近似成立。(pg.25)
- $\psi_{l,p}(r) \xrightarrow{p\to 0} p^{l+1}$. (pg. 26)
- $V(r)$ 满足一定条件时，$f_l(p) \xrightarrow{p\to 0} -a_l p^{2l}$, a_l 散射长度。$e^{i\delta_l(p)} \sin\delta_l(p) \to -p^{2l+1} a_l$. (pg. 27)
- 例子：球方势阱。(pg. 29)

Section 4

正则 (Regular) 解, Jost 函数及玻恩展开收敛性

Summary (go to pg. 48)

正则（Regular）解：

我们定义一个新的解 $\phi_{lp}(r) \propto \psi_{l,p}(r)$，只有归一化不同。

- 归一化的 $\psi_{l,p}(r)$，$\int_0^\infty dr \psi_{l,p'}(r)^* \psi_{l,p}(r) = \frac{\pi}{2}\delta(p'-p)$。
  边条件是 $\psi_{l,p}(0) = 0$；在 $r \to \infty$ 时，$\psi_{l,p} \to \hat{\jmath}_l + p f_l \hat{h}_l^+$。
- 我们定义 ϕ_l 的边条件，定义在一点 $r \to 0$ 处，包括值和导数

$$\phi_{l,p}(r) \xrightarrow{r\to 0} \hat{\jmath}_l(pr)$$

- 显然，正则解是实的：边界条件和方程都是实的。

Go to (page (37))

Variable Phase Method *

为简单起见，我们只考虑 s 波。我们先引入 $V_\rho(r)$,

$$V_\rho = \begin{cases} V(r)\,, & r \le \rho \\ 0\,, & r > \rho \end{cases}$$

- 势 $V(r)$ 的 s 波的 regular 解记为 $\phi(r)$, 相移 δ,
- $V_\rho(r)$ 的记为 $\phi_\rho(r)$, $\delta(\rho)$。
- 在 $\rho = 0$, 没有势了，约定 $\delta(0) = 0$。
- 显然$\lim_{\rho\to\infty} \delta(\rho) = \delta$。
- $\forall \rho$, $\phi(r)$ 和 $\phi_\rho(r)$ 在 $r = 0$ 有同样的边界条件，满足同样的微分方程，

  $$\phi(r) = \phi_\rho(r), \quad [0 \le r \le \rho]$$

  对比：归一化的 $\psi_{l,p}$ 则没有此性质。
- $r > \rho$, 两个解则有区别：$\phi_\rho(r)$ 满足自由 (此时 $l = 0$) 的径向方程

  $$\phi_\rho(r) = \alpha(\rho) \sin[pr + \delta(\rho)], \quad [r \ge \rho]$$

- 由在 ρ 处的连续性：

$$\phi(\rho) = \alpha(\rho)\sin[p\rho + \delta(\rho)]$$

- 由导数 ϕ' 的连续性，

$$\phi'(\rho) = p\alpha(\rho)\cos[p\rho + \delta(\rho)]$$

- 上两式对任意 $r = \rho$ 处都成立，可以给所有的 ρ 都换成 r，带入定态径向方程，消掉 α

$$\delta'(r) = -\frac{1}{p}U(r)\sin^2[pr + \delta(r)]$$

  我们得到了 s-波相移方程。

- 由此方程，利用 $\delta(r=0) = 0$ 边界条件：若当 $r \to \infty$，$V(r) = O(r^{-1-\epsilon})$，上式积分有限，$\delta(r \to \infty)$ 有限，是所期望的相移。
- $\delta(r)$ 的方程是非线性的。

$$\delta'(r) = -\frac{1}{p} U(r) \sin^2[pr + \delta(r)]$$

- 由于右边的符号只取决于 $U(r)$ 的符号：吸引势 $V(r) \leq 0$，给出正的相移；排斥势 $V(r) \geq 0$，给出负的相移。
- 如果两个势 $V_1(r) \geq V_2(r)$，对所有 r，那么 $\delta_1(r) \leq \delta_2(r)$，$\Rightarrow$ $\delta_1 \leq \delta_2$。
- $V \to \lambda V$，

$$\delta = -\frac{\lambda}{p} \int_0^\infty dr U(r) \sin^2[pr + \delta(r)]$$

假设 $V(r) \sim 1/r^{1-\epsilon}$，

$$|\delta| \leq \left|\frac{\lambda}{p}\right| \int_0^\infty dr |U(r)| \;\Rightarrow \delta \to 0, [\text{as } \lambda \to 0, \text{or } p \to \infty]$$

- 此方法直接讨论 δ，没有 $n\pi$ 的不确定性。当 $\lambda \to 0$ 或 $p \to \infty$，$\delta \to 0$。

此方法可以推广到任意 l-分波。

正则解波函数的迭代解

正则波函数由于边界条件定义在 $r=0$, 径向方程可以化为如下积分方程

$$\phi_{l,p} = \hat{\jmath}_l(pr) + \lambda \int_0^r dr'\, g_{l,p}(r,r')\, U(r')\phi_{l,p}(r') \tag{3}$$

$$g_{l,p}(r,r') = \frac{1}{p}[\hat{\jmath}_l(pr)\hat{n}_l(pr') - \hat{n}_l(pr)\hat{\jmath}_l(pr')]$$

注意：积分上限是 r, 即 Green 函数在 $r' > r$ 时为 0。

定理：

积分方程 (8) 对任意 λ 都可以迭代求解，如下级数解收敛

$$\phi(r) = \sum_0^\infty \lambda^n \phi^{(n)}(r)\,, \quad \phi^{(0)} = \hat{\jmath}_l(pr),$$

$$\begin{aligned}\phi^{(n)}(r) &= \int_0^r dr'\, g(r,r')\, U(r')\phi^{(n-1)}(r') \\ &= \int_0^r dr_n \int_0^{r_n} dr_{n-1} \cdots \int_0^{r_2} dr_1\, g(r,r_n)\, U(r_n) g(r_n,r_{n-1}) \cdots U(r_1)\hat{\jmath}_l(pr_1)\end{aligned}$$

证明跳过 (go to page 42)

证明：我们仅以 $l=0$ 分波为例，其他分波类似，需要用到 Riccati-Bessel 函数的性质。$j_0(pr)=\sin(pr)$, $G_{0,p}(r,r')=p^{-1}\sin p(r-r')$。首先证明积分有限

$$\phi^{(n)}(r)=\frac{1}{p^n}\int_0^r dr_n\int_0^{r_n}dr_{n-1}\cdots\int_0^{r_2}dr_1\sin p(r-r_n)\,U(r_n)\sin p(r_n-r_{n-1})\cdots$$

由于积分上限有限，积分发散只有可能是由于被积函数的奇点，U 的奇点 0 点，在 0 点附近

$$|\sin pr_1|\le pr_1,\quad |\sin p(r_2-r_1)|\le pr_2,\quad \ldots|\sin p(r-r_n)|\le pr \tag{4}$$

$$|\phi^{(n)}(r)|\le pr\int_0^r dr_n\int_0^{r_n}dr_{n-1}\cdots\int_0^{r_2}dr_1|U(r_n)r_n\cdots U(r_1)r_1|$$

只要在 $r\to 0$ 时，$V\sim O(r^{-2+\epsilon})$, $\phi^{(n)}$ 积分有限。

下面证明级数 $\sum \lambda^n \phi^{(n)}$ 收敛。由于积分区域

$$0 \le r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_n \le r$$

$$\begin{aligned}
|\phi^{(n)}(r)| \le & pr \int_0^r dr_n \int_0^{r_n} dr_{n-1} \cdots \int_0^{r_2} dr_1 |U(r_n) r_n \cdots U(r_1) r_1| \\
= & \frac{1}{n!} pr \int_0^r dr_n \int_0^r dr_{n-1} \cdots \int_0^r dr_1 \prod_i |U(r_i) r_i| \\
= & \frac{1}{n!} pr \Big(\int_0^r dr_i |U(r_i) r_i| \Big)^n \\
\le & \frac{1}{n!} pr \alpha^n, \quad \alpha = \int_0^\infty dr |U(r) r|
\end{aligned}$$

$$|\phi(r)| \le \Big| \sum_0^\infty \lambda^n \phi^{(n)} \Big| \le pr \sum_0^\infty \frac{|\lambda\alpha|^n}{n!} = pr e^{|\lambda\alpha|} \tag{5}$$

所以级数收敛, 而且是一致收敛 (在有限的区域内), $e^{\lambda\alpha}$ 与 p,r 无关。

下面来看此级数解 $\phi(r)=\sum\lambda^n\phi^{(n)}$ 确实是积分方程的解 $(l=0)$

$$\phi(r)=\sin pr+\frac{\lambda}{p}\int_0^r dr'\sin(p(r-r'))\,U(r')\phi(r')$$

$$\phi^{(n)}(r)=\frac{1}{p^n}\int_0^r dr_n\int_0^{r_n}dr_{n-1}\cdots\int_0^{r_2}dr_1\sin p(r-r_n)\,U(r_n)\sin p(r_n-r_{n-1})\cdots$$

可以很容易看出，

$$\lambda^{n+1}\phi^{(n+1)}=\frac{\lambda}{p}\int_0^r dr'\sin(p(r-r'))\,U(r')\lambda^n\phi^{(n)}(r')$$

积分方程右边第二项给出级数 λ^n，$n\geq 1$ 项，第一项给出 λ^0 项。

前面的 bound (4,5) 对于 pr 很大时过于保守，我们可以利用

$$|\sin x| \leq \frac{\beta x}{1+x}, \quad [x \geq 0, \beta > 0]$$

β 不重要的常数。

$$|\sin p(r-r_n)| \leq \frac{\beta pr}{1+pr}, \quad |\phi^{(n)}(r)| \leq \frac{\beta pr}{1+pr}\frac{\alpha^n}{n!}$$

$$|\phi(r)| \leq \frac{\beta pr}{1+pr}e^{\lambda\alpha}$$

由 $\phi_{l,p}(r)$ 的级数解，我们要得到散射振幅。首先要看 $\phi_{l,p}(r)$ 在 $r\to\infty$ 的性质。由于 $\phi_{l,p}$ 是实的，

$$\phi_{l,p} \xrightarrow{r\to\infty} \frac{i}{2}[\mathit{f}_l(p)\hat{h}_l^-(pr)-\mathit{f}_l^*(p)\hat{h}_l^+(pr)] \sim \frac{i}{2}[\mathit{f}_l(p)\,e^{-i(pr-l\pi/2)}-c.c.]$$

$\mathit{f}_l(p)$ 称为 Jost 函数。而由于 $\phi_{l,p}(r)\propto\psi_{l,p}(r)$，且

$$\psi_{l,p}(r) \xrightarrow{r\to\infty} \frac{i}{2}[\hat{h}_l^-(pr)-\mathbf{s}_l(p)\hat{h}_l^+(pr)]$$

我们得到，

$$\mathbf{s}_l(p)=\frac{\mathit{f}_l^*(p)}{\mathit{f}_l(p)},\quad \phi_{l,p}(r)=\mathit{f}_l(p)\psi_{l,p}(r)$$

上式可以看到

- Jost 函数就是 $\phi_{l,p}(r)/\psi_{l,p}(r)$。
- 很容易看出 $|\mathbf{s}_l|=1$，幺正性。
- $\mathbf{s}_l=e^{2i\delta_l}\Rightarrow \mathit{f}_l(p)=|\mathit{f}_l(p)|e^{-i\delta_l(p)}$

下面由 $\phi_{l,p}(r)$ 得到 Jost 函数，由积分方程 (8)

$$\phi_{l,p} = \hat{\jmath}_l(pr) + \lambda \int_0^r dr'\, g_{l,p}(r,r')\, U(r')\phi_{l,p}(r')$$

$$g_{l,p}(r,r') = \frac{1}{p}[\hat{\jmath}_l(pr)\hat{n}_l(pr') - \hat{n}_l(pr)\hat{\jmath}_l(pr')],$$

由 $\hat{\jmath} = \frac{i}{2}(\hat{h}^- - \hat{h}^+)$, $\hat{n} = \frac{1}{2}(\hat{h}^- + \hat{h}^+)$, 得到 $r \to \infty$,

$$\phi_{l,p} \to \frac{i}{2}\left\{\left[1+\frac{\lambda}{p}\int_0^\infty dr'\, \hat{h}_l^+(pr')\, U(r')\phi_{l,p}(r')\right]\hat{h}_l^-(pr) - \left[\ldots\right]^* \hat{h}_l^+(pr)\right\}$$

所以,

$$\boldsymbol{f}_l(p) = 1 + \frac{\lambda}{p}\int_0^\infty dr'\, \hat{h}_l^+(pr')\, U(r')\phi_{l,p}(r') \qquad (6)$$

可以验证$\boldsymbol{f}_l(p)$ 积分是收敛的，例如，对于 $l = 0$,

$$\boldsymbol{f}_0(p) = 1 + \frac{\lambda}{p}\int_0^\infty dr'\, e^{+ipr'}\, U(r')\phi_{0,p}(r')$$

$$|\boldsymbol{f}_0(p) - 1| \le \beta e^{|\lambda\alpha|}\left|\frac{\lambda}{p}\right| \int_0^\infty dr'\, U(r')\frac{pr'}{1+pr'} \qquad (7)$$

由此我们能够得到当 $\lambda \to 0$ 或 $p \to \infty$ 时，$\boldsymbol{f}_l(p) \to 1$。

由 $\phi_{l,p}(r)$ 的级数展开 $\phi=\sum_n \lambda^n \phi^{(n)}$ 代入到 (9)，我们可以得到 Jost 函数的展开

$$\boldsymbol{f}_l(p)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n \boldsymbol{f}_l^{(n)}(p), \quad \boldsymbol{f}_l^{(n)}=\frac{1}{p}\int_0^{\infty}\hat{h}^+ U\phi^{(n-1)}$$

可以证明对任何 λ 此级数收敛。

一个定理

一个级数 $g(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n g^{(n)}$ 如果对任何复 λ 都收敛，当且仅当 $g(\lambda)$ 在任何 λ 处解析 (entire 整函数)。

- $\phi_{l,p}(r)$ 和 $f_l(p)$ 作为级数对任意 λ 都收敛，不管 λ 是实的还是复的，所以$\phi_{l,p}(r)$ 和 $f_l(p)$ 都是关于 λ 的整函数 (entire)。
- 或者说，因为 ϕ 和 f 选的比较好是关于 λ 的整函数，所以他们的级数展开收敛。

我们可以来考虑对应的归一化的 $\psi_{l,p}(r)$, $\mathbf{s}_l(p)$ 关于 λ 的级数展开的性质。由

$$\psi_{l,p} = \frac{\phi_{l,p}(r)}{\boldsymbol{f}_l(p)}, \quad \mathbf{s}_l(p) = \frac{\boldsymbol{f}_l^*(p)}{\boldsymbol{f}_l(p)}$$

- 在 $\boldsymbol{f}_l(p)$ 不为零处 $\psi_{l,p}(r)$ 和 $\mathbf{s}_l(p)$ 都是关于 λ 解析的。
- $\lambda = 0$ 时，$\boldsymbol{f}_l(p) = 1$, 所以至少在 $\lambda = 0$ 附近，$\psi_{l,p}(r)$ 和 $\mathbf{s}_l(p)$ 是关于 λ 解析的。
- 所以，在 $\lambda = 0$ 附近 $\psi_{l,p}(r)$ 和 $\mathbf{s}_l(p)$ 可以展开成关于 λ 的级数，且级数收敛。即对于足够小的 λ, 玻恩级数收敛。

当 $\lambda \neq 0$, Jost 函数可以有零点。$\psi_{l,p}(r)$ 和 $\mathbf{s}_l(p)$ 可以有极点。

- 若 $\lambda_0 = \bar{\lambda} e^{i\theta}$ 是离 $\lambda = 0$ 最近的 $\boldsymbol{f}$ 有零点的情形。则由 circle of convergence theorem,
  - 在 $|\lambda| < \bar{\lambda}$ 圆内，$\psi_{l,p}(r)$ 和 $\mathbf{s}_l(p)$ 的玻恩级数是收敛的。
  - 在收敛圆外,$\psi_{l,p}(r)$ 和 $\mathbf{s}_l(p)$ 的玻恩级数发散。
- 实际上玻恩级数在 $\lambda > \bar{\lambda}$ 时发散是因为在 $|\lambda| = \bar{\lambda}$ 收敛圆上，存在复的 λ_0, 玻恩级数发散。
- 真实的 V 对应 $\lambda = 1$, 玻恩级数是否收敛取决于是否 $\bar{\lambda} > 1$
- 对于足够高的 p, 分波 ψ_{lp}, $\mathbf{s}_l(p)$ 的玻恩级数 $(\lambda = 1)$ 收敛: 由 (7), 当 $p \to \infty$ 时，$\boldsymbol{f}_l(p) \to 1$, 而且是在 $\lambda < \lambda_0$ 区域内 $(\forall \lambda_0 < \infty)$ 一致收敛到 1。所以存在 $\bar{p}$, 在 λ 的单位圆内，$\boldsymbol{f}_l(p) \neq 0$。

Summary

- 正则解：(pg. 33)
  (1) 实的，满足边界条件：值和导数

$$\phi_{l,p}(r) \xrightarrow{r\to 0} \hat{j}_l(pr)$$

  (2) Variable phase method. (pg. 34)
  (3) 迭代解对所有 λ 收敛，是关于 λ 的整函数. (pg. 37, 45)
- Jost 函数：(pg. 42)
  - $\phi_{l,p} \xrightarrow{r\to\infty} \frac{i}{2}[\boldsymbol{f}_l(p)\hat{h}_l^-(pr) - \boldsymbol{f}_l^*(p)\hat{h}_l^+(pr)]$
  - $\mathbf{s}_l(p) = \frac{\boldsymbol{f}_l^*(p)}{\boldsymbol{f}_l(p)}$, $\quad \phi_{l,p}(r) = \boldsymbol{f}_l(p)\psi_{l,p}(r)$, $\boldsymbol{f}_l(p) = |\boldsymbol{f}_l(p)|e^{-i\delta_l(p)}$
  - 由 ϕ_{lp} 得到 $\boldsymbol{f}_l(p)$ 的积分表示，$\lambda \to 0$, $p \to \infty$ 时，$\boldsymbol{f}_l(p) \to 1$. (pg.43)
  - 对 λ 的级数展开收敛，是 λ 的整函数。(pg.44 45)
- ψ_{lp}, $\mathbf{s}_l(p)$: (pg.47)
  (1) 在 $\lambda = 0$ 附近，对于足够小的 λ，玻恩级数收敛。
  (2) 在 $\lambda = 1$，对于足够高的 p，玻恩级数收敛。

Section 5

正则解、Jost 函数、$\mathbf{s}_l$ 的解析性质 (关于 p)

Summary (go to page (62))

复函数 $f(z)$ 在区域 R 上解析, 如果在 R 上任一点都可微。
Cauchy 定理:$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint ds\frac{f(s')}{s'-s}$

- 解析函数都无穷可微。
- 在整个 $\mathbb{C}$ 上解析的函数称为整函数 (entire function)。
- 在解析区域内可以级数展开。
- 除了某些极点之外解析，$\oint dz f(z)=\sum \text{residuals of poles}$
- 两解析函数在某段线上相等: 如果 $f_1(z)$ 在一线段上定义，$f_2(z)$ 在一个包含此线段的区域 R 解析，且在线段上 $f_1(s)=f_2(z)$，则 $f_2(z)$ 是 $f_1(z)$ 在 R 上的唯一的解析延拓。
- $f(z)$ 在 R 区域解析，$f^*(z)$ 在 R^* 上并不解析，但是 $[f(z^*)]^*$ 在 R^* 上解析。
- Schwartz 反射原理: 若 $f(z)$ 在一个包含实轴上一线段的区域内解析，则 $f(z)=f(z^*)$。

Go to page (52)

两个定理：

级数求和:

$$f(z) = \sum_n f_n(z)$$

若 $f_n(z)$ 在区域 R 上解析，且级数在 R 上一致收敛, 则 $f(z)$ 在 R 上解析。

积分:

$$f(z) = \int_a^b dr\, g(z, r)$$

若 $\forall r \in (a, b)$, $g(z, r)$ 在 R 解析，且 $g(z, r)$ 在 $R \times (a, b)$ 上连续, 则 $f(z)$ 在 R 上解析。

第二个定理推广: $a = 0$，$g(z, r = 0)$ 函数发散，或者 $b = \infty$, 或者 $r = r_0 \in (a, b)$ 处 $g(z, r_0)$ 发散这两种情形，若可以证明在端点和 r_0 处积分一致收敛，则上面结论仍成立。

正则解的解析性质

正则解 $\phi_{l,p}$ 满足积分方程

$$\phi_{l,p} = \hat{j}_l(pr) + \lambda \int_0^r dr' g_{l,p}(r,r') U(r') \phi_{l,p}(r') \tag{8}$$
$$g_{l,p}(r,r') = \frac{1}{p}[\hat{j}_l(pr)\hat{n}_l(pr') - \hat{n}_l(pr)\hat{j}_l(pr')]$$

$z \to 0$ 时，$\hat{j}(z) \to z^{l+1}$, $\hat{n}(z) \to z^{-l}$: 格林函数关于 p 解析。

定理：

对于任意的 p (实的或复的), 上面积分方程 (8) 的迭代解 $\phi_{l,p}(r)$ (page 37) 是关于 p 的整函数。

两种看法：

- $\phi_{l,p}$ 是对任何复 p 方程的解, 关于 p 解析，回到物理区 $p \geq 0$, ϕ_{lp} 回到物理解。
- $\phi_{l,p}$ 从物理区 $p \geq 0$ 解析延拓到复平面上，给出复 p 的解。

证明跳过 (Go to page(54))

证明与前面讨论关于 λ 解析性类似：

- 对应 $l=0$ 分波：

$$\phi^{(n)}(r)=\frac{1}{p^n}\int_0^r dr_n\int_0^{r_n}dr_{n-1}\cdots\int_0^{r_2}dr_1\sin p(r-r_n)\,U(r_n)\sin p(r_n-r_{n-1}$$

利用 $|\sin(pr)|\le\beta\frac{pr}{1+pr}$,

$$|\phi^{(n)}|\le\beta\Big(\frac{|pr|}{1+|pr|}\Big)e^{|\mathrm{Im}pr|}\frac{\alpha^n}{n!},\quad \alpha=\int_0^r dr|U(pr)r|$$

在 p 有限区域内, 级数一致收敛 (给定 r, 收敛与 p 无关)。
$\phi^{(0)}=\hat{j}_l(pr)$ 解析，利用递推关系和前页定理，
$\phi^{(n)}=\frac{1}{p}\int_0^r dr'\sin(p(r-r'))\phi^{(n-1)}$,$\phi^{(n)}$ 关于 p 解析。

- 对于一般的 l

$$|\phi_{l,p}|\le\gamma_l\Big(\frac{|pr|}{1+|pr|}\Big)^{l+1}e^{|\mathrm{Im}pr|}$$

γ_l 是常数。对于 $z\to0$, $|pr|^{l+1}$ 对应 $\hat{j}(z)\sim z^{l+1}$ 的行为。当 $\mathrm{Im}z\to\infty$, $e^{|\mathrm{Im}pr|}$ 对应 $\hat{j}(z)\to\sin(z-\frac{1}{2}l\pi)$ 的行为。

几个性质：由

$$\hat{j}_l(-pr) = (-1)^{l+1}\hat{j}_l(pr), \quad \hat{n}_l(-pr) = (-1)^l\hat{n}_l(pr)$$

得到

$$g_{l,-p}(r,r') = g_{l,p}(r,r')$$

所以，由积分方程 (8)

$$\phi_{l,-p}(r) = (-1)^{l+1}\phi_{l,p}(r)$$

JOST 函数的解析性

由

$$f_l(p) = 1 + \frac{\lambda}{p}\int_0^{\infty} dr'\, \hat{h}_l^+(pr')\, U(r')\phi_{l,p}(r') \tag{9}$$

该式定义了 f 到复平面的解析延拓。p 复数时，

$$|\phi_{l,p}(r)| \le \left(\frac{\beta|pr|}{1+|pr|}\right)^{l+1} e^{|\mathrm{Im}\, pr|}$$

$$|\hat{h}_l^+| \le \left(\frac{\beta|pr|}{1+|pr|}\right)^{-l} e^{\mathrm{Im}\, pr}$$

所以

$$|f_l(p) - 1| \le \frac{\mathrm{const}}{|p|}\int_0^{\infty} dr |U(r)| \frac{\beta|pr|}{1+|pr|} e^{(|\mathrm{Im}\, p| - \mathrm{Im}\, p) r}$$

- 若 $\mathrm{Im}\, p > 0$, 积分收敛，所以在上半平面解析。
- 下半平面则依赖于势的行为。
- 截断势，对于 $r > a$, $U(r) = 0$, 则 f 在整个复平面上解析
- 对于 $V \propto e^{-\mu r}$, f 在 $\mathrm{Im}\, p > -\mu/2$ 解析。

对于 p 为实数，由

$$\phi_{l,-p} = (-1)^{l+1}\phi_{l,p}(r),$$
$$\hat{h}_l^+(-pr) = (-1)^l h_l^{+*}(pr)$$

得

$$\boldsymbol{f}_l(-p) = [\boldsymbol{f}_l(p)]^*$$

解析延拓的话：

$$\boldsymbol{f}_l(-p) = [\boldsymbol{f}_l(p^*)]^*$$

若 p 纯虚数的话，$\boldsymbol{f}_l(-p) = [\boldsymbol{f}_l(-p)]^*$, 实的，$\boldsymbol{f}_l(p)$ 关于虚轴对称点互为复共轭。

JOST 函数和 $\mathbf{s}_l$ 矩阵的解析性

对于 p 由实数解析延拓到复平面

$$\mathbf{s}_l(p) = \frac{\boldsymbol{f}_l(p)^*}{\boldsymbol{f}_l(p)} = \frac{\boldsymbol{f}_l(p^*)^*}{\boldsymbol{f}_l(p)} = \frac{\boldsymbol{f}_l(-p)}{\boldsymbol{f}_l(p)}$$

后两式, 分母对于 $\mathrm{Im}p \geq 0$ 解析，分子对于 $\mathrm{Im}p \leq 0$ 解析。

- 对于截断势，$r > a$, $V(r) = 0$, 则 $\mathbf{s}_l$ 亚纯 (除了极点之外解析)。
- 若 $V \sim O(e^{-\mu r})$, $\mathbf{s}_l(p)$ 在 $-\mu/2 < \mathrm{Im}p < \mu/2$ 内亚纯。

若在 $\mathrm{Re}r>0$ 时 $V(r)$ 解析，且在此半平面上任意射线 $\rho e^{i\theta}$ 也满足我们对势的要求时，我们称之为解析势。由此，对 r 的积分路径可以变形到复平面上

$$f_l(p)=1+\frac{1}{p}\int_0^{\infty e^{i\theta}}dr\hat{h}^+U\phi$$

仍然利用 $|\phi_{l,p}(r)|\leq\left(\frac{\beta|pr|}{1+|pr|}\right)^{l+1}e^{|\mathrm{Im}pr|}$，$|\hat{h}_l^+|\leq\left(\frac{\beta|pr|}{1+|pr|}\right)^{-l}e^{\mathrm{Im}(pr)}$

$$|f_l(p)-1|\leq\frac{\mathrm{const}}{|p|}\int_0^{\infty}dr|U(re^{i\theta})|\frac{\beta|pr|}{1+|pr|}e^{(|\mathrm{Im}(pe^{i\theta})|-\mathrm{Im}(pe^{i\theta}))r}$$

相当于对 p 解析区域转过 $-\theta$ 角，当 θ 取遍 $-\pi/2<\theta<\pi/2$ 区域，p 的解析区域向下延拓到除负虚轴以外区域：

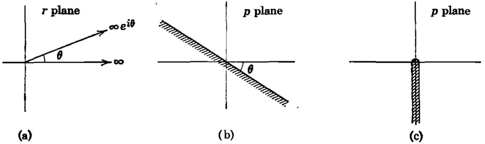
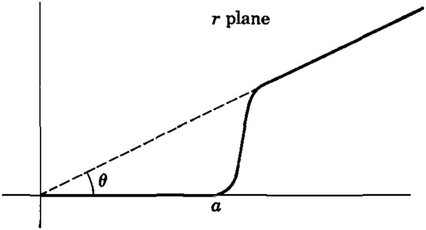
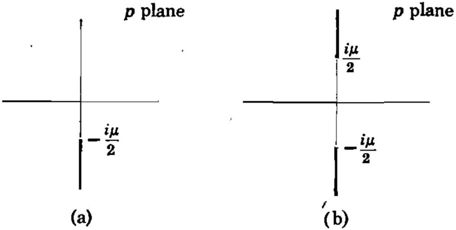


FIGURE 12.5. (a) The original integral for $f_l(p)$ runs from 0 to ∞; that of (12.12) runs from 0 to $\infty e^{i\theta}$. (b) (12.12) is analytic in $\{\mathrm{Im}(pe^{i\theta})>0\}$, the half plane above the sloping line shown. (c) The union of all such regions with $-\pi/2<\theta<\pi/2$ is the whole plane cut along the negative imaginary axis.

其实不一定要求 $\mathrm{Re}r > 0$ 内完全解析，例如 $r > a$ 解析，我们可以选取积分路径:



若势同时解析且 e 指数衰减，例如 $e^{-\mu r}$, 结合前面两种情形



- 若 $V\sim\gamma e^{-\mu r}/r$, $f_l(p)$ 在 $p=-i\mu/2,-i\mu,\ldots$ 有割线
- 若 $V\sim\gamma e^{-\mu r}$, $f_l(p)$ 在 $p=-i\mu/2,-i\mu,\ldots$ 有极点。
- s_l 在 (b) 图区域内亚纯。

两点说明：

- 对于满足我们的要求的势，f_l 在上半平面解析。要解析延拓到下半平面，需要一些额外的要求。
- $f_l(p)$ 在下半平面的解析性物理上并不是很重要，在负虚轴上面的性质对于势的长程性质很敏感。
  例如：$e^{-\mu r}/r$ 势，负虚轴上会有割线，但是如果在 $r > a$ 截断，则在整个复平面上解析。而当 a 很大时，这两个势物理上是不能区分的。

SUMMARY

- 正则解：对于任意的 p (实的或复的), 正则解的积分方程 (8) 的迭代解 $\phi_{l,p}(r)$ (page 37) 是关于 p 的整函数。满足 $\phi_{l,-p}(r) = (-1)^{l+1}\phi_{l,p}(r)$. (pg. 52, 54)
- Jost 函数: $f_l(-p) = [f_l(p^*)]^*$。在上半平面 $(\mathrm{Im}p > 0)$ 解析。下半平面则依赖于势的行为。(pg.55)
  - 截断势，对于 $r > a$, $U(r) = 0$, 则 f 在整个复平面上解析
  - 若 $V \sim O(e^{-\mu r})$, $f_l(p)$ 在 $\mathrm{Im}p > -\mu/2$ 内解析。
  - 解析势，f 在除 $\mathrm{Im}p < 0$ 解析。(pg.58)
  - 对于 $V \propto \gamma e^{-\mu r}$, f 在除 $\mathrm{Im}p < -\mu/2$ 解析。(pg. 60)
- $\mathrm{s}_l(p)$:$\mathrm{s}_l(p) = \frac{f_l(p)^*}{f_l(p)} = \frac{f_l(p^*)^*}{f_l(p)} = \frac{f_l(-p)}{f_l(p)}$, (pg.57)
  - 对于截断势，$r > a$, $V(r) = 0$, 则 s_l 亚纯 (除了极点之外解析)。
  - 若 $V \sim O(e^{-\mu r})$, $\mathrm{s}_l(p)$ 在 $-\mu/2 < \mathrm{Im}p < \mu/2$ 内亚纯。
  - 若 $V \propto \gamma e^{-\mu r}$, $\mathrm{s}_l(p)$ 在除 $\mathrm{Im}p < -\mu/2, \mathrm{Im}p > \mu/2$ 外区域亚纯。(pg. 60)

Section 6

束缚态与 Levinson 定理

Summary (go to page (80))

束缚态

由在 $p, r \in \mathbb{R}$, 上渐近行为：

$$\phi_{l,p} \to \frac{i}{2}[\boldsymbol{f}_l(p)\hat{h}_l^-(pr) - \boldsymbol{f}_l(-p)\hat{h}_l^+(pr)]$$

p 解析延拓到上半平面时，我们假设上式仍然成立，

- 假设，某种势使得在 $\bar{p}$ 处，$(\mathrm{Im}\bar{p} > 0)$, $\boldsymbol{f}_l(\bar{p}) = 0$,

$$\phi_{l,p} \to -\frac{i}{2}\boldsymbol{f}_l(-\bar{p})\hat{h}_l^+(\bar{p}r) \to -\frac{i}{2}\boldsymbol{f}_l(-\bar{p})e^{i(pr - l\pi/2)}$$

  当 $\mathrm{Im}p > 0$, $r \to \infty$, $\hat{h}_l^+$ 指数下降。
- 此时，$\phi_{l,\bar{p}}$ 是可归一化的波函数，满足 $\phi_{l,\bar{p}}(r=0) = 0$, 对应 Schrödinger 方程的束缚态的解。
- 由于 H 是厄米算符，只有实的本征值 $E = p^2/2\mathrm{m}$，所以 $\bar{p}$ 只能是纯虚数 $\bar{p} = i\alpha$, $E = -\alpha^2/2\mathrm{m}$.
- 反过来，H 有束缚态，$E = -\alpha^2/2\mathrm{m}$, 角动量 l, 则在 $p = i\alpha$, 解 $\phi_{l,p}$ 必然指数衰减，$\boldsymbol{f}(i\alpha)$ 为零。
- 若 $\boldsymbol{f}(-p)$ 在 $-p = -\bar{p}$ 处也解析 (且不为零)，由 $\mathbf{s}_l(p) = \boldsymbol{f}(-p)/\boldsymbol{f}(p)$, $\bar{p}$ 为 $\mathbf{s}_l(p)$ 的极点。

现在，我们对束缚态作为 $\mathbf{s}_l(p)$ 的极点的理解：
$\mathbf{s}_l(p)$ 是在波函数 ϕ 中的 outgoing 和 incoming 波的系数即 Jost 函数的比。当 $\mathrm{Im}p > 0$, outgoing 波在 $r \to \infty$ 指数下降，而 incoming 的上升。由于束缚态的 ϕ 只是下降的，outgoing 不为零 incoming 为零，所以 $\mathbf{s}_l(p)$ 无穷大。

(go to (68))

更严格一点：定义径向方程的解 $\chi^{\pm}_{l,p}(r)$，对应纯的 outgoing 和 incoming 解

$$\chi^{\pm}_{l,p}(r) \xrightarrow{r\to\infty} \hat{h}^{\pm}_l(pr)$$

一般来说 $\chi^{\pm}_{l,p}(r)$ 在 $r=0$ 处不为零, 并不 $\propto\phi_{l,p}$。满足积分方程

$$\chi^{\pm}_{l,p} = \hat{h}^{\pm}_l(pr) - \int_r^{\infty} dr'\, g_{l,p}(r,r')\, U(r')\chi^{\pm}_{l,p}(r')$$

- 注意：积分是从 $r\to\infty$。可以迭代求解。
- 可以证明 $\chi^{+}_{l,p}(r)$ 在 $\mathrm{Im}p \geq 0$ 时存在, 是径向方程的解，且关于 r 连续，且在 $\mathrm{Im}p > 0$ 关于 p 解析。
- 对于 $\chi^{-}_{l,p}(r)$ 则在 $\mathrm{Im}p \leq 0$ 时存在且关于 r 连续，且在 $\mathrm{Im}p < 0$ 关于 p 解析。
- 对于 $p \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{l,p}(r) = \frac{i}{2}\left(\boldsymbol{f}_l(p)\chi^{-}_{l,p}(r) - \boldsymbol{f}_l(-p)\chi^{+}_{l,p}(r)\right)$$

Wronskian 朗斯基行列式

两个函数 $\alpha(r)$, $\beta(r)$,

$$W(\alpha,\beta)=\alpha(r)\beta'(r)-\alpha'(r)\beta(r)=\det\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{pmatrix}$$

- 若两个函数线性相关，则 $W(\alpha,\beta)=0$.
- 如果两个函数 $\alpha(r)$, $\beta(r)$ 满足径向方程, 则

$$\frac{dW(\alpha,\beta)}{dr}=\alpha(r)\beta''(r)-\alpha''(r)\beta(r)=0.$$

- $W(j_l(pr),\hat{n}(pr))=-p$, $W(\chi^+_{l,p},\chi^-_{l,p})=-2ip$.
- $W(\chi^+,\phi)=p\boldsymbol{f}_l(p)$, 即

$$\boldsymbol{f}_l(p)=\frac{1}{p}W(\chi^+,\phi)$$

- 当 $\boldsymbol{f}_l(\bar{p})=0$, $\mathrm{Im}\bar{p}>0$, 则 $W(\chi^+,\phi)=0$, $\phi_{l,\bar{p}}=\lambda\chi^+_{l,\bar{p}}(r)$, $\chi^+_{l,p}(r)$ 随 r 指数衰减，平方可积，所以是束缚态解，$E=-\alpha^2/2m$。

- 束缚态对应 $\boldsymbol{f}_l(r)$ 的一阶极点。

$$\frac{d\boldsymbol{f}_l}{dp}(\bar{p}) = \int_0^\infty dr \chi^+_{l,\bar{p}}(r)\phi_{l,\bar{p}}(r) = \lambda \int_0^\infty dr (\chi^+_{l,\bar{p}})^2 > 0$$

- $\boldsymbol{f}_l$ 的零点处，分波振幅 f_l 的留数 $\Gamma = (-1)^{l+1}\gamma^2$, γ 是由归一化的束缚态波函数在无穷远处渐近形式定义 $\eta(r) \xrightarrow{r\to\infty} \gamma e^{-\alpha r}$, 其中 $E = -\alpha^2/2m$。

两个定理：

1. Jost 函数不能在实轴上有零点，除非在 $p=0$ 处。
2. $p\to\infty$, in $\mathrm{Im}p>0$ plane, $f_l\to 1$.

证明简要说明：

1. $p\in\mathbb{R}$, 若 $f_l(p)=0$, 则 $f_l^*(p)=0$, $\phi_{lp}(r)$ 恒为零，而由 $\phi\xrightarrow{r\to 0}j_l(pr)\to\frac{(pr)^{l+1}}{(2l+1)!!}$，除非 $p=0$, ϕ 不能恒为 0.
2. 前一章的结果可以推广到复平面。
3. 一个推论：对于确定的 l, $f_l(p)$ 在 $\mathrm{Im}p>0$ 平面只有有限的零点，即有有限个束缚态。(对于 $p=0$ 点需特殊考虑)
($\exists p_0>0$, s.t. $|p|>p_0$, $f_l(p)$ 无零点。再由解析函数性质，有限区域的解析函数不可能有有限多的零点。)

Levinson 定理

对于球对称势 (满足我们要求的)，相移除了下面的例外情形外满足

$$\delta_l(0)-\delta_l(\infty)=n_l\pi$$

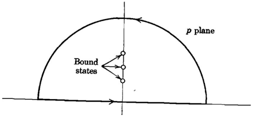
n_l 是束缚态的个数。
一个例外情况是，$l=0$ 且 $\boldsymbol{f}_0(0)=0$ 时，

$$\delta_l(0)-\delta_l(\infty)=(n_0+\frac{1}{2})\pi$$

证明简要说明 ($p\neq 0$): 主要是考虑上半平面圈积分，

$$I=\oint d\ln \boldsymbol{f}_l(p)=\oint dp\frac{\dot{\boldsymbol{f}}_l(p)}{\boldsymbol{f}_l(p)}=2\pi i n_l,$$

又由在 $p\in\mathbb{R}$, $(p>0)$, $\ln \boldsymbol{f}_l(p)=\ln|\boldsymbol{f}_l(p)|-i\delta_l(p)$,
$\boldsymbol{f}_l(-p)=\boldsymbol{f}_l^*(p)$, $\ln \boldsymbol{f}_l(-p)=\ln|\boldsymbol{f}_l(p)|+i\delta_l(p)$



$$I=\oint d\ln \boldsymbol{f}_l(p)=-2i\int_0^\infty d\delta(p)=2i[\delta(0)-\delta(\infty)]$$

阈 $(p=0)$ 附近的行为

分波振幅:

$$f_l(p) = \frac{\mathbf{s}_l(p)-1}{2ip} = \frac{\boldsymbol{f}_l(-p)-\boldsymbol{f}_l(p)}{2ip\boldsymbol{f}_l(p)} = \frac{-1}{p^2\boldsymbol{f}_l(p)}\int_0^\infty dr\hat{j}_l(pr)\,U(r)\phi_{l,p}(r)$$
$$= -\frac{1}{p^2}\int_0^\infty dr\hat{j}_l(pr)\,U(r)\psi_{l,p}(r), \quad \psi_{l,p}(r) = \phi_{l,p}(r)/\boldsymbol{f}_l(p)$$

利用 $|\hat{j}_l(pr)|, |\phi_{l,p}(r)| \leq \text{const}\left(\frac{pr}{1+pr}\right)^{l+1}$, 若 $\boldsymbol{f}_l(0)\neq 0$, 在 $p=0$ 邻域

$$|f_l(p)| \leq \frac{\text{const}}{\boldsymbol{f}_l(0)}\frac{1}{p^2}\int_0^\infty dr|U(r)|\left(\frac{pr}{1+pr}\right)^{2l+2}$$

对于 e 指数压低的势，分母 $(1+pr)^{2l+2}\to 1$ 可以忽略，$\boldsymbol{f}_l(p)$ 在零点处解析，$f_l(p) = O(p^{2l})$, $p\to 0$,

$$f_l(p) = -a_l p^{2l} + b_l p^{2l+1} + \ldots$$

a_l 有限的 (也有可能是 0) 常数，散射长度 scattering length.

$V(r) = O(\frac{1}{r^\nu})$, $(r \to \infty)$, tail 型

- 当 $l < (\nu - 3)/2$ 时，积分中分母 $1 + pr \to 1$ 上面积分收敛，

$$f_l(p) = O(p^{2l}), \quad [p \to 0, l < (\nu - 3)/2]$$

- 若 $l > (\nu - 3)/2$, 分母 $(1 + pr)$ 需保留，积分后

$$f_l(p) = O(p^{\nu - 3}), \quad [p \to 0, l > (\nu - 3)/2]$$

在 $p = 0$ 处解析行为未知，不一定能级数展开。

阈 ($p=0$) 附近的行为

下面考虑在 $p=0$ 处解析可以进行展开的情形，主要是 e 指数压低的势。引入分波振幅的 K 矩阵表示:

$$\mathbf{s}_l(p) = \frac{1+ik_l(p)}{1-ik_l(p)}$$

其中 $p>0$, $k_l(p)$ 实的。$\mathbf{s}_l(p)$ 自动幺正。

- 可以反解出

$$k_l(p) = i\frac{1-\mathbf{s}_l(p)}{1+\mathbf{s}_l(p)} = \tan\delta_l(p)$$

  除 $\mathbf{s}_l(p)=-1$ 的点以外，$k_l(p)$ 在 $\mathbf{s}_l(p)$ 解析的点处解析，特别的在 $p=0$ 处解析。
- 解析延拓至 $-p$, $p>0$, 由 $\mathbf{s}_l(p)=\boldsymbol{f}_l(-p)/\boldsymbol{f}_l(p)$, $\mathbf{s}_l(-p)=1/\mathbf{s}_l(p)$, $k_l(-p)=-k_l(p)$, 奇函数。
- $p\to 0$, 由 $\delta_l(p)\to -a_l p^{2l+1}$, $k_l=\tan\delta_l$, $k_l(p)\xrightarrow{p\to 0} -a_l p^{2l+1}$.
- k_l/p^{2l+1} 关于 p 偶函数:

$$\frac{p^{2l+1}}{k_l(p)} = p^{2l+1}\cot\delta_l(p) = -\frac{1}{a_l}+\frac{r_l}{2}p^2+O(p^4)$$

Effective range expansion:

$$\frac{p^{2l+1}}{k_l(p)} = p^{2l+1}\cot\delta_l(p) = -\frac{1}{a_l} + \frac{r_l}{2}p^2 + O(p^4)$$

对于 $l = 0$, r_0 近似的可以看成势的有效的力程。只取前两项则称之为有效力程近似 Effective range approximation。$n - p$ 散射中到 $10MeV$ 以下，Effective range approximation 近似的比较好。

Remarks:

对于 $1/r^\nu$ tail 型势, s_l, $f_l(p)$, $k_l(p)$ 一般在 $p = 0$ 含有支点, 将不能关于 p^2 进行的 effective range expansion，例如 $1/r^4$tail,

$$p\cot\delta_0(p) = \frac{-1}{a_0} + bp + cp^2\ln p + O(p^2)$$

$f_l(p)$ 在阈处的零点

$p=0$ 时，径向方程：

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}-U(r)\right]y(r)=0,$$

$r\rightarrow 0$ 和 $r\rightarrow\infty$, $\frac{l(l+1)}{r^2}$ 主导

- $r\rightarrow 0$, $y(r)\sim r^{l+1}$
- $r\rightarrow\infty$, $y(r)\sim 1/r^l$.
- 对于 $l=0$, $r\rightarrow\infty$, $y\sim 1/r^0$, 不可归一，不是束缚态。
- 对于 $l>0$, 则可以是束缚态。

只有可能对特殊的势满足。

是否一个 $p=0$ 处的束缚态解对应一个 $\boldsymbol{f}_l(p)$ 的零点?

- 选择解的形式：(自由时候两个独立解 r^{l+1}, 和 r^{-l})$r\to 0$,

$$\tilde{j}_l(r)\equiv\frac{\hat{j}_l(pr)}{p^{l+1}}\to\frac{r^{l+1}}{(2l+1)!!},\quad \tilde{n}_l(r)\equiv p^l\hat{n}_l(pr)\sim\frac{1}{r^l},$$

- 有相互作用时,

$$(r\to 0),\quad \tilde{\phi}_{l,p}(r)\equiv\frac{\phi_{l,p}(r)}{p^{l+1}}\sim r^{l+1},$$

$$(r\to\infty),\quad \tilde{\chi}^+_{l,p}(r)\equiv p^l\chi^+_{l,p}\sim 1/r^l,\quad \tilde{\chi}^-_{l,p}(r)\equiv\chi^-_{l,p}/p^{l+1}\sim r^{l+1}$$

$$\boldsymbol{f}_l(p)=\frac{1}{p}W(\chi^+_{lp},\phi_{lp})=W(\tilde{\chi}^+_{lp},\tilde{\phi}_{lp})$$

- 只有特殊的势下，当 $\tilde{\chi}^+_{l,p=0}\sim\tilde{\phi}_{l,0}$ 时，$\boldsymbol{f}_l(0)=0$, 当 $l>0$ 时，$\tilde{\phi}_{l,p}$ 确实是束缚态。$l=0$, 不可归一化。

下面看 $f_l(p)$ 在 0 点附近的如何趋于 0 的。考虑 e 指数衰减势，$p=0$ 处解析，可以在积分内级数展开

$$
\begin{aligned}
f_l(p) =& 1+\frac{\lambda}{p}\int_0^\infty dr'\hat{h}_l^+(pr')U(r')\phi_{l,p}(r') \\
=& 1+\frac{1}{p}\int_0^\infty dr'\hat{n}_l^+(pr')U(r')\phi_{l,p}(r')+i\frac{1}{p}\int_0^\infty dr'\hat{j}_l^+(pr')U(r')\phi_{l,p}(r') \\
\xrightarrow{p\to 0}& 1+[\alpha_l+\beta_l p^2+O(p^4)]+i[\gamma_l p^{2l+1}+O(p^{2l+3}]
\end{aligned}
$$

注意到 $\hat{j}_l(r)$, $\hat{n}_l(r)$,$\phi_{l,p}(r)$ 是实的，所以 $\alpha_l,\beta_l,\gamma_l$ 都是实的。其中用到

$\hat{j}_l(pr)\sim(pr)^{l+1}(\sum_{n=0}\alpha_n p^{2n})$,$\hat{n}_l(pr)\sim 1/(pr)^l(\sum_{n=0}\alpha_n p^{2n})$,
$\phi_{lp}(r)\sim(pr)^{l+1}$, $p\to 0$. 利用 $f_l(p=0)=0$, $\alpha_l=-1$:

$$
f_l(p)=[\beta_l p^2+O(p^4)]+i[\gamma_l p^{2l+1}+O(p^{2l+3})]
$$

所以

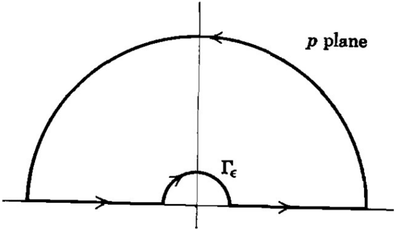
$$
\begin{aligned}
&l=0 \quad f_0(p)=i\gamma_l p+O(p^2), \\
&l>0 \quad f_l(p)=\beta p^2+O(p^3 \text{ or } p^4)
\end{aligned}
$$

$l=0$ 是单根，而 $l>0$ 是二重根。

继续 Levinson 定理：

$$I = \oint d\ln \boldsymbol{f}_l(p) = \oint dp \frac{\dot{\boldsymbol{f}}_l(p)}{\boldsymbol{f}_l(p)} = 2\pi i n_l(\mathrm{Im} p > 0),$$

积分的环路变为:



$$\begin{aligned} I =& -2i\int_0^\infty d\delta(p) = 2i[\delta(0)-\delta(\infty)] + \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon} dp\frac{\dot{\boldsymbol{f}}_l(p)}{\boldsymbol{f}_l(p)} \\ =& 2i[\delta(0)-\delta(\infty)] + \begin{cases} -\pi i & [l=0] \\ -2\pi i & [l>0] \end{cases} \end{aligned}$$

$l=0$, $p=0$ 不是束缚态，$l>0$,$p=0$ 是束缚态：

$$\delta(0)-\delta(\infty) = \begin{cases} (n_0+\frac{1}{2})\pi & [l=0] \\ n_l\pi & [l>0] \end{cases}$$

分波振幅 f_l 在 $\boldsymbol{f}_l(p=0)=0$ 时的阈处的行为。

$$f_l(p)=\frac{\mathbf{s}_l(p)-1}{2ip}=\frac{\boldsymbol{f}_l(-p)-\boldsymbol{f}_l(p)}{2ip\boldsymbol{f}_l(p)}=\frac{-1}{p^2\boldsymbol{f}_l(p)}\int_0^\infty dr\hat{j}_l(pr)\,U(r)\phi_{l,p}(r)$$

- 当 $\boldsymbol{f}_l(0)\neq 0$ 时，我们前面得到 $f_l(p)=-a_lp^{2l}+O(p^{2l+1})$.
- $l=0$, 当 $\boldsymbol{f}_0(0)=0$ 时，$\boldsymbol{f}_0(p)\sim i\gamma p$, $j_0(pr)\sim p$, $\phi_{l,p}\sim p$, 所以

$$f_0(p)=i\frac{a_0}{p}+O(1),\quad a_0\in\mathbb{R}$$

  也可由 Levinson 定理: 此时，$\delta_0(0)=\pi/2(\mod\pi)$,
  $f_0(p)=\frac{1}{p}\exp(i\delta_0)\sin\delta_0\rightarrow i\infty$, 截面 $\sigma_0=4\pi|f_0|^2\rightarrow\infty$.
- $l>0$, $\boldsymbol{f}_l(p)\sim p^2$

$$f_l(p)=a_lp^{2l-2}+O(p^{2l-1})$$

  与前面相比幂次减少两次。

Summary

- 束缚态：$f_l(p)$ 的一阶零点，$\mathrm{s}_l(p)$ 的一阶极点。(page 64)
- Jost 函数两个性质 (page 69)
  1. Jost 函数不能在实轴上有零点，除非在 $p=0$ 处。
  2. $p\to\infty$, in $\mathrm{Im}p>0$ plane, $f_l\to 1$.
- Levinson 定理: (page 70) 球对称情形，

  $$\delta_l(0)-\delta_l(\infty)=n_l\pi$$

  n_l 是束缚态的个数。
  一个例外情况是，$l=0$ 且 $f_0(0)=0$ 时，

  $$\delta_l(0)-\delta_l(\infty)=(n_0+\frac{1}{2})\pi$$

- s_l 的 K 矩阵参数化 (pg.73)：$\mathrm{s}_l(p)=\frac{1+ik_l(p)}{1-ik_l(p)}$, $k_l(p)$ 实的，$k_l(p)=\tan\delta_l(p)$。
- $p\in\mathbb{R}$, $\mathrm{s}_l(-p)=1/\mathrm{s}_l(p)$。

对 $r\to\infty$, e 指数压低的势

- 阈附近行为: $f_l(0)\neq 0$ 时 (pg.71),
  $f_l(p) = -a_l p^{2l} + b_l p^{2l+1} + \ldots$
  有效力程 effective range 展开 (pg. 74)

$$\frac{p^{2l+1}}{k_l(p)} = p^{2l+1}\cot\delta_l(p) = -\frac{1}{a_l} + \frac{r_l}{2}p^2 + O(p^4)$$

- 若 $f_l(p=0)=0$ 处解性质：(pg. 75)
  $l>0$ 时, 可以归一，是束缚态;
  $l=0$ 时，解不可归一，不是束缚态。
- $f_l(p=0)=0$, 在 $p=0$ 展开: (pg.77)

$$l=0 \quad f_0(p) = i\gamma_l p + O(p^2),$$
$$l>0 \quad f_l(p) = \beta p^2 + O(p^3 \text{ or } p^4)$$

- 此时分波振幅 f_l 在 $p=0$ 展开：(pg.79)

$$l=0, \quad f_0(p) = i\frac{a_0}{p} + O(1), \quad a_0\in\mathbb{R}$$
$$l>0, \quad f_l(p) = a_l p^{2l-2} + O(p^{2l-1})$$

$l=0$ 时可以看成散射长度发散。