An introduction to Relativistic BChPT

Deliang Yao 2022.12

part IV: Renormalization and power counting

重整化与幂次计阶

当计算圈图时，会出现紫外发散(UV)；当重子以内线出现在圈图中时，会出现破坏手征幂次律的有限项(PCB)。在相对论重子手征微扰论中，需要寻找合适的重整化方案来处理发散项和PCB项。

1、power counting rule in BChPT

费曼图：N_L个独立的圈，每个圈积分的阶为$O(p^4)$ $\quad \frac{1}{i}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}$

I_ϕ条介子内线 每条介子内线的阶为$O(p^{-2})$ $\quad \frac{1}{k^2-m_\phi^2}$

I_B条重子内线 每条重子内线的阶为$O(p^{-1})$ $\quad \frac{1}{\not k-m_B}$

$N_\phi^{(2k)}$个阶为$O(p^{2k})$的顶点，来自于介子拉氏量 $\mathcal{L}_{GB}=\mathcal{L}_{GB}^{(2)}+\mathcal{L}_{GB}^{(4)}+\mathcal{L}_{GB}^{(6)}+\cdots$

$N_B^{(k)}$个阶为$O(p^k)$的顶点，来自于重子拉氏量 $\mathcal{L}_{B\phi}=\mathcal{L}_{B\phi}^{(1)}+\mathcal{L}_{B\phi}^{(2)}+\mathcal{L}_{B\phi}^{(3)}+\cdots$

则该费曼图的阶为

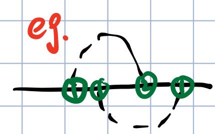
$$D=4N_L-2I_\phi-I_B+\sum_{k=1}^{\infty}N_\phi^{(2k)}(2k)+\sum_{k=1}^{\infty}N_B^{(k)}k$$

看图数阶方便

拓扑学恒等式：$N_L=I_\phi+I_N-N_\phi-N_B+1$

$N_\phi=\sum_{k=1}^{\infty}N_\phi^{(2k)}$ 介子顶点总数 $\quad$ B顶点总数 $N_B=\sum_{k=1}^{\infty}N_B^{(k)}$

eg.



$\Rightarrow D=2\times4-2\times2-3\times1+3\times1+1\times2=6$

把介子内线消掉

$$D=4N_L-2\left[N_L-I_B+\sum_{k=1}^{\infty}N_\phi^{(2k)}+\sum_{k=1}^{\infty}N_B^{(k)}-1\right]+\sum_{k=1}^{\infty}N_\phi^{(2k)}(2k)+\sum_{k=1}^{\infty}N_B^{(k)}k$$

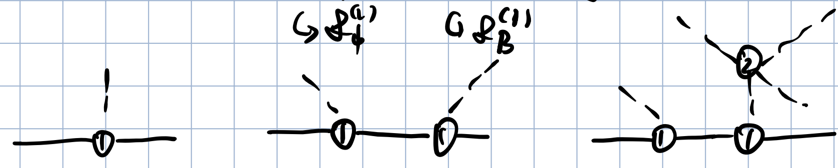
$$=2N_L+I_B+\sum_{k=1}^{\infty}N_\phi^{(2k)}(2k-2)+\sum_{k=1}^{\infty}N_B^{(k)}(k-2)$$

单重子过程：$N_B=I_B+1$ (两点夹一内线)

$$D=1+2N_L+\sum_{k=1}^{\infty}2(k-1)N_\phi^{(2k)}+\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)N_B^{(k)}$$

给定阶找图结构 以及所需拉氏量

① $D=1$，$N_L=0$ 没有圈　$j=k=1$，$N_\phi^{(2)}$ 任意，$N_B^{(1)}$ 任意



$g_{\pi NN}$　$N_\phi^{(2)}=0$，$N_B^{(1)}=1$　　$\pi N\to\pi N$　$N_\phi^{(2)}=0$，$N_B^{(1)}=2$　　$\pi\pi N\to\pi\pi N$　$N_\phi^{(2)}=1$，$N_B^{(1)}=2$

② $D=2$．$N_L=0$ 没有圈，⇒ $N_\phi^{(2)}$ 任意　$N_B^{(1)}$ 任意，$N_B^{(2)}=1$

③ $D=3$　$N_L=0$ 无圈　$N_\phi^{(2)}$ 任意，$N_\phi^{(4)}=1$，$N_B^{(1)}$ 任意

$N_\phi^{(2)}$ 任意　$N_\phi^{(4)}=0$　$N_B^{(1)}$ 任意，$N_B^{(2)}=2$，$N_B^{(3)}=0$

$N_\phi^{(2)}$ 任意　$N_\phi^{(4)}=0$　$N_B^{(1)}$ 任意，$N_B^{(2)}=0$，$N_B^{(3)}=1$

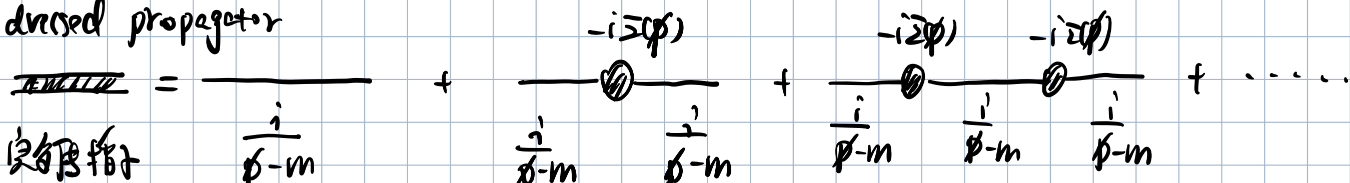
$N_L=1$ 单圈　$N_\phi^{(2)}$ 任意　$N_\phi^{(4)}=0$　$N_B^{(1)}$ 任意．$N_B^{(2)}=0$，$N_B^{(3)}=0$

$O(p^3)$ 阶单圈图只需要用到 $\mathcal{L}_\phi^{(2)}$ 和 $\mathcal{L}_B^{(1)}$ 领头阶拉氏量

2 核子质量的重整化 → PCB问题的出现

自能函数 (1PI图) $\equiv -i\Sigma(\not p)$

dressed propagator



完全传播子 $\equiv iS(\not p)$

裸传播子 $\equiv iS_0(\not p)$

亦即：

$$iS(\not p)=\frac{i}{\not p-m}+\frac{i}{\not p-m}[-i\Sigma(\not p)]\frac{i}{\not p-m}+\frac{i}{\not p-m}[-i\Sigma(\not p)]\frac{i}{\not p-m}[-i\Sigma(\not p)]\frac{i}{\not p-m}+\cdots$$

$$=\frac{i}{\not p-m}\left\{1+\frac{\Sigma(\not p)}{\not p-m}+\left[\frac{\Sigma(\not p)}{\not p-m}\right]^2+\cdots\right\}$$

$$=\frac{i}{\not p-m}\,\frac{1}{1-\frac{\Sigma(\not p)}{\not p-m}}$$

$\Sigma(\not p)$ 是高阶修正，是小量

$$= \frac{i}{\not p - m - \Sigma(\not p)}$$

物理质量定义为完全传播子的极点

$$iS(\not p) = \frac{i}{\not p - m - [\Sigma(m_N) + (\not p - m_N)\Sigma'(\not p)|_{\not p = m_N}]}$$

$$\Sigma(\not p) = \Sigma(m_N) + (\not p - m_N)\Sigma'(\not p)|_{\not p = m_N} + \cdots$$

$$= \frac{i}{\not p - \underbrace{[m + \Sigma(m_N)]}_{\equiv\, m_N} + (\not p - m_N)\Sigma'(\not p)|_{\not p = m_N}}$$

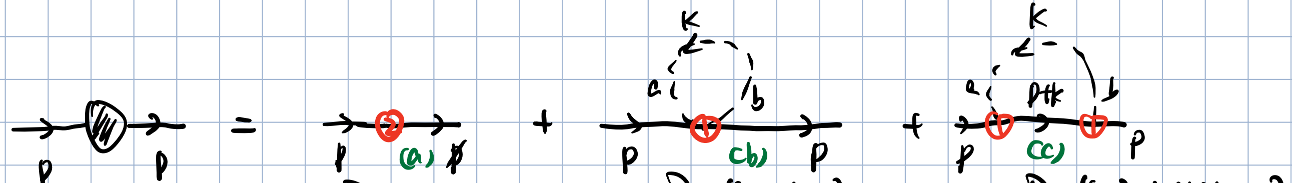
$$= \frac{i}{(\not p - m_N)(1 + \Sigma'(\not p)|_{\not p = m_N})}$$

$$= \frac{i Z_N}{\not p - m_N}$$

核子质量： $m_N = m + \Sigma(m_N)$

核子波函数重整化因子： $Z_N = [1 + \Sigma'(\not p)|_{\not p = m}]^{-1} \doteq 1 - \Sigma'(\not p)|_{\not p = m_N}$

⇒ 核子质量的单圈修正 需要计算 核子单圈自能

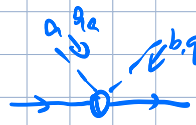


up to $O(p^3)$ = $D=2$, $O(p^2)$ + $D = 4-2+1 = 3$, $O(p^3)$ + $D = 4-2-1+1+1 = 3$, $O(p^3)$

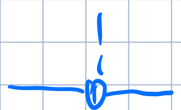
费曼规则回顾:

 $= 4 i c_1 m_\pi^2$

$\downarrow$ $O(p^2)$ LEC



$= \frac{i}{4F^2}\epsilon_{abc}\tau_c(\not q_a - \not q_b)$

 $= -\frac{g}{2F}\not q_a \gamma^5 \tau_a$

图(a): $-i\Sigma_a(\not p) = 4iC_1 m_\chi^2$

关于ab对称

图(b): $$-i\Sigma_b(\not p) = \int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{4F^2}\epsilon_{abc}\tau_c[\not k-(-\not k)]\frac{i\delta_{ab}}{k^2-m_\chi^2} = 0$$

关于ab反对称

图(c): $$-i\Sigma_c(\not p) = \int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\left[-\frac{g}{2F}(-\not k)\gamma_5\tau_b\right]\frac{i}{(\not p+\not k)-m}\frac{i\delta_{ab}}{k^2-m_\chi^2}\left[-\frac{g}{2F}\not k\gamma_5\tau_a\right]$$

$\tau_b\tau_a\delta_{ab}=\tau_a\tau_a=3$

$$= \frac{3g^2}{4F^2}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\not k\gamma_5[(\not p+\not k)+m]\not k\gamma^5}{[(p+k)^2-m^2][k^2-m_\chi^2]}$$

分子 $= \not k\gamma_5[(\not p+\not k)+m]\not k\gamma^5$

$= \not k[(\not p+\not k)-m]\not k$

$= \not k\not p\not k + k^2\not k - k^2 m$

$= -\not p k^2 + 2k\cdot p\,\not k + k^2\not k - k^2 m$

$= -(\not p+m)[k^2-m_\chi^2+m_\chi^2] + \{[(k+p)^2-m^2] + (m^2-p^2)\}\not k$

$$-i\Sigma_c(\not p) = \frac{g^2}{4F^2}\left\{-(\not p+m)\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(p+k)^2-m^2} + \int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\not k}{k^2-m_\chi^2} - (\not p+m)m_\chi^2\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(p+k)^2-m^2][k^2-m_\chi^2]}\right.$$
$$\left. + (m^2-p^2)\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{\not k}{[(p+k)^2-m^2][k^2-m_\chi^2]}\right\}$$

定义积分: $$A_0(m_1^2) = \frac{1}{i}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{k^2-m_1^2}$$

$$B_0(p^2,m_1^2,m_2^2) = \frac{1}{i}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{[k^2-m_1^2][(k+p)^2-m_2^2]}$$

$$B^\mu(p^2,m_1^2,m_2^2) = \frac{1}{i}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{k^\mu}{[k^2-m_1^2][(k+p)^2-m_2^2]} = p^\mu B_1(p^2,m_1^2,m_2^2)$$

两边乘 p_μ 并利用 $k\cdot p = \frac{1}{2}\{[(p+k)^2-m_2^2]-(k^2-m_1^2)+(m_2^2-m_1^2-p^2)\}$

得 $\frac{1}{2}\{A_0(m_1^2)-A_0(m_2^2)+(m_2^2-m_1^2-p^2)B_0(p^2,m_1^2,m_2^2)\} = p^2 B_1(p^2,m_1^2,m_2^2)$

故基本的函数只有 A_0, B_0 函数 (Passerino-Veltmen Reduction)

故 $-i\Sigma_c(\not p) = \frac{3g^2}{4F^2}\Big\{-(\not p+m)\, iA_0(m^2) + 0 - (\not p+m)m_\pi^2\, iB_0(p^2, m_\pi^2, m^2)$

$\qquad + (m^2-p^2)\, i\not p\, B_1(p^2, m_\pi^2, m^2)\Big\}$

△ $\Sigma_c(\not p) = \frac{3g^2}{4F^2}\Big\{(\not p+m)A_0(m^2) + (\not p+m)m_\pi^2 B_0(p^2, m_\pi^2, m^2)$

$\qquad + \frac{p^2-m^2}{2p^2}\not p\,[A_0(m_\pi^2) - A_0(m^2) + (m^2-m_\pi^2-p^2)B_0(p^2, m_\pi^2, m^2)]\Big\}$

最终核子质量: (练习: 计算核子波函数重整化因子 Z_N)

$$m_N = m + \Sigma(\not p = m_N)$$

$$= m + \Sigma_a(m_N) + \Sigma_b(m_N) + \Sigma_c(m_N)$$

$$= m - \underbrace{4c_1 m_\pi^2}_{O(p^2)} + \frac{3g^2 m_N}{2F^2}\underbrace{\{A_0(m_N^2) + m_\pi^2 B_0(m_N^2, m_\pi^2, m_N^2)\}}_{O(p^3)\text{阶 (naive power counting)}}$$

标量积分的具体表达式 (维数正规化 DR + $\widetilde{MS}$ 减除方案 ($\overline{MS}-1$)) 参见 S. Scherer & M. R. Schindler《A Primer for chiral perturbation theory》 P105, 3.4.7节

$$A_0(m_N^2) = -\frac{m_N^2}{16\pi^2}\left\{R + \ln\frac{m_N^2}{\mu^2}\right\}, \qquad R = \underbrace{\underbrace{\frac{2}{d-4} - [\ln(4\pi) - \gamma_E]}_{\overline{MS}} - 1}_{\widetilde{MS} = \overline{MS} - 1}$$

欧拉常数 (γ_E)

$$B_0(p^2, m_\pi^2, m_N^2) = -\frac{1}{16\pi^2}\left\{R + \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - 1 + \frac{p^2-m^2-m_\pi^2}{p^2}\ln\left(\frac{m_\pi}{m_N}\right) + \frac{2mm_\pi}{p^2}F(\Omega)\right\}$$

其中: $F(\Omega) = \begin{cases} \sqrt{\Omega^2-1}\,\ln(-\Omega - \sqrt{\Omega^2-1}) & \Omega \le -1 \\ \sqrt{1-\Omega^2}\,\arccos(-\Omega) & -1 \le \Omega \le 1 \\ \sqrt{\Omega^2-1}\,\ln(\Omega + \sqrt{\Omega^2-1}) - i\pi\sqrt{\Omega^2-1} & \Omega \ge 1 \end{cases} \qquad \Omega = \frac{p^2-m^2-m_\pi^2}{2mm_\pi}$

对于核子质量, 我们有 $p^2 = m_N^2$, 即 $-1 \le \Omega \le 1$ ($\Omega = -\frac{m_\pi}{2m}$), 将标量函数代入得

核子质量表达式

$$m_N = m - 4c_1 m_\pi^2 + \frac{3g^2 m}{2F^2}\Big\{-\frac{m^2}{16\pi^2}[\underbrace{R}_{\text{UV发散}} + \ln\frac{m^2}{\mu^2}] - \frac{m_\pi^2}{16\pi^2}[\underbrace{R}_{\text{UV发散}} + \ln\frac{m^2}{\mu^2} - 1 - \frac{m_\pi^2}{m^2}\ln\frac{m_\pi}{m}$$

$$+\frac{2m_\pi}{m}\sqrt{1-\frac{m_\pi^2}{4m^2}}\arccos\frac{m_\pi}{2m}]\}$$

① 紫外发散处理

$$m = m^r + \frac{\beta_m R}{16\pi^2F^2} \xrightarrow{O(p^0)\text{发散}} \beta_m = \frac{3}{2}m^3g^2$$

$$c_1 = c_1^r + \frac{\beta_{c_1} R}{16\pi^2F^2} \xrightarrow{O(p^2)\text{发散}} \beta_{c_1} = -\frac{3}{8}mg^2$$

m^r. c_1^r 称为UV重整化后的质量与低能常数，是有限的

② 重整化标度一般取成核子质量 $\mu=m_N$ $\Rightarrow$ $\ln\frac{m^2}{\mu^2}=0$

μ取不同值时，m^r, c_1^r的值不同，说明它们是标度依赖的

③ 幂次律破坏项 (PCB项)

DR+$\overline{\mathrm{MS}}$ 方案下的核子质量为

O(p^0) > O(p^2) > O(p^3) ✓

$$m_N = m^r - 4c_1^r m_\pi^2 - \frac{3g^2m}{32\pi^2F^2}\Big\{m^2\ln\frac{m^2}{\mu^2} + m_\pi^2\Big[\ln\frac{m_\pi^2}{\mu^2}-1\Big] + \frac{2m_\pi^3}{m}\sqrt{1-\frac{m_\pi^2}{4m^2}}\arccos\frac{m_\pi}{2m} - \frac{m_\pi^4}{m^2}\ln\frac{m_\pi}{m}\Big\}$$

naive power counting

O(p^4)

Remarks:

▲ 所谓O(p^0)和O(p^2)的项即为PCB项，它们的贡献大比预期的O(p^3)阶贡献要大

▲ 不破坏幂次计数的项，除了O(p^3)外，还包含O(p^4)及更高的幂次项

▲ 为了解决PCB问题，目前流行的方法有：
- 重重子方法 heavy Baryon approach
- 红外正规化方案 Infrared Regularization prescription
- EOMS方案 Extended-on-mass-shell scheme

3、PCB问题的解决方法.

- PCB问题的根源是因为树以内线的对寸标度在闭圈里面，标准假设在单圈相阶下成立。
- PCB项来源于圈积分的大动量贡献，但我们不能引入截断，即不能采用反常相关系数化方案。否则便会破坏local的抵消项因子。也就是说，仍需采用DR，这是所有解决办法必须遵守的.
- 现以耦合函数中的标量积分来阐述各种解决办法的基本思想

$$\frac{1}{i}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{[(k+p)^2-m_N^2][k^2-m_\pi^2]} \equiv H \quad (\text{即 } B_0\text{函数})$$

$\boxed{\text{1) 重重子方案}}$

思想：上面积分中第一个分母来源于重子传播子.

$$G(k+p) = \frac{1}{(\slashed{k}+\slashed{p})-m}$$

认为k是小量，则可以对积分函数做小量展开

$$= \frac{(\slashed{k}+\slashed{p})+m}{(k+p)^2-m^2} = \frac{\slashed{k}+\slashed{p}+m}{2k\cdot p+p^2-m^2+k^2}$$

$$= \frac{\slashed{k}+\slashed{p}+m}{(2k\cdot p+p^2-m^2)\left(1+\frac{k^2}{2k\cdot p+p^2-m^2}\right)}$$

$$= \frac{\slashed{k}+\slashed{p}+m}{2k\cdot p+p^2-m^2}\left(1-\frac{k^2}{2k\cdot p+p^2-m^2}+\cdots\right)$$

$$= \frac{\slashed{p}+m}{2k\cdot p+p^2-m^2} + \frac{1}{2k\cdot p+p^2-m^2}\left(\slashed{k}-\frac{k^2(\slashed{p}+m)}{2k\cdot p+p^2-m^2}\right)+\cdots$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} p &= m(1,0,0,0) \\ &= mv \end{aligned}}$$

$$= \frac{1+\slashed{v}}{2}\frac{1}{v\cdot k} + \frac{1}{2v\cdot k}\frac{1}{m}\left[\slashed{k}-\frac{1+\slashed{v}}{2}\frac{k^2}{v\cdot k}\right]+\cdots$$

$$\sim k^{-1}\left(\frac{1}{m}\right)^0 \qquad\qquad \sim k^0\left(\frac{1}{m}\right)^1$$

Remarks:

Remark:

1) 该展开为手征修与 $1/m$ 的双重展开

2) 重子质量只出现在分母, 以 hard scale 的形式出现

3) 目前手征微扰, 手征修正只取领头展开项, 而抛弃了无穷多项

4) 该展开可以在拉氏量层次实现 ⇒ 重重子手征微扰理论 (HBChPT)

图(a)

$p^\mu = m v^\mu + \ell^\mu$ 小量　　$\not p = m\not v + \not \ell$

$$\frac{1}{i}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{(\not k+\not p)-m}\frac{1}{k^2-m_\pi^2}\xrightarrow[1/m\text{ 展开}]{\text{手征展开}}\frac{1+\not v}{2}\frac{1}{i}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{1}{v\cdot k+v\cdot\ell}\frac{1}{k^2-m_\pi^2}$$ (练习)

$D = 4-1-2 = 1$

$$= \frac{1+\not v}{2}\left\{4L\,v\cdot\ell - \frac{v\cdot\ell}{8\pi^2}\left[1-2\ln\frac{m_\pi}{\mu}\right] - \frac{1}{4\pi}\sqrt{m_\pi^2-(v\cdot\ell)^2}\arccos\frac{v\cdot\ell}{m_\pi}\right\}$$

$\boxed{L = \frac{1}{32\pi^2 R}}$　　Bernard, Kaiser, Meissner Int. J. Mod. Phys.

可以看出已经没有破坏项, 只有 $O(p^1)$, 满足 power counting

■ 利用重重子手征微扰计算得到的核子质量为:

$$m_N = m^r - 4c_1 m_\pi^2 - \frac{3g^2 m_\pi^3}{32\pi F^2}$$

图(a)　　图(c)

■ 拉氏量的非相对论展开

相对论　　$B = e^{-imv\cdot x}[H_v + h_v]$　　大分量 H_v, 小分量 h_v　　速度本征态　$\not v H = H$, $\not v h = -h$

$\mathcal{L}_B = \bar B^a D^{ab} B^b$ (上节课内容) $\dashrightarrow$ $\mathcal{L}_B = \bar H_v A H_v + \bar h_v B H_v + \bar H_v \gamma^0 B^\dagger \gamma^0 h_v - \bar h_v C h_v$

例如

$$\bar B(i\not\partial - m)B = [\bar H_v + \bar h_v]e^{+imv\cdot x}(i\not\partial - m)e^{-imv\cdot x}[H_v + h_v]$$

$$= \bar H_v(iv\cdot\partial)H_v - \bar h(iv\cdot\partial + 2m)h + \bar H i\not\partial^\perp h + \bar h i\not\partial^\perp H$$

① 组重子场, 静止, 给出我们需要的传播子　　$\not\partial^\perp = \not\partial - \not v(v\cdot\partial)$ … $\not\partial = \not v(v\cdot\partial) + \not\partial^\perp$

② 上面这些我们不需要的，积掉，且它含反粒子

$\mathcal{L}_B$ Relativistic

$$e^{i\Sigma} = \mathcal{N}'\int \mathcal{D}U\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}_{GB}} \int \mathcal{D}B\mathcal{D}\bar{B}\, e^{i\int d^4x\,[\bar{B}\mathcal{D}B + \bar{\eta}B + \bar{B}\eta]}$$

$$= \mathcal{N}'\int \mathcal{D}U\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}_{GB}} \int \mathcal{D}H_v \mathcal{D}\bar{H}_v \mathcal{D}h_v \mathcal{D}\bar{h}_v$$

$$\times e^{i\int d^4x\,[\bar{H}_v \mathcal{A} H_v + \bar{h}_v \mathcal{B} H_v + \bar{H}_v \gamma_0 \mathcal{B}^\dagger \gamma_0 h_v + \bar{h}_v C h_v + \bar{\rho} H_v + \bar{H}_v \rho + \bar{\sigma} h_v + \bar{h}_v \sigma]}$$

$$= \mathcal{N}''\int \mathcal{D}U\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}_{GB}} \int \mathcal{D}H_v \mathcal{D}\bar{H}_v\, e^{i\int d^4x\, \bar{H}_v[\mathcal{A} + (\gamma_0 \mathcal{B}^\dagger \gamma_0) C^{-1} \mathcal{B}] H_v}\, \Delta_h$$

$\mathcal{L}_B$ non-Relativistic

▲ $\Delta_h = \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\ln C\right)$ ~ a constant

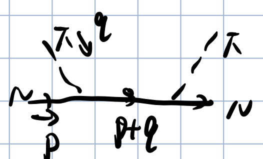
▲ C 中有反粒子. C^{-1} 则为反粒子倒数，对反粒子是正规的!!

反粒子倒数展开

■ 重粒子场论的不足之处

重粒子场论恢复了计数规律，但破坏了振幅的解析结构.

例: $\pi N \to \pi N$



相对论: 振幅 $\propto \dfrac{1}{(p+q)^2 - m_N^2} = \dfrac{1}{2p\cdot q + m_\pi^2}$ 在 $2p\cdot q = -m_\pi^2$ 处有极点.

非相对论: $\dfrac{1}{2p\cdot q - m_\pi^2} \xlongequal{p^\mu = m_N v^\mu} \dfrac{1}{2m_N v\cdot q - m_\pi^2} = \dfrac{1}{2m_N}\dfrac{1}{v\cdot q}\left(1 - \dfrac{m_\pi^2}{2m_N v\cdot q} + \cdots\right)$

极点在 $2p\cdot q = -2m_N v\cdot q = 0$ 处

2) 红外正规化方案 (Infrared regularization prescription) IR

重新审视自能函数中的两点积分

$$\mathcal{H} = \frac{1}{i}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2]} \frac{1}{k^2 - m_\pi^2}$$

$$= \frac{1}{i}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\int_0^1 dz \frac{1}{[(k+zp)^2 - \mathcal{M}^2]^2}$$

$z[(k+p)^2 - m^2] + (1-z)(k^2 - m_\pi^2)$

$= z(k^2 + 2k\cdot p + p^2 - m^2) + (1-z)(k^2 - m_\pi^2)$

$= k^2 + z2k\cdot p + z(p^2 - m^2) + (1-z)(-m_\pi^2)$

$= (k+zp)^2 - z^2p^2 + z(p^2 - m^2) + (1-z)(-m_\pi^2)$

$= (k+zp)^2 - \mathcal{M}^2$

$p=0$
$q=2$

$$=\int_0^1 dz\,\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}(\mu^2)^{\frac{d}{2}-2}\frac{\Gamma(\cancel{\tfrac{d}{2}})\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\cancel{\Gamma(\tfrac{d}{2})}\cancel{\Gamma(2)}}$$

$$=(4\pi)^{-\frac{d}{2}}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})\int_0^1 dz\,(\mu^2)^{\frac{d}{2}-2}$$

$\mu^2 = z^2p^2 - z(p^2-m^2)+(1-z)m_\chi^2$

master integral

$$\frac{1}{i}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{(k^2)^p}{(k^2-\mu^2+i\epsilon)^q}=(-1)^{p-q}\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}(\mu^2)^{p+\frac{d}{2}-q}\frac{\Gamma(p+\frac{d}{2})\Gamma(q-p-\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(q)}$$

无量纲化

$$=\underbrace{(4\pi)^{-\frac{d}{2}}m^{d-4}\Gamma(2-\tfrac{d}{2})}_{R}\int_0^1 dz\,C^{\frac{d}{2}-2}$$

$$C=\frac{\mu^2}{m^2}=z^2-2\alpha\Omega z(1-z)+\alpha^2(1-z)^2$$

定义 $\Omega=\dfrac{p^2-m^2-m_\chi^2}{2m\,m_\chi}$　　$\alpha=\dfrac{m_\chi}{m}$

$\Uparrow$　　　　$\Uparrow$

$O(p^0)$　　$O(p^1)$

分析：① 当 $m_\chi\to 0$ 时，$\alpha\to 0$，$dz\,C^{\frac{d}{2}-2}\to dz\,z^{d-4}$，$d$ 小 时发散 $\Rightarrow$ 红外发散 Infrared

② 自能图没有PCB项，用 $(\mu^2)^{\frac{d}{2}-2}\xrightarrow{z\to 0\text{时}}$ 发散，不能被 Feynman 参数

可以整体做一个 Rescale：$p\to\epsilon p$，$m\to\epsilon m$，$m_\chi\to\epsilon m_\chi$

$(\mu^2)^{\frac{d}{2}-2}\to\epsilon^{d-4}(\mu^2)^{\frac{d}{2}-2}$　　当 $d<4$，$\epsilon\to 0$ 红外发散

③ 自能图不能整体 Rescale，但可以通过对积分参数 Rescale 来抽取类似项

令 $z=\alpha u$ 则

$$H=R\alpha^{d-3}\underbrace{\int_0^{\frac{1}{\alpha}}du\,D^{\frac{d}{2}-2}}_{\text{不发散}}\qquad D=1-2\Omega u+u^2+2\alpha u(\Omega u-1)+\alpha^2u^2$$

$\uparrow$
当 $d<3$

红外奇异部分：$I=\lim\limits_{\alpha\to 0}H=R\alpha^{d-3}\int_0^\infty du\,D^{\frac{d}{2}-2}=R\int_0^\infty dz\,C^{\frac{d}{2}-2}$　　无PCB项

$=\alpha^{d-3}\times(\alpha\text{ 的 Talor 级数})$

$=\boxed{\alpha^{d-3}}+\alpha^{d-4}+\alpha^{d-5}\ \cdots$

红外正规部分　$R=H-I=-R\int_1^\infty dz\,C^{\frac{d}{2}-2}$

$=\alpha$ 的 Talor 级数

$=\alpha^0+\alpha^1+\alpha^2+\cdots$

红外正规化方案：① 将红外正规部分去除，只保留满足PC的红外奇异部分。

② 红外正规部分是关于外腿动量的 Taylor 级数，可被抵消量修正的抵消项吸收，亦即重新定义耦合常数

③ 可以证明：红外奇异部分的第一项与多粒子分布得到的IS结果一致。

④ 上述关于两点函数的讨论可推广到任意多点函数。 $\int_0^1 \to \int_0^\infty$

$\boxed{\text{3) EOMS 方案}}$ Extended-on-mass-shell scheme

EOMS方案的核心是二次减除：即在MS方案中减除发散后，再把PCB项吸收到低能常数中

因此，寻找PCB项是EOMS方案的重点。

a. 提取 PCB 项的方法

$$H = \frac{1}{i}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{[(k+p)^2-m^2][k^2-m_\pi^2]}$$

将积分函数做手征展开，即 $\epsilon \sim p^2-m^2 \sim m_\pi$

$$= \frac{1}{i}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \sum_{l,j=0}^{\infty} \left\{ \frac{(p^2-m^2)^l (m_\pi^2)^j}{l!\,j!} \left[\left(\frac{1}{2p^2} p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}\right)^l \left(\frac{\partial}{\partial m_\pi^2}\right)^j \frac{1}{[(k+p)^2-m^2][k^2-m_\pi^2]} \right]_{p^2=m^2,\, m_\pi^2=0} \right\}$$

这里 $\frac{\partial}{\partial p^2} = \frac{\partial p_\mu}{\partial p^2}\frac{\partial}{\partial p_\mu} = \frac{1}{2p^\mu}\frac{\partial}{\partial p_\mu} = \frac{1}{2p^2} p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}$

交换积分求和顺序

$$H = \sum_{l,j=0}^{\infty} \frac{(p^2-m^2)^l (m_\pi^2)^j}{l!\,j!} \frac{1}{i}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \left[\left(\frac{1}{2p^2} p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu}\right)^l \left(\frac{\partial}{\partial m_\pi^2}\right)^j \frac{1}{[(k+p)^2-m^2][k^2-m_\pi^2]} \right]_{p^2=m^2,\, m_\pi^2=0}$$

为 Taylor 级数形式，故为红外正规部分，里面含有PCB项

$$= \frac{1}{i}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2+2k\cdot p)\,k^2}\Bigg|_{p^2=m^2} + O(q^1)$$

$\longrightarrow$ EOMS 名字的由来

$$= -\frac{1}{16\pi^2}\left[\ln\frac{m^2}{\mu^2}-1\right] + O(p')$$

④ 消除PCB项的办法

$$m_N = m^r - 4c_1^r m_\pi^2 - \frac{3g^2 m}{32\pi^2F^2}\Big\{ \underbrace{m^2\ln\frac{m^2}{\mu^2}}_{O(p)\ \mathrm{PCB}} + \underbrace{m_\pi^2\left[\ln\frac{m^2}{\mu^2}-1\right]}_{O(p^2)\ \mathrm{PCB}} + \underbrace{\frac{2m_\pi^3}{m}\sqrt{1-\frac{m_\pi^2}{4m^2}}\arccos\frac{m_\pi}{2m}}_{O(p^3)\ ✓} - \underbrace{\frac{m_\pi^4}{m^2}\ln\frac{m_\pi}{m}}_{O(p^4)}\Big\}$$

naive power counting

二次重整化：

$$\begin{cases} m^r = \hat{m} + \dfrac{\hat{\beta}_m m}{16\pi^2F^2} \\ c_1^r = \hat{c}_1 + \dfrac{\hat{\beta}_{c1} m}{16\pi^2F^2} \end{cases} \xrightarrow{\text{抵消PCB项}} \begin{cases} \hat{\beta}_m = \dfrac{3m^2g^2}{2}\ln\dfrac{m^2}{\mu^2} \\ \hat{\beta}_{c1} = \dfrac{3}{8}g^2\left(1-\ln\dfrac{m^2}{\mu^2}\right) \end{cases}$$

最终 $m_N = \hat{m} - 4\hat{c}_1 m_\pi^2 - \frac{3g^2 m}{32\pi^2F^2}\left\{\frac{2m_\pi^3}{m}\sqrt{1-\frac{m_\pi^2}{4m^2}}\arccos\frac{m_\pi}{2m} - \frac{m_\pi^4}{m}\ln\frac{m_\pi}{m}\right\}$

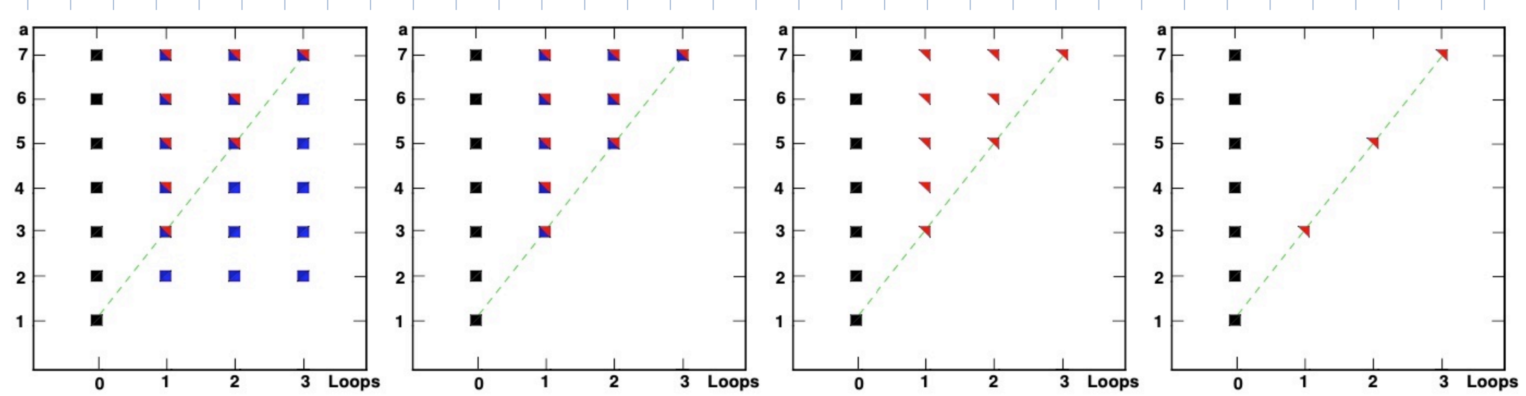
特点：① 恢复 power counting

② 保留原始解析性 <=> 只是重新定义低能常数（值由实验决定）

↓ 振幅分析、相移　↓ 手征外推

③ 一般表达，更好的收敛性

4) 总结



DR+$\overline{\mathrm{MS}}$　　EOMS　　IR　　HB