第三章　　格点 QCD

本章提要

- ☞ Grassmann 代数与相干态 (7)
- ☞ 格点上的费米子场 (8) 及其传播子 (9)
- ☞ 格点上的规范场 (10)
- ☞ Wilson 格点 QCD(11)

前一章中我们从路径积分表述出发，讨论了格点上的标量场理论。本章中，我们将引入格点量子色动力学 (格点 QCD)，这当然首先要介绍格点上的费米子场，然后再介绍格点上的规范场。格点上的费米子场有诸多的引入方法，相应地，也会产生不同版本的格点 QCD。本章中我们首先介绍 Wilson 格点 QCD。其他形式的格点 QCD 将在后续章节中讨论。

7　Grassmann 代数与相干态

¶ 旋量场描写的是费米子，它们与玻色子最大的区别是遵从泡利不相容原理。这意味着在正则量子化的理论体系中，我们必须要求它的产生湮灭算符满足反对易关系。如果采用路径积分量子化的方法，这要求旋量场的场变量必须能够反映出这个本质的区别。我们这里不想严格地去论述如何实现这一点，而只是指出结论：我们需要将描写费米子的旋量场变量在所谓的 Grassmann 数域中取值，而用于标量场的路径积分量子化的方法可以完全移植到旋量场。

所谓 Grassmann 代数，是指一些反对易的数构成的数域。它们的任何两个数之间是反对易的。也就是说，如果我们有两个 Grassmann 数：ξ_i 和 ξ_j，那么一定有：$\xi_i\xi_j = -\xi_j\xi_i$。

特别的，对于任意一个 Grassmann 数 ξ，我们一定有：$\xi^2 = \xi\xi = 0$。由于这个条件，一个依赖于 Grassmann 数 ξ 的函数只能具有如下简单的形式：$f(\xi) = f_0 + f_1\xi$。我们还可以定义函数对于 Grassmann 数的微分和积分：

$$\int d\xi\xi = \partial_\xi \xi = 1 \ , \quad \int d\xi = 0 \ , \tag{3.1}$$

这个约定再加上线性的要求就可以完全确定函数对于 Grassmann 数的微分与积分。量子场论中最为重要的一个 Grassmann 积分 (可能也是唯一一个) 是：

$$\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi e^{-\bar{\psi}_i M_{ij}\psi_j} = \det M \ , \tag{3.2}$$

¶ 要建立 Grassmann 代数与费米子物理态之间的关系，比较方便的是引入所谓的 Grassmann 相干态 (Grassmann coherent states)。假定我们存在一系列费米子的产生湮灭算符：$a_i^\dagger$，a_i，其中：$i = 1, 2, \cdots, N$；同时存在费米子系统的基态 $|0\rangle$，它对于任意的 i 满足：$a_i|0\rangle = 0$。利用各个产生算符作用于态 $|0\rangle$，我们可以构建出费米子系统的 Hilbert 空间。在这个 Hilbert 空间中，我们定义一个右矢 (ket) 相干态：

$$|\eta\rangle \equiv |\eta_1, \cdots, \eta_N\rangle = \sum_{J=0}^{\infty} \frac{(-)^{J(J-1)/2}}{J!} (\eta_i a_i^\dagger)^J |0\rangle \ , \tag{3.3}$$

其中各个 η_i 为 Grassmann 数，求和号中的因子 $(\eta_i a_i^\dagger)$ 隐含着对于重复指标 i 的求和。虽然这个定义式中对于 J 的求和延伸到无穷，但是由于 Pauli 不相容原理，该求和实际上仅仅涉及有限多项，[1] 从而并不存在收敛性的问题。

公式 (3.3) 所定义的相干态满足一个十分重要的性质，那就是它是费米子消灭算符的本征态：

$$a_i|\eta\rangle = |\eta\rangle\eta_i \ . \tag{3.4}$$

类似的，我们可以定义一个左矢 (bra) 相干态：

$$\langle\bar{\eta}| \equiv \langle\bar{\eta}_1, \cdots, \bar{\eta}_N| = \langle 0| \sum_{J=0}^{\infty} \frac{(-)^{J(J-1)/2}}{J!} (\bar{\eta}_i a_i)^J \ , \tag{3.5}$$

其中各个 $\bar{\eta}_i$ 为 (另外的，独立于 η_i 的) 一组 Grassmann 数。这样定义的左矢是费米子产生算符的左本征矢：

$$\langle\bar{\eta}|a_i^\dagger = \bar{\eta}_i\langle\bar{\eta}| \ . \tag{3.6}$$

特别提醒大家注意公式 (3.4) 和公式 (3.6) 中本征值的位置。由于本征值本身是 Grassmann 数，因此它放在态的左边或右边是不同的。

上述定义的相干态的左矢和右矢之间并不是正交的，它们的内积满足：

$$\langle\bar{\eta}|\eta\rangle = \exp(\bar{\eta}_i\eta_i) \ . \tag{3.7}$$

[1] 准确地说，最多 2^N 项。

虽然左右相干态矢量不是正交的，但是它们却是完备的（有时又被称为过完备的）：

$$1 = \int \left(\prod_i d\bar{\eta}_i d\eta_i \right) e^{-\bar{\eta}\cdot\eta} |\eta\rangle\langle\bar{\eta}| \ , \tag{3.8}$$

其中 $\bar{\eta}\cdot\eta = \bar{\eta}_i\eta_i$。

另外一个重要的性质是如下的公式：

$$\langle\bar{\eta}| \exp\left(a_i^\dagger A_{ij} a_j\right) |\eta\rangle = \exp\left[\bar{\eta}_i \left(e^A\right)_{ij} \eta_j\right] \ . \tag{3.9}$$

这个公式在推导路径积分的转移矩阵表示的时候十分有用。[2]

8 格点费米子场

¶ 在连续的四维欧氏空间，一个 Dirac 场的作用量可以写成：

$$S = \int d^4x \bar{\psi}(\partial_\mu\gamma_\mu + m_0)\psi \ , \tag{3.10}$$

其中 γ_μ 是欧氏空间的 γ-矩阵。关于这些矩阵的表示，可以参考附录 A。如果利用朴素的分立化的方法将其中的微分变为差分，我们可以写出一个四维超立方格点上的格点费米子作用量 (取格点单位 $a = 1$)：

$$S = \sum_x \bar{\psi}_x \left[\frac{1}{2}(\hat{\partial}_\mu + \hat{\partial}_\mu^*)\gamma_\mu + m_0\right] \psi_x \ , \tag{3.11}$$

其中的 $\hat{\partial}_\mu$ 和 $\hat{\partial}_\mu^*$ 分别是格点上的向前和向后差分算符，参见标量场一章中的公式 (2.55)。它们的定义为：

$$\begin{cases} \hat{\partial}_\mu\psi_x = \psi_{x+\mu} - \psi_x \ , \\ \hat{\partial}_\mu^*\psi_x = \psi_x - \psi_{x-\mu} \ , \end{cases} \tag{3.12}$$

我们有时为了书写方便，也会引入两者的平均值 $\bar{\partial}_\mu = (\hat{\partial}_\mu + \hat{\partial}_\mu^*)/2$。显然，我们有：

$$\bar{\partial}_\mu\psi_x = [\psi_{x+\mu} - \psi_{x-\mu}]/2 \ . \tag{3.13}$$

公式 (3.11) 中这样定义的费米子作用量被称为“天真费米子”(naive fermion) 作用量。要量子化这个系统，我们将它的作用量放到指数上并且对所有的费米子场 $\bar{\psi}_x$ 和 ψ_x 进行积分 (路径积分)。需要注意的是，现在这些费米子场的每一个独立分量都取值于 Grassmann 数域。所以，费米子系统的配分函数为：

$$Z[J,\bar{J}] = \int \left(\prod_x d\bar{\psi}_x d\psi_x \right) e^{-S[\bar{\psi},\psi] + \sum_x \left(\bar{J}_x\psi_x + \bar{\psi}_x J_x\right)} \ . \tag{3.14}$$

[2]关于这个公式的证明，可以在公式中取 $A \to tA$，其中 t 是一个连续参数。然后证明等式两边满足同样的一个对于 t 的一个一阶常微分方程。再由解的唯一性定理可以证明两边相等。

正如玻色场的情形一样，为了计算的方便我们引入了在 Grassmann 数域取值的外源 J_x 和 $\bar{J}_x$。将指数上的项进行配方，我们最终发现天真费米子所对应的传播子是：[3]

$$\langle \psi_x \bar{\psi}_y \rangle \equiv \overbracket{\psi_x \bar{\psi}_y} = \frac{1}{V} \sum_p \frac{e^{ip\cdot(x-y)}}{i\gamma_\mu \sin p_\mu + m_0} \,. \tag{3.15}$$

在连续极限下，我们需要考察小动量 $p_\mu \ll 1$，我们就得到连续欧氏空间的传播子。但是，这个传播子具有一个致命的问题–它除了我们希望得到的物理粒子之外，还包含非物理的粒子。我们知道费米子传播子的极点是与系统的哈密顿量的谱密切联系的。由于正弦函数的周期性，公式 (3.15) 中的傅立叶空间传播子有不只一个极点。这一点对于一个无质量的费米子看得格外清楚。如果 $m_0 = 0$，那么公式 (3.15) 所对应的传播子除了在 $p = (0,0,0,0)$ 处有极点–这对应于通常的零质量的费米子的极点–以外，在 $p = (\pm\pi, \pm\pi, \pm\pi, \pm\pi)$ 处也有极点。考虑到第一布里渊区的周期性，这相当于总共有 $2^4 = 16$ 个极点。这多余的 15 个极点相应地也会出现在系统哈密顿量的谱中。因此，原先我们只需要将一个狄拉克费米子放在格点上，但是得到的却是十六个。这些多余的、非物理的费米子被称为加倍子 (doubler)。这个问题通常也被称为费米子加倍问题。[4]

¶ 详细的研究可以证明，费米子加倍问题实际上与费米子的手征性紧密联系在一起的。这一点我们在后面还会更加细致的阐述。不过这里我们先简要地说明一下。如果我们将天真费米子与一个手征的外场 (矢量场和轴矢量场) 相互作用，我们就会发现这十六个费米子分别有八个具有正的手性；另外八个具有负的手性。[5] 这种结构保证了所有的费米子–包括我们希望的位于 $p = (0,0,0,0)$ 的物理极点，也包括其他的 15 个非物理的加倍子–的手性之和是零。这保证了这个理论没有手征反常。费米子的加倍问题的出现实际上预示着想要将具有确定手性的手征费米子放在格点上是会有困难的。这一点后来被 Nielsen 和 Ninomiya 的一个定理所证实。他们证明了在满足一系列条件之下，[6] 不可能将手征费米子放在格点上，这被称为 No-go 定理。[**?**, **?**, **?**] No-go 定理说明，想要给含有手征费米子的手征规范理论一个非微扰的定义是困难的。这个困难至今也没有彻底解决，尽管近年来出现的畴壁费米子 (domain wall fermion) 和 Ginsparg-Wilson 费米子为这个问题的彻底解决带来了曙光。我们将在第 **??**章中简要介绍这些费米子。

将手征费米子放在格点上，或者说对手征费米子提供一个非微扰的定义，这对于所谓的手征规范理论是必须的。如果我们没有变态到要在格点上研究手征规范理论，[7] 而仅仅是研究所谓的矢量理论 (例如 QCD)，那么这个问题是可以解决的。为此，人

[3] 下面的表达式中重复的指标 μ 隐含着求和。

[4] 事实上是每一个维度会出现一重费米子加倍现象，因此在四维时空就是 16 个。

[5] “手性”也可以称为手征荷。

[6] 具体一些来说，这些条件是：厄米性、无加倍子、局域性、手征性：$\gamma_5 D + D\gamma_5 = 0$。

[7] 从标准模型来说，电弱统一的 Weinberg-Salam 模型就是一个典型的手征规范理论；而描写强相互作用的

们上世纪就提出了所谓的 Wilson 费米子和 Kogut-Susskind 费米子 (又被称为 staggered fermion)。进入新世纪 (实际上主要是上世纪末)，又兴起了畴壁费米子 (Domain Wall Fermion) 和重叠费米子 (overlap fermion)，后者是前面提到的 Ginsparg-Wilson 费米子的特例。本章中，我们主要解释一下 Wilson 费米子的引入。畴壁费米子的讨论则放在第 **??** 章中。

¶ 为了克服天真费米子中的加倍问题，首先注意到天真费米子的加倍问题是由于其动量空间的传播子中的正弦函数在第一布里渊区内具有不只一个零点造成的，所以 Wilson 的建议就是将其他多余的零点去掉。具体地来说，可以将傅立叶空间的传播子的倒数修改为：

$$(i\sin p_\mu\gamma_\mu + m_0) \to \left(i\sin p_\mu\gamma_\mu + \frac{r}{2}\hat{p}^2 + m_0\right) \tag{3.16}$$

其中 $\hat{p}^2 = 2\sum_\mu(1-\cos p_\mu)$ 是格点上的动量平方，参数 r 被称为 Wilson 参数。显然，这样一来在第一布里渊区中只有位于原点 $p=(0,0,0,0)$ 处一个零点，其他的零点都由于 Wilson 项的存在而被抬高了。在坐标空间中，Wilson 项相当于在原先天真费米子作用量中加入了一项量纲是 5 的无关算符：$(ra/2)\bar{\psi}\hat{p}^2\psi$，其中 a 是格点的格距。这样的费米子称为 Wilson 费米子。虽然 Wilson 参数原则上可以取任何值，但是通常我们会取 $r=1$。于是它的作用量可以写为：

$$S = \sum_x \bar{\psi}_x \left[\frac{1}{2}(\hat{\partial}_\mu + \hat{\partial}^*_\mu)\gamma_\mu - \frac{1}{2}\hat{\partial}_\mu\hat{\partial}^*_\mu + m_0\right]\psi_x\ , \tag{3.17}$$

其中我们已经按照惯例将 Wilson 参数 r 取为 1。Wilson 项的存在使得所有加倍子至少获得了量级为 $1/a$ 的等效质量，在连续极限下，这些激发将具有截断的量级，因此会与低能区的普通费米子脱耦 (decouple)。这样一来，Wilson 费米子的谱在连续极限下将只包含一个 Dirac 费米子，这正是我们所需要的。

但是，世上没有免费的午餐。Wilson 费米子的引入是有代价的。它最大的问题就是加入的 Wilson 项明显破坏手征对称性 (chiral symmetry)。鉴于手征对称性在 QCD 中的核心地位与作用，这个伤害几乎是不可饶恕的。唯一值得告慰的是，我们可以证明在连续极限下，Wilson 费米子所破坏的手征对称性会得到恢复。我们将在后面第 **??**章中比较详细地讨论 Wilson 作用量的手征性质。

9 费米子场的传播子

¶ 这一节中我们来介绍费米子场的传播子。我们从最为简单的费米子场的作用量，假设它是费米子场的双线性型，

$$S[\psi,\bar{\psi}] = \bar{\psi}_x\mathcal{M}_{x,y}\psi_y\ , \tag{3.18}$$

QCD 则是一个矢量理论，因为在 QCD 中左手的夸克和右手的夸克与规范场的耦合是相同的。

其中重复的指标隐含着求和。其中的矩阵 $\mathcal{M}_{x,y}$ 称为该理论的费米子矩阵。我们后面会看到它的具体的形式。那么我们前面看到基本的费米子传播子可以写为，

$$\langle\psi_x\bar{\psi}_y\rangle \equiv \overbracket{\psi_x\bar{\psi}_y} = \frac{1}{Z}\int\left(\prod_x d\bar{\psi}_x d\psi_x\right)\left[\psi_x\bar{\psi}_y\right]e^{-\bar{\psi}_x\mathcal{M}_{x,y}\psi_y} = \mathcal{M}^{-1}_{x,y}\,, \tag{3.19}$$

其中的配分函数 Z 为

$$Z = \int\left(\prod_x d\bar{\psi}_x d\psi_x\right)e^{-\bar{\psi}_x\mathcal{M}_{x,y}\psi_y} = \det\mathcal{M}\,. \tag{3.20}$$

这个表达式基本上源于 Grassmann 积分的定义，与具体的物理过程没有太大关系。也就是说，只要是关于费米子场的双线性型，我们都可以写出这种类似的式子。它可以通过引入 Grassmann 属性的外源的配分函数 $Z[J,\bar{J}]$–见公式 (3.14)–然后再对 $Z[J,\bar{J}]$ 取适当的微商获得。由于费米子场的 Grassmann 特性 (以及体系的作用量的非 Grassmann 特性)，我们几乎总是可以将我们感兴趣的物理体系的作用量写成费米子场的双线性型。特别值得一提的是，对于包含四个费米子场相互作用的场论体系，我们可以通过引入恰当的玻色型的辅助场–记为 $\mathcal{A}_x$–将其有效作用量 化为费米子场的双线性型。于是体系的配分函数可以大致写为，

$$Z = \int\left(\prod_x d\bar{\psi}_x d\psi_x\right)[\mathcal{D}\mathcal{A}]\,e^{-\bar{\psi}_x\mathcal{M}_{x,y}[\mathcal{A}]\psi_y}e^{-S_0[\mathcal{A}]} = \int[\mathcal{D}\mathcal{A}]\,e^{-S_0[\mathcal{A}]}\det\mathcal{M}[\mathcal{A}]\,, \tag{3.21}$$

其中的矩阵 $\mathcal{M}[\mathcal{A}]$ 是一个与辅助场有关的费米子矩阵，$S_0[\mathcal{A}]$ 是一个仅仅与辅助场有关的作用量。公式 (3.21) 中所给出的格点上的理论实际上涵盖了大量的我们感兴趣的物理体系。例如，本书将着重要讨论的 Wilson 格点 QCD 就属于这一类，只不过其中的辅助场 $\mathcal{A}_x$ 是具有规范对称性的规范场 (见下节的讨论)$U_\mu(x)$。另外，很多的凝聚态物理中描写电子-电子相互作用的强关联模型–例如著名的 Hubbard 模型–在经过了 Hubbard-Stratonovich 变换之后，也可以化为这个形式。因此我们下面关于费米子传播子讨论的适用范围远比简单的自由费米子要广泛。

如果我们感兴趣理论中多个 (超过两个) 费米子场的缩并，我们就需要利用所谓的 Wick 定理。例如，对于两个费米子场和两个反费米子场的缩并我们有，

$$\langle\psi_x\bar{\psi}_y\psi_w\bar{\psi}_z\rangle = \overbracket{\psi_x\bar{\psi}_y}\overbracket{\psi_w\bar{\psi}_z} - \overbracket{\psi_x\bar{\psi}_z}\overbracket{\psi_w\bar{\psi}_y}\,. \tag{3.22}$$

对于更一般的有辅助场的理论 (3.21)，这个式子还必须对辅助场进行系综平均：

$$\langle\psi_x\bar{\psi}_y\psi_w\bar{\psi}_z\rangle = \frac{1}{Z}\int[\mathcal{D}\mathcal{A}]\,e^{-S_0[\mathcal{A}]}\det\mathcal{M}\left[\mathcal{M}^{-1}_{x,y}\mathcal{M}^{-1}_{w,z} - \mathcal{M}^{-1}_{x,z}\mathcal{M}^{-1}_{w,y}\right]\,. \tag{3.23}$$

需要注意的是，上式中费米子行列式 $\det\mathcal{M}$ 以及费米子传播子 $\mathcal{M}^{-1}_{x,y}$ 等物理量，一般来说都与辅助场 $\mathcal{A}$ 有关。因此对于一个既包含费米子场又包含其他玻色型场 (可以是辅助场也可以是基本的玻色型场) 的理论来说，它的路径积分包含两个步骤：对费米子场的积分和对其他玻色型场的积分。或者用统计物理的语言来说，对费米子场的系综平均和对其他玻色型场的系综平均。一般来说，对费米子场的积分 (平均) 往往是可以解析地完成的，而对剩余的玻色型场的积分 (平均) 则需要利用数值模拟的方法来完成。

10 格点上的规范场

¶ 格点上的规范场与费米子场往往是同时出现的，特别是在格点 QCD 之中。它们共同保证了规范对称性的实现。将规范场放在格点上最先是 Wilson 在他的著名文章中提出的。规范场作为内部空间的平行移动操作很自然地被放在相邻格点之间的链接 (link) 上。另外，在格点规范理论中，规范场一般是在规范群而不是它的李代数中取值。具体到 QCD，规范群是 $SU(3)$ 群。因此处理格点上的胶子场，我们引入所谓的链变量 (link variable) $U_\mu(x) \in SU(3)$，它位于从格点 x 到其相邻的格点 $x+\hat{\mu}$ 的链接上。链变量是一个有“方向性”的变量。我们约定以从 x 指向 $x+\hat{\mu}$ 的有方向的链接对应于 $U_\mu(x)$，同时约定相反的方向的链接对应于它的逆 $U_\mu^\dagger(x)$。格点上的链变量与大家在连续场论中所熟悉的胶子场 $A_\mu(x) \in su(3)$ 之间的关系大致如下。设想在连续的欧氏时空中存在连续分布的规范场 $A_\mu(y)$。那么我们有：

$$U_\mu(x) = \exp\left(-i\int_x^{x+a\hat{\mu}} A_\mu(y)dy\right) \sim e^{-iaA_\mu(x+a\hat{\mu}/2)}\,, \tag{3.24}$$

其中第二步我们假定了 $A_\mu(x)$ 足够光滑并且格距 a 很小。换句话说，格点规范中的链变量就是长度只有一个格距的 Wilson 线 (Wilson line)。

假定我们对一个给定格点上的各个链接都给出了一个 $U_\mu(x)$，其中 $\mu = 0,1,2,3$，$x \in \Lambda$ 取遍所有格点，我们就称这一组 $\{U_\mu(x)\}$ 为一个规范场组态。我们知道，规范场 $U_\mu(x)$(或者等价地说 $A_\mu(x)$) 并不是完全独立的动力学自由度。其中包含了多余的自由度，这个体现在体系具有规范对称性之中。对于任意一个给定的规范场组态，我们可以对其进行规范变换：

$$U_\mu(x) \Rightarrow U'_\mu(x) = g_x U_\mu(x) g^\dagger_{x+\hat{\mu}}\,, \tag{3.25}$$

其中 $g_x \in SU(3)$，$x \in \Lambda$ 为任意一组 $SU(3)$ 规范变换矩阵。我们测量的物理量应当是规范不变的。也就是说，所有物理上可以测量 (原则上可以测量的) 的量在规范变换下是不变的。利用链变量很容易构造规范不变的物理量。例如，大家可以很容易证明，格点上任何闭合回路的规范链接的顺序乘积的迹是规范不变的。在格点上由规范链接构成的闭合回路一般统称为 Wilson 圈 (Wilson loop)。Wilson 圈的迹 (trace)，或者更准确地说，特征标 (character)，一定是规范不变的。

练习 3.1 验证这一点。

关于连续时空中的 Wilson 圈以及 Wilson 线与规范对称性的关系，读者可以参考 Peskin 的场论教材的 §15.3 节。

我们关心利用链变量构造规范不变的量的一个目的就是试图写出格点规范场的作用量。这个作用量应当是规范不变的。并且一般涉及一系列局域的算符的求和 (欧氏空间时空积分)。欧氏空间中的超立方晶格上最为简单的闭合回路就是一个小方格 (plaquette)。因

此，Wilson 建议用它作为格点规范场的作用量的元素。具体来说，他建议用：

$$S_g[U_\mu] = \beta \sum_P ReTr(1 - U_P)\ , U_P = U_\mu(x)U_\nu(x+\mu)U_\mu^\dagger(x+\nu)U_\nu^\dagger(x)\ . \tag{3.26}$$

其中的求和遍及格点上所有独立的小方格；β 是一个耦合参数，它的物理意义我们下面会进一步阐明。这个作用量就是著名的 Wilson 的小方格作用量 (plaquette action)。

¶ 读者也许会问，其他的 Wilson 圈是否可以加入呢？回答是当然可以。Wilson 最先仅仅引入小方格主要是出于简单。其他的 Wilson 圈作为规范不变量当然也可以加入，但是它们的作用相当于无关算符。也就是说，它们有可能会改善格点模型趋于连续极限的速度，但是不会改变它最终的连续极限。由于规范对称性严重地限制了能够选择的算符的个数 (事实上，维数小于等于 4 且规范不变的算符只有 1 个)，因此选择小方格作用量就变得十分自然了。正如我们前一章指出的，无关算符虽然不会影响模型的普适类，但是会影响它趋于连续极限的速度。我们将在后面讨论改进作用量时再回到这个问题。

要了解小方格作用量 (3.26) 中参数 β 的物理含义，我们需要将它取 (形式上的) 连续极限并与连续时空的作用量进行比较。为此我们利用公式 (3.24) 中给出的链接与连续时空胶子场之间的关系，利用 Stokes 定理，

$$U_P = \exp\left[-i\frac{1}{2}\oint dS_{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right] \sim e^{ia^2F_{\mu\nu}} \sim 1 + ia^2F_{\mu\nu} - \frac{a^4}{2}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \cdots$$

与连续时空中的 Yang-Mills 规范理论进行比较，例如与附录 B中的公式 (B.8) 比较，对于 $SU(3)$ 群我们得到：

$$\beta = \frac{6}{g_0^2}\ . \tag{3.27}$$

其中 g_0 是裸的规范耦合常数。一般来说，如果规范群为 $SU(N)$，那么对应关系将为 $\beta = 2N/g_0^2$。

如果将规范场的作用量放入路径积分表示并进行量子化，我们需要知道规范场的积分测度。对于像 $SU(N)$ 这样的总体积有限的群，我们可以利用群上面的所谓 Haar 测度。这个测度是群上面不变的测度，也就是说我们有 $dU = d(UU') = d(U'U)$，其中 $U, U' \in SU(N)$。我们可以将这个测度进行归一化，例如通常的归一化是令：

$$\int_{SU(N)} dU = 1\ . \tag{3.28}$$

有了对一个群元素的积分，将它们统统相乘就可以定义路径积分的测度：

$$\mathcal{D}U_\mu = \prod_{x,\mu}[dU_\mu(x)]\ . \tag{3.29}$$

于是纯规范场部分的配分函数可以写为：

$$Z = \int \mathcal{D}U_\mu e^{-S[U_\mu]}\ . \tag{3.30}$$

其中 $S[U_\mu]$ 为相应的 (规范不变的) 规范场作用量，例如可以取为前面的 Wilson 小方格作用量 (3.26)。

10.1 规范变换和规范固定

¶ 前面提及了格点上的规范场在规范变换下的行为 (3.25)，并且说明了所有格点上的闭合圈乘积的迹是一个规范不变量。下面我们来讨论一下如何利用规范对称性来简化我们的格点计算。

在格点规范中进行物理量的测量需要注意的是，我们只能够测量那些规范不变的量。对于纯规范场来说，由于我们只有规范链接变量，因此能够构造出来的规范不变的量就是各种 Wilson 圈。所以，能够测量的也就是这些不同形状、不同大小的 Wilson 圈的期望值。对于一个非规范不变的局域的物理量取期望值，只要规范对称性没有破缺，我们得到的结果一定恒等于零。这个结论一般被称为 Elitzur 定理 。[8] 这个结论具有两方面的应用，第一，说明我们为什么必须以规范不变的量作为物理量；第二，它可以被利用来简化我们的格点计算。这一点我们在讨论数值模拟问题时会再次提及 (参见第 18.2小节中关于面源的讨论)。

作为一个完全规范不变的理论框架，格点规范理论中我们并不必须进行所谓 规范固定 (gauge fixing) 的操作。我们完全可以直接在不固定规范的情形下进行计算。这一点与连续场论中的情形完全不同。准确的说，连续场论中需要进行规范固定的操作并不直接源于连续的时空，而是源于微扰论。在连续时空的规范场论中，我们只能够微扰地定义规范理论，由于规范对称性的存在，导致自由的胶子场传播子中具有多余的自由度，因此必须进行规范固定来剔除这些冗余的自由度。在格点规范中，我们可以不去进行规范固定。需要做的就是对规范不变的物理量进行测量即可。当然，如果我们需要在格点规范理论中讨论微扰论，我们发现我们又必须进行规范固定了。这说明规范固定主要来源于微扰论。

当然，在格点规范理论中也可以进行规范固定。为了方便，我们可以将格点上的规范场进行规范变换。事实上，我们可以选定某个规范链接，比如 $U_\mu(x)$，它从格点 x 指向格点 $(x+\hat{\mu})$，然后我们进行一次公式 (3.25) 中所示的规范变换。我们选定所有的 $y \neq (x+\hat{\mu})$ 的格点都选择 $g_y = \mathbb{1}$ 而对于 $g_{x+\hat{\mu}}$ 则选择 $g_{x+\hat{\mu}} = U_\mu(x) \in SU(3)$。这样一来变换以后的链变量变为：

$$U_\mu(x) \Rightarrow U'_\mu(x) = \mathbb{1} U_\mu(x) U^\dagger_\mu(x) = \mathbb{1} \ . \tag{3.31}$$

也就是说，经过这个变换后原先的链变量 $U_\mu(x)$ 变为了相应规范群的单位元 $\mathbb{1}$。当然从点 $(x+\hat{\mu})$ 出发的那些链接在上述规范变换之后也发生了变化，比如链接 $U_\nu(x+\hat{\mu})$ 就变为：

$$U_\nu(x+\hat{\mu}) \Rightarrow U'_\nu(x+\hat{\mu}) = U_\mu(x) U_\nu(x+\hat{\mu}) \ . \tag{3.32}$$

现在我们可以分别对于上述从格点 $x+\hat{\mu}$ 出发的四个链接来重复前面的操作，逐一将它们利用规范变换变为规范群的单位元。显然这个操作可以分头进行下去除非其中某个链接恰好回到了我们已经操作过的链接上，也就是说形成了圈。只要不形成闭合的圈，我们可以不停的利用规范变换将格点上一个给定的规范场组态中的链接化为 $\mathbb{1}$。也就是说，这些被“同一化”了的链接在格点上构成一个非闭合的树图。整个格点的链接一定分为不相联通的几个树图之和；联通这些树图的链接是那些还没有被同一化的链接。这些树被称为格点

[8] 参见 Itzykson& Drouffe, ”Statistical Field Theory”, §6.1.3.

上规范场的最大树 (maximal tree)。对于一套格点规范场组态来说，最大树的选择并不是唯一的。

¶ 在格点上可以使用的一种规范固定方法是将所有的 (虚) 时间方向的链接都同一化到单位元：

$$U_0(x) = \mathbb{1} \ , \ \forall x \ . \tag{3.33}$$

由于 $U_0(x) \sim \exp(iaA_0(x))$，所以这个规范等价于令 $A_0(x) = 0$。它因此被称为时规范 (temporal gauge)。时规范对于我们理解哈密顿框架下的格点规范场特别有帮助。我们下面在讨论 Wilson 圈的物理含义时就会用到这个规范。

另外一类常用的规范是所谓的朗道规范以及库仑规范。在连续时空的量子场论中，朗道规范的表述是

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0 \ , \tag{3.34}$$

其中 $A_\mu(x)$ 是李代数中取值的规范场。我们现在需要的是与其相应的格点规范场的表述形式。在格点规范中，规范场是在相应的李群中取值的。为了得到这种形式，我们注意到如下的事实：连续时空中的朗道规范也可以通过要求泛函 $W[A]$

$$W[A] \equiv \sum_{\mu=0}^{3} \int d^4x Tr\left([A_\mu(x)]^2\right) \ , \tag{3.35}$$

的极值来获得。如果我们考虑所有可能的无穷小规范变换：$g(x) = e^{ih(x)} \sim 1 + ih(x) + \cdots$，要求 $W[A]$ 在此类规范变换下稳定，我们会发现，

$$\delta W[A] = 2\sum_{\mu=0}^{3} \int d^4x Tr\left([\partial_\mu A_\mu(x), h(x)]\right) + O(h^2) \ . \tag{3.36}$$

因此朗道规范等价于要求 $W[A]$ 取极值。

练习 3.2 验证这一点。

为此我们构造泛函

$$W[U] = -\sum_{x,\mu} \left[U_\mu(x) + U_\mu^\dagger(x)\right] \ . \tag{3.37}$$

注意，如果我们运用形式上的展开式 $U_\mu(x) \sim 1 + igA_\mu(x) + \cdots$，我们发现这个表达式的领头阶恰恰与 $W[A]$ 类似。如果试图在格点规范变换下求上式的极值，就定义了格点上的朗道规范。在数值上，要实现这一点需要从下面的函数出发：

$$F[g_x] = -\sum_{x,\mu} \left[g_x U_\mu(x) g_{x+\hat{\mu}}^\dagger + h.c\right] \ . \tag{3.38}$$

然后可以利用诸如过弛豫 (overrelaxation) 等数值方法求解。

类似的规范固定问题还有所谓的库仑规范，它的连续时空的表述形式为 $\partial_i A_i(x) = 0$。其规范固定的方法非常类似于上面讨论的朗道规范，只不过我们对于 μ 的求和仅仅限于空间指标罢了。

10.2 Wilson 圈与 Polyakov 圈

在所有规范不变的物理量中，最为著名的是沿着时间方向大小为 T，沿着空间方向间隔为 R 的长方形 的 Wilson 圈 。以沿着 $\hat{1}$ 方向和时间方向为例，这个 Wilson 圈可以写为：

$$\begin{aligned} W(R,T) &= \left[\prod_{i=0}^{R-1} U_1(x+i\hat{1})\right]\cdot\left[\prod_{j=0}^{T-1} U_0(x+j\hat{0}+R\hat{1})\right]\cdot \\ &\times \left[\prod_{i=0}^{R-1} U_1^\dagger(x+T\hat{0}+(R-1-i)\hat{1})\right]\cdot\left[\prod_{j=0}^{T-1} U_0^\dagger(x+(T-1-j)\hat{0})\right] \end{aligned} \tag{3.39}$$

其中的每个含有 $\prod$ 的因子的含义都是由左向右连乘，例如：

$$\left[\prod_{i=0}^{R-1} U_1(x+i\hat{1})\right] \equiv U_1(x)U_1(x+\hat{1})\cdots U_1(x+(R-1)\hat{1})\ .$$

Wilson 圈基本上由四部分相间构成：两条沿时间方向的链接的顺序乘积和两条沿空间方向的链接的顺序乘积。下面我们进一步分析一下它们。

首先看沿空间方向的顺序乘积。为了方便，我们令 $\mathbf{y}=\mathbf{x}+R\hat{1}$。如果我们用 $S[\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{y};x_0]$ 代表从 x 所在的格点，沿着同一时间片上的方向 $\hat{1}$ 走 R 步获得的路径上的所有规范链接的顺序乘积，即：

$$S[\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{y},x_0] = U_1(x)U_1(x+\hat{1})\cdots U_1(x+(R-1)\hat{1})\ . \tag{3.40}$$

这称为从 $x=(x_0,\mathbf{x})$ 到 $y=(x_0,\mathbf{y}\equiv x+R\hat{1})$ 的一条 Wilson 线 。由于整个这条 Wilson 线都位于同一个时间片 x_0 上，因此我们称其为 空间 Wilson 线 。一般来说，一条空间 Wilson 线并不一定要沿着某个固定空间方向的晶轴。它完全可以是沿着同一时间片上的任意一条折线行进。比如，我们可以定义从点 x 到任意一个空间点 y 的 Wilson 线，只要 $x_0=y_0$ 且其中任意一个链接都位于该时间片上即可。注意，虽然空间方向的 Wilson 线不一定沿着空间的某个晶轴，但是当构成 Wilson 圈的时候，我们一般总是要求两个时间相隔 T 的两条空间 Wilson 线取 完全相同 的空间路径。如果空间方向的 Wilson 线完全沿着某个晶轴，我们就称这样的 Wilson 圈是 平面 Wilson 圈 ，这时的 Wilson 圈实际上就是时空方向的一个矩形；反之我们则称其为 非平面的 Wilson 圈 。

下面再看沿时间方向的顺序乘积。我们记

$$T[x_0\Rightarrow(x_0+T);\mathbf{x}] = U_0(x)U_0(x+\hat{0})\cdots U_0(x+(T-1)\hat{0}) = \prod_{j=0}^{T-1} U_0(x+j\hat{0})\ , \tag{3.41}$$

它称为一条 时间 Wilson 线 。由于沿着时间方向，因此时间 Wilson 线必定是直线，它完全由起始终止点的空间坐标 $\mathbf{x}$ 以及起始时间 x_0 和终止时间 x_0+T 所完全确定。

于是，前面定义的 Wilson 圈 可以写为：

$$\begin{aligned} W(R,T) &= Tr\left[S[\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{y},x_0]\cdot T[x_0\Rightarrow(x_0+T);\mathbf{x}+R\hat{1}]\right. \\ &\quad \left. S[\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{y},x_0+T]^\dagger\cdot T[x_0\Rightarrow(x_0+T);\mathbf{x}]^\dagger\right] . \end{aligned} \tag{3.42}$$

¶ Wilson 圈之所以重要是因为它其实反映了两个无限重的夸克之间的势能 $V(R)$，这被称为 静态夸克 - 反夸克势 (static quark-anti-quark potential)。要看清这种联系，我们采用前面讨论过的时规范。在时规范下，所有的虚时方向的规范链接都是单位元，而上面定义的 Wilson 圈可以写为，

$$W(R,T)=Tr\left[S[\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{y},x_0]\cdot S[\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{y},x_0+T]^\dagger\right] . \tag{3.43}$$

我们在物理上感兴趣的是 Wilson 圈在一定规范场组态的下的期望值：

$$\begin{aligned} \langle W(R,T)\rangle &= \left\langle Tr\left[S[\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{y},x_0]\cdot S[\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{y},x_0+T]^\dagger\right]\right\rangle , \\ &= \left\langle S[\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{y},0]_{ab}S[\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{y},T]^\dagger_{ba}\right\rangle , \\ &\simeq \sum_k\sum_{a,b}|\langle\Omega|\hat{S}[\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{y},0]_{ab}|k\rangle|^2e^{-E_kT} . \end{aligned} \tag{3.44}$$

其中第二个等号我们运用了期望值在时间上的平移不变性，第二行到第三行我们将期望值写成了相应的薛定谔表象的算符 $\hat{S}[\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{y},0]$ 并插入了哈密顿量 $\hat{H}$ 的一组完备的本征态 $|k\rangle$。这些本征态中的基态记为 $|\Omega\rangle$，它的能量取为零：$\hat{H}|\Omega\rangle=0$；其他的态记为 $|k\rangle$，能量为 $E_k>0$。在 $T\to\infty$ 时，我们有：

$$\langle W(R,T)\rangle\simeq Z(R)e^{-V(R)T} . \tag{3.45}$$

其中 $V(R)$ 是使得 $\langle\Omega|\hat{S}[\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{y},0]_{ab}|k\rangle\neq 0$ 的最低能量态的能量。更高的能量态的贡献在大 T 下是更加指数压低的因而可以忽略。可以证明，这个最低的能量态实际上就是处在静止状态的、无穷重的一对夸克和反夸克之间的势能。[9]

如果我们能够通过数值方法计算出 $\langle W(R,T)\rangle$，我们就可以分析它在大的 T 下的行为从而确定出 $V(R)$ 作为 R 的函数。一般认为，如果对于大的 R 来说，$V(R)\sim\sigma R$，其中 $\sigma>0$ 称为 弦张力 (string tension)，也就是说夸克-反夸克之间的相互作用在大的距离上呈现出 线性势，那么将这两个无穷重的夸克和反夸克彼此分开到无穷远原则上就需要无穷大的能量从而是不可能的。这被认为是从一个侧面解释了 色禁闭 (color confinement) 效应。在大的 T 的极限下，Wilson 圈的近似表达式可以写为

$$\langle W(R,T)\rangle\simeq Z(R)e^{-\sigma RT} , \tag{3.46}$$

[9]这里我们至少可以容易地说明，量子态 $\hat{S}[\mathbf{x}\Rightarrow\mathbf{y},0]_{ab}|\Omega\rangle$ 与一对分别位于点 $\mathbf{x}$ 和点 $\mathbf{y}$ 的夸克和反夸克对的状态具有完全相同的规范变换规则。后面我们将利用跳跃参数展开 (κ expansion) 加以证明，这就是一对无穷重的夸克-反夸克对的势能。

由于 $RT = A$ 恰好是该 Wilson 圈的面积，因此这个行为又被称为面积法则 (area law)。换句话说，如果系统中大的 Wilson 圈的期望值按照 $e^{-\sigma A}$ 的行为随面积衰减的话，基本上就意味着禁闭的出现。在格点 QCD 的早期，正是由于这种联系的存在，Wilson 圈被相当广泛地研究和计算：其中既包括一些早期的数值模拟计算，也包括解析的计算，而在解析的方面的计算主要依赖于所谓的强耦合展开 (strong coupling expansion)。

¶ 前面提及规范场作用量中的耦合参数 β 基本上反比于裸的耦合参数的平方。如果裸的耦合常数很大，β 则很小，这时可以进行所谓的强耦合展开。事实上，利用强耦合展开我们可以获得格点规范理论中许多物理量的期望值的一个近似估计。一个典型的例子就是上面说到的 Wilson 圈。在强耦合展开下，我们可以将 Wilson 圈的期望值表达为：

$$\langle W(R,T)\rangle = \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}U_\mu W(R,T) e^{-\beta\sum_P TrU_P} \ . \tag{3.47}$$

由于 β 是小量，因此我们可以将其中的指数因子展开。然后我们利用群积分的性质可以论证，对 Wilson 圈有非零贡献的领头阶一定按照 β^{RT} 变化，这恰恰发生在指数函数的展开中一共 RT 个小方格刚好铺满 Wilson 圈 $W(R,T)$ 的情形。于是我们发现在强耦合展开中我们的确验证了面积法则并且其中的弦张力大约为 $\sigma \sim -\ln\beta$。这个结果基本上不依赖于规范群。换句话说，所有的格点规范理论–无论其规范群如何–基本上在强耦合展开中都体现出面积法则。

细心的读者也许要问，既然面积法则不依赖于规范群，而面积法则又意味着禁闭，那么如何从格点场论的角度来理解 QED 这样的不禁闭的规范理论呢？答案是，如果我们将 QED 放在格点上，同时如果我们也进行强耦合展开，我们的确会发现该理论仍然满足面积法则。所以，即使是像 QED 这样的阿贝尔规范理论，在其强耦合区域，该理论仍然是禁闭的。但是，当我们减小它的裸耦合常数 $e_0^2 \equiv \beta$，我们会在某个数值 $e_c^2 = \beta_c$ 附近发生相变，以至于当 $e_0^2 < e_c^2$ 时，系统会解禁闭，进入一个新的相–我们称之为库仑相–恰恰是在这个相中是我们所熟悉的、没有禁闭的 QED 理论，一对正反费米子 (我们称之为正负电子) 之间的势能也是我们熟悉的库仑势。[10] 上述情况在 QCD 中则完全不同。一般认为，QCD 中并不存在 QED 中那样的相变，因此由 QCD 描写的体系将一直处于禁闭相中。

¶ 另一个与 Wilson 圈类似的物理量是所谓的 Polyakov 圈。如果我们在 Wilson 圈的定义中，将两条空间 Wilson 线的时间方向的间距尽可能地拉大，以至于 $T = T_0$，其中 T_0 是整个格点在时间方向的长度，并且假定我们对规范场加上了周期边条件。这时两条空间 Wilson 线实际上是完全落在一起的，只不过走向恰好相反。这个时候我们可以证明，由于对规范场的周期边条件，我们实际上不能将所有的时间方向的链接通过规范变换变为单位元，但是我们可以将空间方向的链接变换为单位元。这样做的结果是我们获得两条时间方向的 Wilson 线–但由于周期边条件–它们实际上是两个走向相反的圈。为此我们定义：

$$P(\mathbf{x}) = Tr\left(\prod_{j=0}^{T_0-1} U_0(j\hat{0},\mathbf{x})\right) \ . \tag{3.48}$$

[10] 这当然是在忽略了真空极化等高阶效应之后的结论。不过这就是这个相称为库仑相的原因。

这个定义使得 Polyakov 圈完全规范不变的。也就是说，我们完全可以不必使用前面提及的将空间 Wilson 线都规范到 $\mathbb{1}$ 的这个特殊规范，而可以在任意规范下进行计算。如果我们计算位于空间位置 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的两个 Polyakov 圈的关联函数，我们有，

$$\langle P(\mathbf{x})P(\mathbf{y})^\dagger\rangle \simeq e^{-T_0V(r)}\left(1+\mathcal{O}(e^{-T_0\Delta E})\right) \ . \tag{3.49}$$

其中 $r=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ 为两点的空间间距，$V(r)$ 则是静态夸克-反夸克势能。因此，我们也可以从 Polyakov 圈的关联函数来抽取静态夸克-反夸克势能。[11] Polyakov 圈本身也可以作为 QCD 禁闭-解禁闭相变的一个重要序参量，它在有限温度、有限密度的 QCD 中有十分重要的应用。

11 Wilson 格点 QCD

¶ 前面两节我们已经了解了格点 QCD 中两个分量：费米子 (夸克) 场和规范场，本节中我们就将它们放在一起，写出具有完全规范对称性的格点 QCD 理论– Wilson 格点 QCD 。

我们首先引入格点上的 协变差分 算符：

$$\begin{cases}\nabla_\mu\psi_x = U_\mu(x)\psi_{x+\mu}-\psi_x \ , \\ \nabla^*_\mu\psi_x = \psi_x - U^\dagger_\mu(x-\mu)\psi_{x-\mu} \ ,\end{cases} \tag{3.50}$$

同样我们可以引入两者的平均值 $\bar{\nabla}_\mu=(\nabla_\mu+\nabla^*_\mu)/2$，显然我们有

$$\bar{\nabla}_\mu\psi_x = \frac{1}{2}\left[U_\mu(x)\psi_{x+\mu}-U^\dagger_\mu(x-\mu)\psi_{x-\mu}\right] \ . \tag{3.51}$$

类似地，格点上在某个方向 μ 上的二阶协变导数为 (对 μ 不求和)，

$$(\nabla_\mu\nabla^*_\mu)\psi_x = U_\mu(x)\psi_{x+\mu}+U^\dagger_\mu(x-\mu)\psi_{x-\mu}-2\psi_x \ . \tag{3.52}$$

用这些定义来替代自由的 Wilson 费米子作用量 (3.17) 中的普通格点差分，我们就得到了 Wilson 格点 QCD 中的费米子的部分，它可以写为

$$S_f[\bar{\psi},\psi,U_\mu] = \sum_x \bar{\psi}_x\left[\frac{1}{2}\gamma_\mu(\nabla_\mu+\nabla^*_\mu)-\frac{1}{2}(\nabla_\mu\nabla^*_\mu)+m_0\right]\psi_x \ , \tag{3.53}$$

其中重复的指标 μ 隐含着求和。Wilson 格点 QCD 的规范场作用量我们可以取为小方格作用量 (3.26)，这样一来我们就获得了 Wilson 格点 QCD 完整的作用量：

$$S_{LQCD}[\bar{\psi},\psi,U_\mu] = S_f[\bar{\psi},\psi,U_\mu]+S_g[U_\mu] \ . \tag{3.54}$$

[11] 一般来讲，利用 Wilson 圈和 Polyakov 圈抽取出来的势能并不一定相等。参见 C. Borg and E. Seiler, “Lattice Yang-Mills Theory at Nonzero Temperature and the Confinement Problem”, Commun.Math.Phys. 91, 329 (1983).

这就是当年 Wilson 引入的关于格点 QCD 的作用量。要完成对这个系统的“量子化”，我们需要做的只是将其放在指数上并对所有场变量积分，

$$Z = \int [\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}U_\mu] e^{-S_{LQCD}[\bar{\psi},\psi,U_\mu]} \ . \tag{3.55}$$

¶ 上面引入的 Wilson 格点 QCD 作用量具有明显的规范不变性。也就是说，在如下的规范变换下 $S_{LQCD}[\bar{\psi},\psi,U_\mu]$ 是不变的：

$$\forall g_x \in SU(3) \ , \begin{cases} \psi_x \Rightarrow \psi'_x = g_x\psi_x \\ \bar{\psi}_x \Rightarrow \bar{\psi}'_x = \bar{\psi}_x g_x^\dagger \\ U_\mu(x) \Rightarrow U'_\mu(x) = g_x U_\mu(x) g_{x+\mu}^\dagger \end{cases} \tag{3.56}$$

在这个变换中，我们拓展了前面讨论过的纯规范场的规范变换 (3.25)。基本上在一个规范变换下，费米子场在其基础表示中变换而规范场则在其伴随表示中变换。在这种规范变换下，形如 $\bar{\psi}_x U_\mu(x)\psi_{x+\mu}$ 的这类的组合都是规范不变的。这也就是为什么我们引入格点上的协变差分时用的都是这类组合。事实上，任意的 $\bar{\psi}_y L(y,x)\psi_x$ 这类的组合–其中 $L(y,x)$ 表示从 y 到 x 的一条 Wilson 线– 都是规范不变的。格点上只不过用相应的链变量的乘积替代了连续时空中的 Wilson 线而已。

Wilson 格点 QCD 的作用量的费米子部分还有其他的几种写法，我们这里也简要介绍一下。首先一个是

$$S_f[\bar{\psi},\psi,U_\mu] = \sum_x \bar{\psi}_x \left[D_W + m_0\right] \psi_x \ , \tag{3.57}$$

其中的 Wilson-Dirac 算符 D_W 为：

$$D_W = \frac{1}{2}\gamma_\mu(\nabla_\mu + \nabla_\mu^*) - \frac{1}{2}(\nabla_\mu\nabla_\mu^*) \ , \tag{3.58}$$

其中隐含对 μ 的求和。有时候我们又将 Wilson 格点 QCD 的费米子作用量其写为

$$S_f[\bar{\psi},\psi,U_\mu] = \sum_{x,y} \bar{\psi}_x \mathcal{M}[U_\mu]_{x,y}\psi_y \ . \tag{3.59}$$

其中的 $\mathcal{M}[U_\mu] = D_W[U_\mu] + m_0$ 称为 Wilson 格点 QCD 的费米子矩阵。费米子矩阵一般来说依赖于规范场 $U_\mu(x)$。利用费米子矩阵，我们可以形式上将费米子场积掉，这样就得到费米子矩阵的行列式：

$$Z = \int \mathcal{D}U_\mu e^{-S_g[U_\mu]} \det \mathcal{M}[U_\mu] \ , \tag{3.60}$$

这就是 Wilson 格点 QCD 的配分函数。

前一章曾经提到，Wilson 建议加入的 Wilson 项是一个量纲为 5 的算符 (一个无关算符)，它的作用是将理论中的加倍子脱耦，使得我们在低能区仅仅获得一个物理的费米子。但是这一项是破坏手征对称性的。这就使得 Wilson 费米子仅仅在连续极限下才能够恢复

手征对称性。如果在有限格距下手征对称性不严格成立，那么费米子的质量 m_0 的重整化也不再是相乘重整化，而可以有一个相加重整化的常数，即：

$$m_R = Z_m(m_0 - m_{\text{cr.}}) \ . \tag{3.61}$$

其中 $m_{\text{cr.}}$ 是所谓的临界质量，Z_m 是一个相乘的常数。在弱耦合区域，利用格点微扰论，常数 $m_{\text{cr.}}$ 和 Z_m 都可以逐阶地进行计算。我们这里暂时不去讨论这个问题。另一方面，它们也可以通过非微扰的数值方法确定。

¶ 上面引入的 Wilson 格点 QCD 作用量也可以表达为更类似于“统计模型”的形式。我们可以将 $\bar{\psi}_x\psi_x$ 项的系数约定为 1。这样一来 Wilson 格点 QCD 作用量也可以写为：

$$\begin{cases} S = \sum\limits_{x,y} \bar{\psi}_x \mathcal{M}[U_\mu]_{x,y}\psi_y \ , \qquad \dfrac{1}{2\kappa} = m_0 + 4 \ . \\ \mathcal{M}[U_\mu]_{xy} = \delta_{xy} - \kappa \sum\limits_{\mu} \Big[U_\mu(x)(1-\gamma_\mu)\delta_{x+\mu,y} + U_\mu^\dagger(x-\mu)(1+\gamma_\mu)\delta_{x-\mu,y} \Big] \end{cases} \tag{3.62}$$

这个形式我们看出来选取 Wilson 参数 $r = 1$ 的优势，中间的 $(1 \pm \gamma_\mu)$ 恰好具有投影算符的形式。

¶ 真实的 QCD 中费米子场对应于夸克和反夸克。我们知道它们除了时空坐标 (指标) 之外，还有许多内部指标，我们在这里稍微详细地分析一下。前面的公式都是利用“紧凑的”形式写出的。比如公式 (3.53) 中我们仅仅写出了场的时空指标。它的狄拉克、色等等指标都没有写出。下面我们就这些指标做如下的说明：

- 一般来说，夸克场 ψ 可以包含时空指标 $x \in \Lambda$，它可以跑遍所有的格点；色指标 $a = 1, 2, 3$ 标记 $SU(3)_c$ 的三种颜色；狄拉克指标 $\alpha = 1, 2, 3, 4$(又称为旋量指标) 标记了一个狄拉克旋量场的四个分量；味道指标 $A = u, d, s, c, \cdots$ 则标志不同味道 (flavor) 的夸克。因此，完整写出来的夸克场应当是：

$$\psi = \psi_{xa\alpha A} \ . \tag{3.63}$$

- 协变差分算符 ∇_μ 和 ∇_μ^* 可以视为在欧氏时空和色空间的矩阵。例如我们可以将 ∇_μ 记为 $(\nabla_\mu)_{x,a;y,b}$，其中 x，y 为时空指标，a，b 是色指标。它们在狄拉克空间是平庸的，即正比于单位矩阵，因此一般不写出。

$$\begin{cases} \nabla_\mu \psi_{xa} \equiv (\nabla_\mu)_{x,a;y,b}\psi_{y,b} \ , \\ (\nabla_\mu)_{x,a;y,b} = [U_\mu(x)]_{ab}\delta_{x+\mu,y} - \delta_{ab}\delta_{xy} \end{cases} \tag{3.64}$$

  注意，在这个表达式中 ψ 的其他指标 (旋量、味道) 我们并没有标出。

- γ 矩阵 γ_μ 仅仅包含狄拉克 (旋量) 指标，不包含时空指标、色指标等。但是 Wilson-Dirac 算符 D_W 则是包含了时空、色、狄拉克指标。

- 质量项 m_0 仅包括味道指标且在该空间是对角的，$m_0 = \mathrm{Diag}(m_0^u, m_0^d, \cdots)$，相应的对角元 m_0^A 就是相应味道 A 的夸克的裸的流夸克质量。m_0 在其他的空间都是平庸的。注意由于这一项是费米子矩阵 $\mathcal{M}[U_\mu]$ 中唯一依赖于味道的项 (并且是对角的)，因此 QCD 的配分函数表达式 (3.60) 中的费米子行列式 $\det \mathcal{M}[U_\mu]$ 实际上是各个味道的费米子行列式之乘积：

$$\det \mathcal{M}[U_\mu] = \prod_A \det(D_W[U_\mu] + m_0^A) \ . \tag{3.65}$$

  利用这个性质，人们可以证明简并的两味的 QCD 的配分函数的被积函数一定是正定的，从而可以运用 Monte Carlo 数值模拟。

在本书的后面部分，除非特别需要，我们一般都会采用“紧凑的”形式来写出这些矩阵的表达式。在这种形式下，没有明确写出的部分一般意味着平庸的 (也就是在该空间是单位矩阵) 依赖关系。

¶ 我们这里再简单讨论一下 Wilson 格点 QCD 下的分立对称性。

1. γ_5-厄米性：
   容易证明 Wilson 费米子的费米子矩阵满足如下的关系：

$$\gamma_5 \mathcal{M} \gamma_5 = \mathcal{M}^\dagger \ , \tag{3.66}$$

   这个性质被称为 γ_5-厄米性。

2. 电荷共轭
   在闵氏时空中，作为希尔伯特空间算符的狄拉克场在电荷共轭变换下的行为是：

$$\psi \Rightarrow \mathcal{C}\psi\mathcal{C}^{-1} = \left[\bar{\psi}(-i\gamma^0\gamma^2)\right]^T \ . \tag{3.67}$$

   其中 $\mathcal{C}$ 是希尔伯特空间的幺正算符，一般我们会令

$$C = (-i\gamma^0\gamma^2) \ . \tag{3.68}$$

   作为旋量空间的矩阵，C 满足 $C^T = -C = C^{-1}$，因此上式又可以写为

$$\psi \Rightarrow \mathcal{C}\psi\mathcal{C}^{-1} = C^{-1}\left[\bar{\psi}\right]^T \ . \tag{3.69}$$

   在欧式空间中上述变换规则得以保留下来，所不同的是由于 γ-矩阵的定义的改变，C 由下式给出：

$$C = \gamma_0^{(E)}\gamma_2^{(E)} \ , \tag{3.70}$$

   容易证明 C 仍然满足最重要的关系：

$$C\gamma_\mu^{(E)}C^{-1} = -\left[\gamma_\mu^{(E)}\right]^T \ . \tag{3.71}$$

对于规范场，考虑到 $U_\mu \sim \exp(iaA_\mu)$，我们要求

$$U_\mu(x) \Rightarrow U'_\mu(x) = U_\mu(x)^* = \left[U^\dagger_\mu(x)\right]^T \ . \tag{3.72}$$

有了费米场和规范场的变换规则之后，剩下的就是验证 Wilson 格点 QCD 的作用量在电荷共轭变换下不变。我们将这个留作练习。

练习 3.3 利用上面给出的夸克场、反夸克场已经规范场在电荷共轭变换下的性质，验证前面给出的 Wilson 格点 QCD 的作用量 (3.62) 在电荷共轭下不变。

3. 宇称变换与时间反演

在欧氏空间的场论中，时间与空间没有什么分别，因此宇称变换和时间反演变换都可以从单一坐标轴的反射获得。因此，我们可以定义一个操作 $\mathcal{P}_\mu$，其中 $\mu = 0, 1, 2, 3$ 来表示将除了第 μ 个坐标之外的所有其他坐标轴反向：

$$\mathcal{P}_\mu \circ x_\nu = (-1 + 2\delta_{\mu\nu})x_\nu \ . \tag{3.73}$$

其中等式右边的指标 ν 不求和。显然不同的 μ 所对应的操作 $\mathcal{P}_\mu$ 是可交换的，而联合操作 $\mathcal{P}_0\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3$ 等价于将所有坐标都反号。类似地，仅仅将 x_0 反号的就是 $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3$，仅将 x_1 反号的是 $\mathcal{P}_0\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3$，等等。我们将经过这样操作的坐标四矢量记为 $\mathcal{P}_\mu \circ x$，其中 x 是一个坐标四矢量。我们可以定义如下的场的变换，

$$\psi_x \ \Rightarrow \ (\psi_x)^{\mathcal{P}_\mu} = \gamma_\mu \cdot \left(\psi_{\mathcal{P}_\mu \circ x}\right) \ , \tag{3.74}$$

$$\bar{\psi}_x \ \Rightarrow \ \left(\bar{\psi}_x\right)^{\mathcal{P}_\mu} = \left(\bar{\psi}_{\mathcal{P}_\mu \circ x}\right) \cdot \gamma_\mu \ , \tag{3.75}$$

$$U_\nu(x) \ \Rightarrow \ U_\nu(x)^{\mathcal{P}_\mu} = U^\dagger_\nu(\mathcal{P}_\mu \circ x - \hat{\nu}) \ , \nu \neq \mu \ , \tag{3.76}$$

$$U_\mu(x) \ \Rightarrow \ U_\mu(x)^{\mathcal{P}_\mu} = U_\mu(\mathcal{P}_\mu \circ x) \ , \nu = \mu \ . \tag{3.77}$$

读者可以自行验证，在这个变换下 Wilson 格点 QCD 的作用量不变。这说明每一个变换 $\mathcal{P}_\mu$ 都是 Wilson 格点 QCD 的对称性。当然，它们的任意联合变换也是不变的。因此，Wilson 格点 QCD 保持了所有我们希望保持的分立对称性，它对于 $\mathcal{C}$，$\mathcal{P}$，$\mathcal{T}$ 以及它们的任意组合都是不变的。Wilson 格点 QCD 唯一破坏的是手征对称性，但是这一点可以在连续极限下获得恢复。

练习 3.4 验证这一点。

¶ 下面我们简单讨论一下 Wilson 格点 QCD 中物理量的期望值，特别是含有费米子场的算符的期望值。最为简单的构建元素是所谓的夸克传播子。在格点 QCD 中提及的所谓夸克传播子一般是指在一定的规范场背景下的夸克传播子，而不是自由的夸克传播子:

$$\langle \psi_x \bar{\psi}_y \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}U_\mu \left[\psi_x \bar{\psi}_y\right] e^{-S_{LQCD}[\bar{\psi},\psi,U_\mu]} \ , \tag{3.78}$$

其中的 Z 就是 Wilson 格点 QCD 的配分函数 (3.60)。这个式子里面的费米子可以形式地积分出来，将夸克传播子表达为费米子矩阵的逆矩阵的相应矩阵元，

$$\langle \psi_x \bar{\psi}_y \rangle \equiv \overbracket{\psi_x \bar{\psi}_y} = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U_\mu \mathcal{M}^{-1}_{x,y}[U_\mu] e^{-S_g[U_\mu]} \det \mathcal{M}[U_\mu] \ . \tag{3.79}$$

更为复杂的包含夸克反夸克场的复合算符的期望值也可以类似的得到，基本上所有的 $\psi_x\bar{\psi}_y$ 都将被代以相应的费米子矩阵的逆矩阵的矩阵元。这其实就是大家在量子场论中熟悉的关于费米子场的 Wick 定理 。更为复杂的由费米子场构成的物理量的期望值可以仿照第 9节中的讨论获得，例如参见公式 (3.23)。更多具体的例子我们将在后面讨论强子谱的计算中涉及。

需要指出的是，单纯的夸克传播子 (3.79) 并不是规范不变的，它的数值依赖于规范的选取。从这个意义上说，夸克传播子本身并不是可以直接测量的物理量。当然如果需要，我们完全可以选取特定的规范 (例如朗道规范或库仑规范等等) 并在其中计算相应的夸克传播子。

12 无穷重夸克极限

¶ 本节中我们将简要讨论 Wilson 格点 QCD 的无穷重夸克极限。我们将看到，这对应于跳跃参数展开。

我们前面引入的 Wilson 格点 QCD 的费米子矩阵 (3.62) 可以等价地写为，

$$\mathcal{M}[U_\mu] = \mathbb{1} - \kappa H[U_\mu] \ , \tag{3.80}$$

其中的矩阵 $H[U_\mu]$ 包含了四维格点上近邻的相互作用，称为 跳跃矩阵 (hopping matrix)；参数 κ 称为 跳跃参数 (hopping parameter)。 它与裸夸克质量之间的关系为，

$$\kappa = \frac{1}{2m_0 + 8} \ . \tag{3.81}$$

因此当裸夸克质量趋于无穷时，参数 κ 是很小的。

我们前面还看到，各种夸克的传播子相当于费米矩阵的逆矩阵 $\mathcal{M}^{-1}$ 的矩阵元。当我们需要计算它时，如果跳跃参数足够小，我们可以进行如下的 跳跃参数展开 (hopping parameter expansion)，

$$\mathcal{M}^{-1} = (\mathbb{1} - \kappa H)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \kappa^n H^n \ . \tag{3.82}$$

这个展开是否收敛依赖于矩阵 $H[U_\mu]$ 的模 $||H||$。[12] 不难证明，$||H|| \leq 8$，因此上面的级数对于 $\kappa < 1/8$ 必定是收敛的。

跳跃参数展开 (3.82) 中的各项还有一个直观的几何解释。跳跃矩阵 H 的表达式中的每一项可以分为三个部分：实空间部分、旋量空间部分和色空间部分。从实空间部分来看，跳跃矩阵可以沿着格点的任意一个晶轴的方向前进或后退一个格距。前进的部分与旋量结构 $(1-\gamma_\mu)$ 绑定，后退的部分则与 $(1+\gamma_\mu)$ 绑定。因此，在计算矩阵 H^n 时，不可能出现

[12] 关于矩阵的模及其性质，参见相关的书籍。