# 第五章　格点 QCD 中谱的计算

**本章提要**

- ☞ 两点关联函数与强子谱的计算的步骤
- ☞ 简单的介子谱的计算
- ☞ 简单的重子谱的计算
- ☞ 格点上内插场算符的构造方法
- ☞ 涂摩方法介绍

前面的第三章中，我们说明了格点 QCD 是从 QCD 基本自由度出发、非微扰定义的量子场论系统；在第四章中我们又说明了通过 Monte Carlo 数值模拟，我们可以对强相互作用中的各种现象进行非微扰的计算。这一章中，我们将讨论格点量子色动力学中最为基本的谱学的计算。

在 QCD 的理论框架中，描写强相互作用的基本自由度是正反夸克和胶子场，但是我们在自然界中真正观察到的并不是这些场的最基本的激发–夸克、反夸克和胶子，而是它们的色单态复合体–强子。这个现象被称为色禁闭。如果格点 QCD 是描写强相互作用的基本理论，它应当可以预言这些强子的存在以及它的基本物理性质，其中最为重要的就是谱性质 (spectral properties)。[1] 专门研究强子谱性质的分支就称为强子谱学 (hadron spectroscopy)。

本章中我们将仅仅考虑强相互作用，忽略电磁和弱作用。强子可以分为两大类：稳

[1] 所谓谱 (spectrum) 最初起源于光学中的色散。由于量子力学的发展，人们认识到这直接对应于原子中电子的能级。随后，这个词在物理学的各个分支用来借指与单粒子的能量 (特别是质量) 相关的物理性质。因此，强子谱中最为重要的参数就是所考虑的强子的质量。当然，对于不稳定的强子，人们往往会将衰变的相关参数 (例如衰变宽度，衰变常数等等) 也归为谱性质。

定的强子以及不稳定的强子，前者在强相互作用下是稳定存在的而后者实际上是所谓的共振态。之所以有必要将这两类加以区分是因为其谱性质–无论是从实验测量上看还是从理论描述上看–都是非常不同的。

稳定的强子其实种类并不多，大约只包括各种味道夸克反夸克构成的最轻的强子，例如质子、$\pi$ 介子等等。它们对应于 QCD 哈密顿量的严格本征态，其本征值 (能量) 一定是实数。特别的，对于一个三动量为零的态来说，相应的本征值就是该强子的质量。用更为抽象一些的理论语言来描述，这些态对应于场论体系的 $S$-矩阵在黎曼面第一页 (即所谓的物理页) 实轴上的极点。

大多数的强子实际上是不稳定的共振态。在实验测量上，除了它的质量 $M$ 之外，一般还需要一个宽度参数 $\Gamma$ 来描写它的谱性质。需要特别强调指出的是，共振态并不是 QCD 哈密顿量的本征态。只有在其宽度非常窄的极限下–这又称为窄宽度近似–它们才是哈密顿量近似的本征态，且其本征值近似为 $M - i\Gamma/2$。我们知道哈密顿量是自伴的 (或者不太严格地称为厄米的) 算符，它的本征值只可能是实数，绝不可能是有虚部的复数。从这个角度来说，应当不难理解共振态绝不可能是哈密顿量的严格本征态。对于一个共振态而言，它实际上是产生共振的一系列散射态的一个共振叠加态。[2] 例如，如果我们要研究共振态 $\rho$，我们实际上要研究的是产生这个共振的两个 $\pi$ 介子的散射问题。所谓的 $\rho$ 介子实际上是一个“结构”：其主要成分由质心能量比较接近其“质量”参数附近的 $\pi$ 介子对的 Hilbert 空间的态构成。如果用 $S$-矩阵的语言来描写，共振态往往对应于黎曼面第二页 (或者更高页) 上靠近实轴的极点。由于它位置比较靠近实轴，因此在进行散射实验的时候，当散射能量接近该极点的实部的位置时，参与散射的两个粒子可以“感受到”这个极点的存在从而产生强烈的共振散射，因此这种态才被称为共振态。我们称共振态是一个“态”还有一个原因，那就是在窄共振近似下，它可以近似地看成是一个本征态。如果这种窄共振近似由某个唯象参数控制，人们可以设想，当这个参数趋于零时 Hilbert 空间会存在一个态，尽管这种基于微扰论的观点其实并不一定就是正确的。至于说什么情况下窄共振近似可以适用，这个没有确定的判据，往往需要针对具体情况来分析。虽然我们强调了共振态严格说起来并不是 Hilbert 空间中的一个态，但是这并不妨碍我们称之为“粒子”。事实上如果你翻开著名的 PDG 粒子表，里面绝大部分的篇幅都贡献给了不稳定的粒子 (即共振态)。

从上述的描写我们看到，计算这两类强子谱学的问题在理论上有原则性的不同。对于强作用下稳定的强子而言，计算其质量一般只需要计算相应算符的两点关联函数即可；而对于共振态的强子而言，原则上需要计算产生该共振态的强子之间的散射过程，这往往涉及更为复杂的关联函数。当然，对于不稳定的共振态，如果它的宽度的效应可以忽略，那么也可以当做稳定的强子来进行计算。在本章中，我们首先讨论最为简单的介子、重子质量谱的计算过程，其中假定所考虑的强子在强相互作用下是稳定的粒子，或者可以近似看成是稳定的粒子。更为复杂的共振态粒子的谱参数的计算我们将放到本书的第二部分中供参考。

[2] 诚然，我们在描述实验结果的时候，经常会使用“态”(state) 这个词语。但是我们必须清楚，这个“态”并不意味着共振态是 Hibert 空间中的一个“态”，更不意味着是能量本征态。

# 17 两点关联函数与强子谱的计算的步骤

## 17.1 两点关联函数及其双重人格

¶ 本节中我们将讨论格点 QCD 的一个最为典型的应用，即对稳定强子 (或近似稳定强子) 的质量谱的计算。我们将首先说明这类计算的一般步骤。在随后的两节中，我们将以最为简单的 $\pi$ 介子和核子质量的计算为例，说明如何获得它的谱性质。

这类的计算主要依赖的是下面这个公式 (首先假定虚时间方向的尺度 $T \to \infty$)，

$$C(t,t_0) \equiv \langle T[\mathcal{O}(t)\mathcal{O}^\dagger(t_0)]\rangle \simeq \begin{cases} \dfrac{1}{Z}\displaystyle\int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}U_\mu \mathcal{O}(t)\mathcal{O}(0)e^{-S_{LQCD}[\bar{\psi},\psi,U_\mu]} \ , \\ \displaystyle\sum_{n\neq 0} |\langle\Omega_n|\mathcal{O}(0)|\Omega_0\rangle|^2 e^{-E_n(t-t_0)} \ , \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 $|\Omega_0\rangle$ 代表 QCD 的真空态，它的能量本征值已经取为 0；量子态 $|\Omega_{n\neq 0}\rangle$ 则代表哈密顿量其他的本征态，其相应的能量本征值为 $E_n > 0$；算符 $\mathcal{O}(t) \equiv \mathcal{O}_H(t) = e^{+tH}\mathcal{O}e^{-tH}$ 是 $t$(虚) 时刻的海森堡绘景 中的算符 (相应的，$\mathcal{O}$ 为薛定谔绘景 中的算符)，[3] $H$ 是格点 QCD 的哈密顿量，$T$ 代表虚时中的编时操作，$\langle\cdots\rangle$ 则表示系综平均值，即

$$\langle\cdots\rangle = \frac{1}{Z}Tr\left[e^{-\beta H}(\cdots)\right] \ , Z = Tr(e^{-\beta H}) \ . \tag{5.2}$$

为了简化记号，我们约定，除非特别声明，凡是明确写出 (虚) 时间依赖的算符 (例如公式 (5.1) 中的 $\mathcal{O}(t)$ 和 $\mathcal{O}^\dagger(t_0)$) 都代表海森堡绘景的算符。它们被统称为 内插场算符 (interpolating operators)。

一般来说，内插场算符都是由基本场–具体到格点 QCD，也就是夸克场 $\psi_x$，反夸克场 $\bar{\psi}_x$ 以及规范场 $U_\mu(x)$–所构成的局域的 复合算符 (composite operator)，当然原则上也可以是更为广义的算符。由于多数强子都由其量子数 $I^G(J^{PC})$ 描写，所以我们一般都会选择具有确定量子数的算符。当然，这些量子数都是在连续时空时的量子数，具体到格点上的情形，有些量子数需要进行改变。比如说角动量量子数 $J$ 反映的是空间转动下的性质。我们知道在格点上并没有转动不变性，因此这个量子数一定会变化。具体来说，原先连续时空的 $SU(2)$ 的转动不变性退化为它的有限子群–立方群的双重覆盖群 $O_h^D$–的对称性。因此，原先描写连续时空转动不可约表示的量子数 $J$ 就必须替换为 $O_h^D$ 的不可约表示。由于这个问题涉及比较复杂的群表示的知识，为了不至于将读者的关注度过于分散，我们在本节中先不涉及，稍微详细的算符构造我们会在后面专门加以说明 (见第 21节以及附录)。

¶ 这里我们有必要澄清一下欧氏空间 (虚时) 的编时乘积操作的具体含义，特别是考虑到在实际的计算中虚时方向往往并不是无穷大，而且需要加上周期或反周期的边条件。假

[3] 这里请特别注意虚时海森堡绘景中的算符及其厄米共轭的定义问题。在虚时框架下，$\mathcal{O}_H(t) = e^{+tH}\mathcal{O}_S e^{-tH}$，其中 $\mathcal{O}_S$ 是薛定谔绘景中的算符。相应的，其复共轭的海森堡绘景算符的定义是，$\mathcal{O}_H^\dagger(t) = e^{+tH}\mathcal{O}_S^\dagger e^{-tH}$。注意由于哈密顿量是厄米的，但由于我们在虚时的欧氏空间，因此 $\mathcal{O}_H^\dagger(t) \neq [\mathcal{O}_H(t)]^\dagger$，而是 $\mathcal{O}_H^\dagger(t) = [\mathcal{O}_H(-t)]^\dagger$。

定我们虚时方向的大小记为 $\beta$。我们总是对两点函数中两个内插场算符的时间指标做如下的约定

$$t_1, t_2 \in [0, \beta) \ , \tag{5.3}$$

然后我们定义两个算符的编时乘积为：

$$T[\mathcal{O}^{(2)}(t_2)\mathcal{O}^{(1)}(t_1)] = \begin{cases} \mathcal{O}^{(2)}(t_2)\mathcal{O}^{(1)}(t_1) & t_2 > t_1 \\ \pm\mathcal{O}^{(1)}(t_1)\mathcal{O}^{(2)}(t_2) & t_2 < t_1 \end{cases} \ , \tag{5.4}$$

其中的 $\pm$ 表示，如果这两个算符是费米型的需要加上一个负号；玻色型的则不需要。

公式 (5.1) 中的内插场算符 $\mathcal{O}(t)$ 必须具有正确的量子数，以保证 $\mathcal{O}^\dagger(t_0)|\Omega_0\rangle$ 中包含了我们希望研究的强子态。如果时间方向的延伸为无穷，那么这个关联函数–正如公式 (5.1) 的第二行所示–就是一系列随时间指数衰减项的和。但是对于真实的格点 QCD 模拟，时间方向的延伸 $T = \beta$ 总是有限的。因此我们实际上计算的是，

$$C(t, t_0) = \begin{cases} \dfrac{1}{Z} Tr\left[e^{-[\beta-(t-t_0)]H}\mathcal{O}_S e^{-(t-t_0)H}\mathcal{O}_S^\dagger\right] \ , & t > t_0 \\ \pm\dfrac{1}{Z} Tr\left[e^{-[\beta-(t_0-t)]H}\mathcal{O}_S^\dagger e^{-(t_0-t)H}\mathcal{O}_S\right] \ , & t < t_0 \end{cases} \tag{5.5}$$

其中 $\mathcal{O}_S \equiv \mathcal{O}(t=0)$ 是相应的薛定谔绘景下的算符。这个式子充分说明两点关联函数仅仅依赖于两点之间的时间差 $\tau = t - t_0$ 和时间方向尺度 $\beta$。特别值得一提的是，这个结论并不依赖于边界条件的选取，也不依赖于算符 $\mathcal{O}_S$ 的形式。事实上，利用编时乘积的定义 (5.4) 以及两点函数的定义式 (5.1) 我们可以证明：对于玻色型的算符来说，它的两点关联函数是周期的；对于费米型的算符来说，其两点关联函数是反周期的，即，

$$C(t, t_0) = C(\tau) = \pm C(\beta + \tau) \ , \tag{5.6}$$

其中 $\tau = t - t_0$，$\pm$ 则分别对应于玻色/费米的情形。

**练习 5.1** 验证这一点。

利用两点函数的周期性/反周期性，我们可以将相应的两点函数–其中最为典型的是基本玻色场或费米子场的两点函数,这又称为相应的格林函数或传播子–按照所谓的松原频率 (Matsubara frequencey) 进行展开。对这方面希望加强了解的读者可以参考附录 C。

¶ 概括地来说，本小节一开始给出的两点关联函数的重要表达式 (5.1) 是所有格点谱计算的出发点。它体现了两点关联函数的双重人格：一方面，利用路径积分我们可以数值地计算关联函数 (上面一行)；另一方面，它可以视为 Hilbert 空间中算符编时乘积的期望值 (下面一行) 从而直接与体系的能谱相联系。

## 17.2 强子谱计算的基本步骤

本小节中我们将首先列出强子谱的计算的基本步骤，随后我们会逐一地解释每一步的具体过程：

1. 确定需要研究的强子的量子数，从 QCD 的基本场出发构造具有正确量子数的算符集合：$\{\mathcal{O}_\alpha(t):\alpha=1,2,\cdots,N_{op}\}$。这些算符一般涉及某个特定的时间片 $t$，即 $\mathcal{O}(t)$ 一般是由该时间片上的基本场构成，但是算符的三维空间指标则往往已经被以某种形式求和。

2. 构造上述算符集合的 $N_{op}\times N_{op}$ 关联函数 (矩阵)：

$$C_{\alpha\beta}(t)=\left\langle\mathcal{O}_\alpha(t)\mathcal{O}^\dagger_\beta(0)\right\rangle\ , \tag{5.7}$$

   其中时间片 0 往往称为源时间片 (source time slice)；而时间片 $t$ 则称为漏时间片 (sink time slice)。 由于时间平移的对称性，这个 $t=0$ 原则上可以是任何时间片。这里只是以 $t=0$ 为例来说明罢了。

3. 将上述关联函数 (矩阵) 利用路径积分的形式表达出来并利用 Wick 定理将其中的费米子场的缩并化为相应的夸克传播子；

4. 在相应的规范场组态中数值计算相应的夸克传播子并拼接出目标关联函数 $C_{\alpha\beta}(t)$;

5. 对数值上获得的关联函数 $C_{\alpha\beta}(t)$ 进行后续处理以获得我们感兴趣的物理信息。这一般包括下列子步骤：

   (a) 求解广义本征值问题：

$$C(t)\cdot v_\alpha(t)=\lambda_\alpha(t,t_0)C(t_0)\cdot v_\alpha(t)\ , \tag{5.8}$$

   其中 $t_0$ 是一个适当选择的参考时间片。这样我们可以确定一系列的本征值 $\lambda_\alpha(t,t_0)$，其中 $\alpha=1,2,\cdots,N_{op}$ 而 $v_\alpha(t)$ 则是相应的本征矢量;

   (b) 对 $\lambda_\alpha(t,t_0)$ 进行分析确定相应的能量 $E_\alpha$，这就是在这套格子上的强子谱的原始数据；这些 $E_\alpha$ 实际上可以视为相应的有限体积、分立格点上的 QCD 哈密顿量的本征值。

   (c) 对得到的各组 $E_\alpha$ 进行进一步的数值分析和外推获得最终的强子谱的信息。

上述各个步骤中的第一步–一般称为算符构造 (operator construction)–的讨论是个比较复杂的过程，我们将在后面 (见第 21节以及后面的附录) 进行进一步的详细介绍。下面两节中，我们首先以 $\pi$ 介子 (第 18节) 和核子 (第 19节) 为例，简单介绍一下后续的各个步骤。为了简化我们的讨论，我们将首先选取一个算符，即 $N_{op}=1$。后面我们会进一步讨论如何扩展算符的数目。

# 18 简单介子谱的计算

## 18.1 简单的 $\pi$ 介子场算符的构建

¶ 我们知道 $\pi$ 介子是强相互作用中最轻的强子，其中 $\pi^+$ 的价夸克结构由一个 $u$ 夸克 (带 $+2/3$ 电荷单位) 和一个反 $d$ 夸克 (带 $+1/3$ 电荷单位) 构成。[4] 同时 $\pi$ 介子属于赝标介子。因此我们很自然地用算符 $\bar{d}_x\gamma_5 u_x$ 来标志 $\pi^+$ 介子，

$$\pi^+(x) = \bar{d}_x\gamma_5 u_x \ , \tag{5.9}$$

其中我们略写了颜色和狄拉克指标，夸克场的味道指标已经体现在具体的 $u/d$ 之中了。我们期待这样一个算符会“湮灭”一个 $\pi^+$ 粒子或者产生一个它的反粒子–即 $\pi^-$ 粒子。[5] $\gamma_5$ 的存在告诉我们这是一个赝标场。当然，我们还可以构造出更为复杂的赝标场，但是那些都是更为精细的步骤，留待后面处理。目前我们只需要这样一个算符就够了。当然，我们还需要这个算符的厄米共轭：

$$\left(\pi^+(x)\right)^\dagger = \left(\bar{d}_x\gamma_5 u_x\right)^\dagger = -\bar{u}_x\gamma_5 d_x \equiv -\pi_x^- \ , \tag{5.10}$$

其中我们利用了所有欧氏空间的 $\gamma$ 矩阵都是厄米的这个事实。在多数时候，我们构建算符往往会将空间和时间方向分离开来。例如对上述 $\pi$ 介子的算符，我们会将它们记为 $\pi^\pm(x) \equiv \pi^\pm(t,\mathbf{x})$，其中第一个指标 $t$ 标记 (虚) 时间而第二个指标 $\mathbf{x}$ 标记空间坐标。

正如前面步骤中提到的，我们一般会对该算符的空间指标进行某种求和。这主要是为了尽可能扩大相关的信号。例如，我们可以对算符的空间部分进行傅里叶变换，这等价于将算符投影到固定的三动量上：

$$\tilde{\pi}^+(t,\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{V_3}}\sum_{\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\pi^+(t,\mathbf{x}) \ , \tag{5.11}$$

其中 $V_3$ 表示格点的三体积。相应的，我们可以得到它的厄米共轭算符为，

$$\left(\tilde{\pi}^+(t,\mathbf{p})\right)^\dagger = -\frac{1}{\sqrt{V_3}}\sum_{\mathbf{x}} e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\pi^-(t,\mathbf{x}) \ , \tag{5.12}$$

特别的，如果我们取 $\mathbf{p} = \mathbf{0} \equiv (0,0,0)$，那么 $\tilde{\pi}^+(t,\mathbf{p}=\mathbf{0})$ 就对应用一个静止的 $\pi^+$ 介子的算符。否则的话，它对应于一个具有确定三动量 $\mathbf{p}$ 的 $\pi^+$ 介子的算符。

## 18.2 $\pi$ 介子关联函数的表达式

¶ 第二步就是构造 $\pi$ 介子的关联函数 $C^\pi(t,t_0)$。以前面给出的零动量的 $\pi$ 介子算符为例，它的定义为，

$$C^\pi_{\mathbf{0}}(t,t_0) = \langle \tilde{\pi}^+(t,\mathbf{0})\left(\tilde{\pi}^+(t_0,\mathbf{0})\right)^\dagger\rangle \ . \tag{5.13}$$

[4] 相应的，它的反粒子 $\pi^-$ 介子的价夸克结构由一个反 $u$ 夸克和一个 $d$ 夸克构成。

[5] 注意，按照量子场论的通常约定，费米子场 $\psi_x$ 会湮灭一个费米子而产生一个相应的反费米子。因此，$u_x$ 会湮灭一个 $u$ 夸克或产生一个反 $u$ 夸克；类似地，$\bar{d}_x$ 会湮灭一个反 $d$ 夸克或产生一个 $d$ 夸克。因此，我们期待 $\pi_x^+$ 会湮灭一个 $\pi^+$ 粒子。

类似地，我们可以定义任意三动量的 $\pi$ 介子关联函数 $C^{\pi}_{\mathbf{p}}(t,t_0)$，不过我们下面还是以零动量的为例子来说明。将前面的表达式带入我们有，

$$\begin{aligned} C^{\pi}_{\mathbf{0}}(t,t_0) &= -\frac{1}{V_3}\sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\langle \bar{d}(t,\mathbf{x})\gamma_5 u(t,\mathbf{x})\bar{u}(t_0,\mathbf{y})\gamma_5 d(t_0,\mathbf{y})\rangle_{U,F} \\ &= \frac{1}{V_3}\sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\left\langle Tr\left[\overbrace{d_b(t_0,\mathbf{y})\bar{d}_a}(t,\mathbf{x})\gamma_5\overbrace{u_a(t,\mathbf{x})\bar{u}_b}(t_0,\mathbf{y})\gamma_5\right]\right\rangle_U . \end{aligned} \tag{5.14}$$

其中的 $a$ 和 $b$ 代表颜色指标。这个公式的第一行中的期望值 $\langle\cdot\rangle_{U,F}$ 代表了对理论中的所有场–规范场 $U$ 和所有费米子场 $F$–求期望值；到了第二行，我们已经利用 Wick 定理将对费米子场的期望值写成了相应费米子场的缩并 (contraction)，随后的期望值 $\langle\cdot\rangle_U$ 将仅仅对规范场 $U$ 来进行，其中的 $Tr$ 则表示对狄拉克旋量指标求迹。这个公式中出现的费米子场的缩并–又称为费米子传播子或者夸克传播子–实际上就是理论中费米子矩阵的逆矩阵的矩阵元。例如 (略写 Dirac 指标)，

$$\overbrace{d_b(t_0,\mathbf{y})\bar{d}_a}(t,\mathbf{x}) = \left(\mathcal{M}^{(d)}[U_\mu]\right)^{-1}_{b,t_0,\mathbf{y};a,t,\mathbf{x}} , \quad \overbrace{u_a(t,\mathbf{x})\bar{u}_b}(t_0,\mathbf{y}) = \left(\mathcal{M}^{(u)}[U_\mu]\right)^{-1}_{a,t,\mathbf{x};b,t_0,\mathbf{y}} , \tag{5.15}$$

其中 $\mathcal{M}^{(u/d)}[U_\mu]$ 就是我们前面介绍过的 $u/d$ 夸克的费米子矩阵，参见公式 (3.62)。对于 Wilson 费米子来说，它们仅仅是裸质量的对角元不同而已。[6] 当规范场给定的时候，由于费米子矩阵是一个巨大的稀疏矩阵，要完全计算它的完整的逆矩阵几乎在数值上是不允许的。但是费米子矩阵的逆矩阵的特定矩阵元则是可以通过数值方法计算的。我们下面就来说明这个问题。

## 18.3 夸克传播子的数值求解：点源和面源

为了方便起见，我们将夸克场的所有指标统一标记为 $A,B,C,\cdots$，它包含了 Dirac 指标 $\alpha$，颜色指标 $a$ 以及时空指标 $(t,\mathbf{x})$ 即 $A=(\alpha,a,t,\mathbf{x})$。我们要求的夸克传播子为

$$\overbrace{\psi_A\bar{\psi}_B} = [\mathcal{M}[U_\mu]]^{-1}_{A;B} , \tag{5.16}$$

其中 $\psi$ 和 $\bar{\psi}$ 可以取相应不同味道的夸克 (例如上面的 $u/d$)。这个矩阵元可以通过设定一个所谓的点源，然后数值地求解线性方程获得。具体来说，我们定义源场 $\phi^{(B)}_A$，它除了在给定的点 $B$ 之外都等于零：

$$\phi^{(B)}_A = \delta_{A;B} , \tag{5.17}$$

其中 $\delta_{A;B}$ 代表一系列 Kronecker 符号的乘积 (这包括旋量、颜色、时空等)。由于这样的源仅仅在某一个特定的“点”不为零，因此它被形象地称为“点源”。如果我们以 $\phi^{(B)}$ 为源求解线性方程，

$$\mathcal{M}[U_\mu]\cdot X^{(B)} = \phi^{(B)} . \tag{5.18}$$

[6] 如果取同位旋守恒的极限，这时 $u$ 夸克和 $d$ 夸克的质量相同，那么这两个矩阵是完全一样的。

容易证明，这个线性方程的解 $X^{(B)}$ 恰好就是我们要的传播子，

$$\left[X^{(B)}\right]_A = [\mathcal{M}[U_\mu]]^{-1}_{A;B} \ . \tag{5.19}$$

换句话说，只要我们设定一个给定的、位于点 $B$ 的点源，数值地求解线性方程 (5.18)，我们得到的“解矢量” $X^{(B)}_A$ 就对应于传播子 $\overbrace{\psi_A\bar{\psi}_B}$。由此我们看到，要数值地求出完整的费米子矩阵的逆矩阵对应于我们必须在每一个点 $B$ 设定一个点源，求出解矢量 $X^{(B)}$。由于 $B$ 的数目非常庞大–具体到 QCD 来说，它等于 $12TL^3$，其中 $T$，$L$ 分别是格点在 (虚) 时间和空间方向的格点数目–这种数值求解往往是不可行的。

一个点源包括了特定的狄拉克、颜色、时间、空间指标，因此它实际上包括了所有的三动量的贡献。如果我们仅仅需要某个特定的三动量 $\mathbf{p}$，那么我们可以采用所谓的面源–它在某个特定的时间片上不为零。仍然以我们前面处理的 $\mathbf{p}=\mathbf{0}$ 的 $\pi$ 介子关联函数 (5.14) 为例。考虑 $u$，$d$ 两味简并的情形，我们有，

$$C^\pi_{\mathbf{0}}(t,t_0) = \frac{1}{V_3}\sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}}\left\langle \mathcal{Q}^{-1}_{\alpha,a,t,\mathbf{x};\beta,b,t_0,\mathbf{y}}\mathcal{Q}^{-1}_{\beta,b,t_0,\mathbf{y};\alpha,a,t,\mathbf{x}}\right\rangle_U \ , \tag{5.20}$$

其中我们将所有相关的指标都明确地写出来了，当然重复的狄拉克和颜色指标隐含着对其求和。我们同时还定义了矩阵

$$\mathcal{Q}[U_\mu] \equiv \gamma_5\mathcal{M}[U_\mu] \ , \tag{5.21}$$

利用第 三章第 11节中介绍的 Wilson 格点 QCD 的费米子矩阵的 $\gamma_5$ 厄米性关系 (3.66)，我们可以轻易证明 $\mathcal{Q}^\dagger = \mathcal{Q}$。换句话说，我们可以将上述表达式等价地写为

$$C^\pi_{\mathbf{0}}(t,t_0) = \frac{1}{V_3}\sum_{\alpha,a,\mathbf{x}}\sum_{\beta,b,\mathbf{y}}\left\langle \left|\mathcal{Q}^{-1}[U_\mu]_{\alpha,a,t,\mathbf{x};\beta,b,t_0,\mathbf{y}}\right|^2\right\rangle_U \ . \tag{5.22}$$

这个表达式已经非常接近我们最终希望的表达式。但是它还有一个问题。按照我们前面所说，如果我们希望利用点源来求解夸克传播子的话，我们需要对每一个 $\beta$，$b$ 以及 $\mathbf{y}$ 设源，数值求解出 $\mathcal{Q}^{-1}[U_\mu]_{\alpha,a,t,\mathbf{x};\beta,b,t_0,\mathbf{y}}$ 然后再对它们取模方并求和。这涉及 $12V_3$ 次的线性方程的求解。其实在这里我们可以利用规范对称性以及 Elitzur 定理，仅仅求解 12 次 (而不是 $12V_3$ 次！) 就可以了。这个方法对应于将公式 (5.20) 等价地写为

$$C^\pi_{\mathbf{0}}(t,t_0) = \frac{1}{V_3}\sum_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{y}'}\left\langle \mathcal{Q}^{-1}_{\alpha,a,t,\mathbf{x};\beta,b,t_0,\mathbf{y}'}\mathcal{Q}^{-1}_{\beta,b,t_0,\mathbf{y};\alpha,a,t,\mathbf{x}}\right\rangle_U \ , \tag{5.23}$$

注意这个表达式与公式 (5.20) 的区别仅仅在于我们将两个夸克传播子中原本相同的三维坐标 $\mathbf{y}$ 分别写为了 $\mathbf{y}$ 和 $\mathbf{y}'$。显然，这个表达式中 $\mathbf{y}=\mathbf{y}'$ 的那些项给出的就是公式 (5.20) 的结果。重要的是那些 $\mathbf{y}\neq\mathbf{y}'$ 的项的贡献统统都不是规范不变的。因此按照第 10.1小节中介绍的 Elitzur 定理，它们对规范场平均之后一定为零。所以，如果仅仅考虑对规范场平均后的结果，公式 (5.23) 与公式 (5.20) 完全是等价的。但是公式 (5.23) 的好处是，对于一组给定

的 $(\beta, b)$，我们可以通过设定一个面源从而一次性地求出相应的线性方程的解。具体来说，我们可以将其写为，

$$C_{\mathbf{0}}^{\pi}(t,t_0) = \frac{1}{V_3}\sum_{\mathbf{x}}\left\langle\left(\sum_{\mathbf{y}'}\mathcal{Q}^{-1}_{\alpha,a,t,\mathbf{x};\beta,b,t_0,\mathbf{y}'}\right)\left(\sum_{\mathbf{y}}\mathcal{Q}^{-1}_{\alpha,a,t,\mathbf{x};\beta,b,t_0,\mathbf{y}}\right)^*\right\rangle_U , \tag{5.24}$$

需要注意的是，上式中圆括号中的两个量是完全相同的。它就是对给定的 $(\beta, b, t_0)$ 在每一个 $\mathbf{y}$ 点都设置一个点源–从而构成一个我们称之为面源 (wall source) 的源矢量 $\phi^{(\beta,b,t_0)}$：

$$\phi^{(\beta,b,t_0)}_{\alpha,a,t,\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{y}}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ab}\delta_{t,t_0}\delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}} . \tag{5.25}$$

然后求解线性方程

$$\mathcal{Q}\cdot X^{(\beta,b,t_0)} = \phi^{(\beta,b,t_0)} \tag{5.26}$$

我们就得到了解矢量

$$X^{(\beta,b,t_0)}_{\alpha,a,t,\mathbf{x}} = \sum_{\mathbf{y}'}\mathcal{Q}^{-1}_{\alpha,a,t,\mathbf{x};\beta,b,t_0,\mathbf{y}'} , \tag{5.27}$$

而根据公式 (5.24)，这正是我们所需要的，即：

$$C_{\mathbf{0}}^{\pi}(t,t_0) = \frac{1}{V_3}\sum_{\alpha,a,\mathbf{x}}\sum_{\beta,b}\left\langle\left|X^{(\beta,b,t_0)}_{\alpha,a,t,\mathbf{x}}\right|^2\right\rangle_U . \tag{5.28}$$

我们这里虽然仅仅以零动量的 $\pi$ 介子关联函数为例，但是任意动量的介子关联函数其实也是类似的，这些我们留作练习。

*练习 5.2* 仿照上面关于面源的讨论，证明两味简并的 Wilson 格点 QCD 中任意三动量 $\mathbf{p}$ 的 $\pi$ 介子关联函数的表达式可以写为

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{p}}^{\pi}(t,t_0) &= \langle\tilde{\pi}^+(t,\mathbf{p})\left(\tilde{\pi}^+(t_0,\mathbf{p})\right)^\dagger\rangle \\ &= \frac{1}{V_3}\sum_{\mathbf{x}}e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}\left\langle\left[\sum_{\mathbf{y}'}\mathcal{Q}^{-1}_{\beta,b,t_0,\mathbf{y}';\alpha,a,t,\mathbf{x}}\right]\cdot\left[\sum_{\mathbf{y}}\mathcal{Q}^{-1}_{\alpha,a,t,\mathbf{x};\beta,b,t_0,\mathbf{y}}e^{+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{y}}\right]\right\rangle_U \end{aligned} \tag{5.29}$$

其中重复的 Dirac 旋量指标和颜色指标都隐含着对其求和。说明这个关联函数可以通过设置两个合适的面源并求解线性方程获得，其中一个面源的三动量为零，另一个为 $\mathbf{p}$。

## 18.4 连通图和非连通图的贡献

¶ 为了简化讨论，我们前面讨论的介子传播子选择的是 $\pi^\pm$ 的算符。如果我们选择中性 $\pi$ 介子的算符为其内插场算符，那么我们会发现关联函数要初看起来要复杂很多，但实际上最后也仅仅有所谓的连通图的贡献。

**练习 5.3** 利用 $\pi^0$ 内插场算符

$$\pi^0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}_x\gamma_5 u_x - \bar{d}_x\gamma_5 d_x\right] \ . \tag{5.30}$$

构造相应的动量空间的内插场算符 $\tilde{\pi}^0(t,\mathbf{p})$ 以及相应的关联函数 $C^{\pi}_{\mathbf{p}}(t,t_0) = \langle\tilde{\pi}^0(t,\mathbf{p})(\tilde{\pi}^0(t_0,\mathbf{p}))^\dagger\rangle$。证明对于简并的两味夸克 QCD(从而同位旋是好的对称性) 而言，它的表达式仍然与前面从 $\pi^\pm$ 内插场出发构造的关联函数 (例如公式 (5.29)) 是相同的。

这是因为 $\pi^0$ 和 $\pi^\pm$ 一起构成了同位旋空间的矢量。如果同位旋是个好的对称性，那么同位旋矢量的不同分量构成的关联函数的确应当包含相同的物理。但是如果我们考虑同位旋空间是标量的介子–例如 $\eta$ 介子– 那么情形就不完全相同了。$\eta$ 介子的内插场算符可以取为

$$\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}_x\gamma_5 u_x + \bar{d}_x\gamma_5 d_x\right] \ . \tag{5.31}$$

这时我们构造的关联函数

$$C^{\eta}_{\mathbf{p}}(t,t_0) = \langle\tilde{\eta}(t,\mathbf{p})\,(\tilde{\eta}(t_0,\mathbf{p}))^\dagger\rangle \tag{5.32}$$

仿照前面的推导我们发现，对于两味简并的夸克，这个关联函数由下式给出：

$$\begin{aligned} C^{\eta}_{\mathbf{p}}(t,t_0) &= \frac{1}{V_3}\sum_{\mathbf{x},\mathbf{y}} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x})}\Big\langle \mathcal{Q}^{-1}_{\beta,b,t_0,\mathbf{y};\alpha,a,t,\mathbf{x}}\mathcal{Q}^{-1}_{\alpha,a,t,\mathbf{x};\beta,b,t_0,\mathbf{y}} \\ &- \mathcal{Q}^{-1}_{\beta,b,t_0,\mathbf{y};\beta,b,t_0,\mathbf{y}}\mathcal{Q}^{-1}_{\alpha,a,t,\mathbf{x};\alpha,a,t,\mathbf{x}}\Big\rangle \ , \end{aligned} \tag{5.33}$$

其中重复的旋量和颜色指标隐含着求和。请特别注意这个表达式中的两行中的贡献的不同之处：第一行的贡献与我们前面讨论的 $\pi$ 介子关联函数中出现的完全相同；它们代表两个价夸克从时空点 $(t,\mathbf{x})$ 传播到另一个时空点 $(t_0,\mathbf{y})$ 以及倒过来传播的过程；第二行则对应于从同一个时空点传播到同一个时空点的过程。如果我们将它们用带箭头的费米子线画出来的话，第一类对应于连接时空点 $(t,\mathbf{x})$ 和时空点 $(t_0,\mathbf{y})$ 之间的两条带箭头的线；第二类则对应于分别从时空点 $(t,\mathbf{x})$ 和时空点 $(t_0,\mathbf{y})$ 出发回到自身的带箭头的两条互不连通的线。因此，这两类贡献分别被称为 连通图 (connected diagrams) 和 非连通图 (disconnected diagram) 的贡献。

这两类贡献不仅仅是拓扑上不等价，它们的数值计算也完全不同。对于连通图的贡献，我们前面已经说明了，可以利用设置适当的面源并求出相应的关联函数；对于非联通图的贡献，由于它是从一个时空点到自身的传播子，因此没有办法通过设置合适的面源或点源来实现这一点。正因为如此，计算非连通图的贡献往往会比较费计算资源。最为直接的方法就是对每一个“点”$(\beta,b,t_0,\mathbf{y})$ 设置一个点源，求解矩阵 $\mathcal{Q}$ 的线性方程，这个过程必须对所有的 $(\beta,b,\mathbf{y})$ 进行，最后将所得到的结果相加。这对应于需要求解线性方程的次数正比于格点的三体积 $V_3$。另外一种方法是利用 随机源 的方法来进行估计。