

全相同的对称性，但是 QCD 真空不是自由真空，而是手征对称性自发破缺了的真空。这导致正负宇称的核子具有不同的能量和矩阵元。一般认为，如果我们升高温度，越过 QCD 的相变点，在那时候体系的手征对称性得以恢复，我们将又会回到正负宇称态完全简并的情形。详细的讨论可以参考相关的文献。¹² 当然，如果我们直接使用宇称的投影算子来构造核子算符，我们将仅仅得到具有确定宇称的核子的能量。

21 格点上算符构造及相关点群的表示¹³

前面曾经提及，在多数的格点计算中我们需要考虑转动群在分立格点上的限制—即立方群—及其子群的各个表示。本节中我们就稍微仔细地讨论一下这个问题。我们的基本讨论是转动群及其覆盖群 $SU(2)$ 和立方群 O 及其覆盖群 O^D 。为了使得本节的内容不要过于繁杂，我们将一些比较复杂的内容放在了附录之中供有兴趣的读者随后研究。

21.1 立方群 O 及其表示

立方群 O 是包含 24 个元素的点群，它包含了所有使得立方体保持不变的对称转动。它实际上与另一个点群—完全四面体群 (full tetrahedral group) T_d —是完全同构的，这个群包含了一个正四面体的所有对称操作 (包含转动和反射)，同时立方群也同构与四个物体的置换群 S_4 。最原始的立方群 O 中并没有包括宇称 (空间反射) 的变换。如果我们要将宇称也包括在对称性之中，我们需要将 O 与宇称相应的群 Z_2 进行直积，这样得到的群就是 O_h ，它具有 48 个群元。

表 5.1: 立方群 O 的基本性质及其各个不可约表示的特征标。

	E identity	$3C_2$ π , axis	$8C_3$ $\pm 2\pi/3$, body diagonals	$6C_4$ $\pi/2$, axis	$6C'_2$ π , face diagonals
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	-1	-1
E	2	2	-1	0	-1
T_1	3	-1	0	1	-1
T_2	3	-1	0	-1	1

在群表示论中所有的群元可以分为互不相交的若干个共轭类 (conjugacy class)，在同一共轭类中的群元具有相同的特征标—在特定的群表示中这就是该群元对应的矩阵的迹。

¹²参见 G. Aarts *et al*, “Nucleons and parity doubling across the deconfinement transition.”, Phys. Rev. D 92, 014503 (2015).

¹³关于点群的知识可以参考相关的书籍，例如 [10] 的第 XII 章。

同一个共轭类中的群元之间具有某种等价关系。对有限群来说，它的不等价不可约表示 (irreducible representation, irrep) 的个数与它的共轭类的数目恰好相同。对我们感兴趣的立方群 O 来说，它的 24 个群元可以分为 5 个不同的共轭类，因此也具有 5 个不等价不可约表示： A_1, A_2, E, T_1 和 T_2 ，它们的维数分别为 1, 1, 2, 3 和 3。另外一个值得一提的事实是，有限群不等价不可约表示维数的平方和恰好等于该群的元素的个数。对立方群来说，我们很容易发现： $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24$ ，这说明我们已经穷尽了所有的不可约表示。

我们对立方群感兴趣是因为它代表了特殊三维空间转动群 $SO(3)$ 的一个“分立版本”。特殊三维空间转动群的不可约表示由粒子的角动量量子数 $J = 0, 1, 2, \dots$ 来标记，相应的不可约表示是 $(2J+1)$ 维的，¹⁴ 我们一般会用一个黑体的 \mathbf{J} 来标记，例如 $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ 等等。对于一个分立的格点来说，连续的转动不变性退化为分立的立方群对称性。相应地，我们需要将原先连续空间的转动对称性下的不可约表示按照分立的立方群表示来分解。就立方群来说，这个分解的具体公式如下，

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= A_1, \\ \mathbf{1} &= T_1, \\ \mathbf{2} &= E + T_2, \\ \mathbf{3} &= A_2 + T_1 + T_2, \\ \mathbf{4} &= A_1 + E + T_1 + T_2, \dots\end{aligned}\tag{5.52}$$

如果需要我们可以进一步完成包含更高角动量表示的分解。

立方群 O 本身并没有包括宇称变换。要将宇称的量子数加上我们需要考虑 O 与宇称变换群 $Z_2 = \{I, P\}$ 的直积群： $O_h = O \otimes Z_2$ 。相应的不可约表示也仍然还是表 5.1 中的那些，只不过每一个表示需要附加一个角标来标记它在宇称变换下的行为。文献中一般有两种标记法：一种是传统的标记方法，对于宇称为偶/奇的表示分别用字母 “ g/u ” (源于德文 gerade/ungerade)；第二种标记法是直接利用 \pm 来标记，这个更接近于粒子物理中对粒子宇称的标记方法。例如： $A_1^g \equiv A_1^+, A_1^u \equiv T_1^-$ 等等。

21.2 立方群 O 的双重覆盖群 O^D

如果我们仅仅关心使得一个立方体不变的转动变换，那么我们得到的就是立方群 O 。它的表示只有我们上述讨论的五种。这些表示又被称为张量表示，以区别于所谓的旋量表示。在张量表示中，绕任何一个轴的 2π 的转动就是恒等变换，对应于群的单位元 I 。但在连续空间我们知道，我们还可以考虑绕某个轴转 2π 之后并不回到单位元，而是回到另外一个元素 J ，而是可以等于负的单位元。只有额外再转 2π 之后才能注定回到单位元，即 $J^2 = I$ 。对于特殊三维转动群 $SO(3)$ 来说，这样一个群元 J 的加入实际上将群扩展为

¹⁴ 就立方群 O 而言，它只有对应于整数 J 的张量表示。但是对于下面要介绍的 O^D 群来说，它还存在对应于半奇数的描写费米子的旋量表示。

了 $SU(2)$ 。 $SO(3)$ 对应于真正三维转动不变的群，它仅仅具有张量表示，对应于整数角动量量子数； $SU(2)$ 则是 $SO(3)$ 的 双重覆盖群 (double covering group)，它除了具有与玻色子对应的整数角动量量子数的表示之外，还具有与费米子对应的半奇数角动量量子数表示。完全类似地，我们可以从 $SO(3)$ 的分立版本—立方群 O —出发进行扩充，加入群元 J ，这样获得的双重覆盖群就是群 O^D ，这个群具有 48 个元素。

表 5.2：除了表 5.1 所列的张量表示之外的群 O^D 的旋量表示。

	I	J	$6C_4$	$8C_3$	$8C_6$	$6C_8(\pm\pi/2)$	$6C_8(\pm3\pi/2)$	$12C'_4$
G_1	2	-2	0	-1	1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	0
G_2	2	-2	0	-1	1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	0
H	4	-4	0	1	-1	0	0	0

在加入了 2π 转动元素 J 之后获得的群 O^D ，除了前面表 5.1 中所列的五个张量的不可约表示之外，还存在三个额外的 旋量表示： G_1 , G_2 和 H ，它们的维数分别为 2, 2 和 4。
• • • •

这些表示又被称为 射影表示 (ray representation)。由于 $2^2 + 2^2 + 4^2 = 24$ ，因此群 O^D 不会再有其他的不可约表示了。

¶ 需要注意的是，上述讨论的仍然仅仅是立方群 O 的双重覆盖群，还没有涉及宇称。要将宇称的对称性加入，我们只需要将 O^D 与宇称的对称群 Z_2 进行直积即可。所得到的群记为 O_h^D ，它包含 96 个群元。它的不可约表示数目也比 O^D 的多一倍，我们仍然将沿用 O^D 的那些表示名称，只不过再加上一个标志宇称奇偶的角标“g/u”即可。因此我们会有 A_1^g , T_2^u , G_1^u , H^g 等等。

表 5.3：群 O_h^D 中各个转动下坐标轴的变动情况。

	I_s	$C_{4z}(\pi/2)$	$C_{4y}(\pi/2)$	$C_{6,xyz}(2\pi/3)$	$C'_{2,xz}(\pi)$
x	$-x$	y	$-z$	y	z
y	$-y$	$-x$	y	z	$-y$
z	$-z$	z	x	x	x

¶ 要获得某个特定的对称变换的矩阵表示我们利用下面的事实：立方群中的任意一个元素总是可以通过若干个绕 y 轴和绕 z 轴的 $\pi/2$ 转动的乘积来“生成”。因此，我们只需要知道这两个具体的转动—记为 $C_{4y}(\pi/2)$ 和 $C_{4z}(\pi/2)$ —的矩阵表示就够了，剩下的就是矩阵的乘法而已。在表 5.3 中我们列出了各个对称操作下每个坐标的变换方式，通过比较，我们就可以方便地确定某个特定的对称操作如何表达为上述两种旋转的乘积的形式。例如，读者不难验证：

$$C_{6,xyz}(2\pi/3) = C_{4y}(\pi/2)C_{4z}(\pi/2), C'_{2,xz}(\pi) = C_{6,xyz}(2\pi/3)C_{4z}(\pi/2). \quad (5.53)$$

正因为如此，在任何一个不可约表示之中，我们仅仅需要知道 $C_{4y}(\pi/2)$ 和 $C_{4z}(\pi/2)$ 的矩阵表示就够了。

¶ 要获得某个特定表示中一个特定的群元的矩阵表示，我们可以从量子场论的最基本的旋量表示出发。在量子场论中我们知道，二分量的旋量场是 Lorentz 群最基本的非平庸表示。任何高阶的表示都可以用它的表示进行直积或直和获得。具体到与夸克对应的狄拉克场，它就是一个左手旋量和一个右手旋量的直和。一个四分量的狄拉克场在四维 Lorentz 变换下的行为由矩阵 $\Lambda_{1/2}$ 给出，¹⁵

$$\Lambda_{1/2} = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}}, \quad (5.54)$$

其中 $S^{\alpha\beta} = \frac{i}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$ 。为了获得相应立方群下的变换行为，我们只需要设定其中相应的参数即可。例如，对于绕 y 轴旋转 $\pi/2$ 的操作，我们需要设 $\omega_{13} = -\omega_{31} = \theta = \pi/2$ 而其余所有的 $\omega_{\alpha\beta} = 0$ 即可。当然，具体的矩阵形式依赖于我们对于 γ -矩阵的选取。关于这些具体的内容，我们在正文中就不再深入了。有兴趣的读者可以参考后面的附录。

¶ 最后让我们给出分立版本的表示与 $SU(2)$ 表示之间的对应关系：

$$\frac{1}{2} = G_1, \frac{3}{2} = H, \frac{5}{2} = G_2 + H, \dots \quad (5.55)$$

如果需要更高角动量的表示，可以通过关系 $G_1 \times G_1 = A_1 + T_1$ 等等来获得。

22 涂摩方法介绍

¶ 从正则量子化的哈密顿体系来看，前面讨论的强子两点关联函数可以看成是不同时刻的海森堡绘景 中相应算符的关联函数。因此，它具有 Hilbert 空间的谱分解形式，参见本章一开始的公式 (5.1)。从这个角度分析可以帮助我们分析如何获得信噪比更好的关联函数。假如我们希望研究的强子对应的量子态为 $|H\rangle$ ，我们可以试图利用“更好的”产生算符，它不仅仅能够从 QCD 真空中产生一个我们感兴趣的粒子，而且要尽可能地增大重叠矩阵元 $|\langle H|\mathcal{O}|\Omega\rangle|$ (信号) 并降低其他的矩阵元 $|\langle H'|\mathcal{O}|\Omega\rangle|$ ，其中 $H' \neq H$ (噪音)。这就引出所谓的涂摩源 (smeared source) 或者又称为 延展源 (extended source) 的方法。¹⁶

涂摩源的物理动机十分清晰。以我们前面讨论的核子传播子为例，我们构造算符 $\bar{N}^\pm(y = (t_0, \mathbf{0}))$ 的目的是希望在某个时刻 t_0 从 QCD 真空中产生出一个质心位于 $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 的核子。核子是有结构的 QCD 束缚态，它并不是一个绝对的点。因此，用绝对空间局域的点源算符 $\bar{N}^\pm(t_0, \mathbf{0})$ 来产生核子并不是最为有效的。或者说这个算符除了产生位于 $(t_0, \mathbf{0})$ 这个点的一个静止的核子之外，一般还会产生其他的能量相同的核子态，但是其位置会稍

¹⁵ 参见任何量子场论教科书，例如 Peskin 和 Schroeder，或者参考作者的相关讲义。

¹⁶ 涂摩是我发明的词。smear 的字面原意是“涂抹”，即将原先在空间集中的东西平摊到一个更大的空间区域中的意思。考虑到“抹”字太过口语化，我将其换成了“摩”，含有揣摩、琢磨、研究之意，这也更接近 smearing 在格点量子色动力学中的含义，因为这类操作往往都必须经过反复地调试和琢磨。

稍偏离 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 但仍在一个核子典型尺度之内; 它还会产生其他的能量更高的态—例如各种内部激发的态, 或者具有非零三动量的核子态等等。这些态的存在一般都会对我们希望计算的最低的核子态关联函数造成影响, 它们是实际上统计误差的重要来源。因此, 要获得一个比较纯净的、质心位于原点的核子, 我们需要将我们的算符 $\bar{N}^\pm(y)$ 适当扩展, 至少应当扩展到大约一个核子尺度的范围内。这就是构造涂摩源的主要物理动机。

如何对原先空间集中的点源进行涂摩当然是一个比较技术性的问题。由于我们具有规范场和费米子场, 因此涂摩可以分为规范场的涂摩和夸克场的涂摩。当然, 也可以将两者都进行涂摩。通常的涂摩还可以分为两大类: 规范固定后的涂摩和规范协变的涂摩。前者通常是首先对规范场进行规范固定, 然后再进行涂摩。例如, 在谱学的某些计算中, 人们常常首先将规范场固定到库仑规范, 然后再进行各种涂摩, 甚至直接利用面源。在第二类涂摩技术中一般是使用规范协变的涂摩方法。最为古老的是所谓的 APE 涂摩, Jacobi 涂摩等。后来人们将其推广到所谓的 Laplace-Heaviside 涂摩, 又称为蒸馏(distillation)。值得一提的是近年来发展起来的所谓的 Wilson 流(Wilson flow)的方法, 实际上也等价于一种涂摩方法。下面我们分别简要地介绍一下这些方法。

¶ 最为古老的 APE 涂摩的方法最早被应用在纯规范场的数值计算中。我们将原先的一个规范链接 $U_\mu(x)$ 替换为该链接与其钉书钉 $S_\mu(x)$ 变量之和的一个线性组合, 然后再投影回原先的规范群 $SU(3)$:

$$U_\mu(x) \Rightarrow \left((1 - \alpha) U_\mu(x) + \alpha \sum S_\mu(x) \right) \mapsto SU(3), \quad (5.56)$$

其中 $S_\mu(x)$ 表示 $U_\mu(x)$ 的某一个钉书钉变量而求和则遍及 $U_\mu(x)$ 的所有钉书钉; α 表示某个线性组合系数; 最后的 \mapsto 表示对前面的结果投影回 $SU(3)$ 。这个过程可以对组态中的每一个链接进行, 这样经过涂摩我们就获得了一个新的组态。新的组态仍然具有与原先组态同样的规范对称性和时空对称性。因此, 这个过程可以继续迭代地进行 N_s 次。这就是 APE 涂摩(APE smearing)的基本步骤。它由两个参数决定: 一个是原先链接与其钉书钉的线性组合系数 α ; 另一个就是涂摩迭代的次数 N_s 。近年来人们还提出了 HYP 涂摩(HYP smearing)¹⁷ 以及所谓的 茁壮链接涂摩(stout-link smearing)等技术。¹⁸ 经过规范场的涂摩, 我们一般称新的链变量为 胖链变量(fat link)。因为它不仅仅包含原先链变量的信息, 还包含了它的附近的其他链变量的信息。

¶ 上面说到的是对于规范场的涂摩技术。我们同样可以对费米子场(即夸克场和反夸克场)进行涂摩。我们下面以简单的由夸克和反夸克场的双线性项构成的介子算符为例来说明这个问题。为此, 我们可以选取一个点源(参见第 18.3 小节)为

$$\phi_A^{(B)} = \delta_{A;B}. \quad (5.57)$$

¹⁷ 参见 A. Hasenfratz and F. Knechtli, Phys.Rev.D 64, 034504 (2001).

¹⁸ 参见 C. Morningstar and M. Peardon, Phys.Rev.D 69, 054501 (2004).

我们令矩阵 $M_{A;B}$ 为,

$$\begin{aligned} M &= \sum_{n=0}^N \kappa^n H^n, \\ H_{x;y} &= \sum_{j=1}^3 \left[U_j(t, \mathbf{x}) \delta_{x+\hat{j};y} + U_j^\dagger(t, \mathbf{x} - \hat{j}) \delta_{x-\hat{j};y} \right], \end{aligned} \quad (5.58)$$

注意其中矩阵 H (从而矩阵 M 也是如此!) 仅仅在三维空间和色空间是非平庸的, 它们在 Dirac 旋量空间是平庸的。然后我们可以构造涂摩的夸克场:

$$\psi^{(B)} = M \cdot \phi^{(B)}. \quad (5.59)$$

它由中心位于 B 的夸克场构成, 同时由于矩阵 H 的作用同时兼具了周边点的夸克场。通过调节参数 N 和 κ , 我们可以获得不同的涂摩了的夸克源。这就是著名的 Jacobi 涂摩。它是一种规范协变的涂摩方法。



相关的阅读



这一章我们讨论了格点 QCD 中谱学的计算

