



北京大学
PEKING UNIVERSITY

“第二届无中微子双贝塔衰变及相关物理”研讨会

2023年5月19-23日, 珠海

无中微子 $\beta\beta$ 衰变及其与双伽莫夫-泰勒跃迁的 关联性研究

王亚坤

合作者：孟杰、赵鹏巍

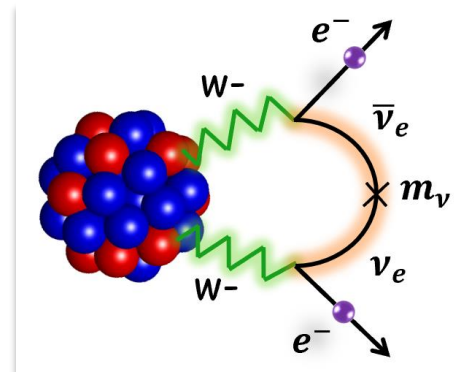
目录

- 研究背景
- 相对论组态相互作用密度泛函 (ReCD) 理论
- 衰变算符与核矩阵元
- 结果与讨论
- 总结

无中微子 $\beta\beta$ 衰变与核矩阵元

□ 无中微子 $\beta\beta$ 衰变 ($0\nu\beta\beta$) $(A, Z) \rightarrow (A, Z + 2) + e^- + e^-$

- ✓ 检验轻子数是否守恒
- ✓ 确定中微子的 Majorana 属性
- ✓ 中微子的质量排序和绝对质量
- ✓ 宇宙中物质和反物质的不对称



Avignone, Elliott, Engel, Rev. Mod. Phys. 80, 481 (2008)

□ $0\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元

$$[T_{1/2}^{0\nu}]^{-1} \sim G^{0\nu} |M^{0\nu}|^2 f(U_{ei}, m_i, \xi)$$

$$M^{0\nu} = \langle \Psi^i | \hat{Q}^{0\nu} | \Psi^f \rangle \text{ 原子核矩阵元}$$

$$f(U_{ei}, m_i, \xi) \propto \langle m_{\beta\beta} \rangle^2 \text{ 有效中微子质量}$$

- ✓ 联系实验半衰期与潜在的粒子物理学发生机制
- ✓ 分析和解释实验结果
- ✓ 确定新物理参数

$0\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元研究现状

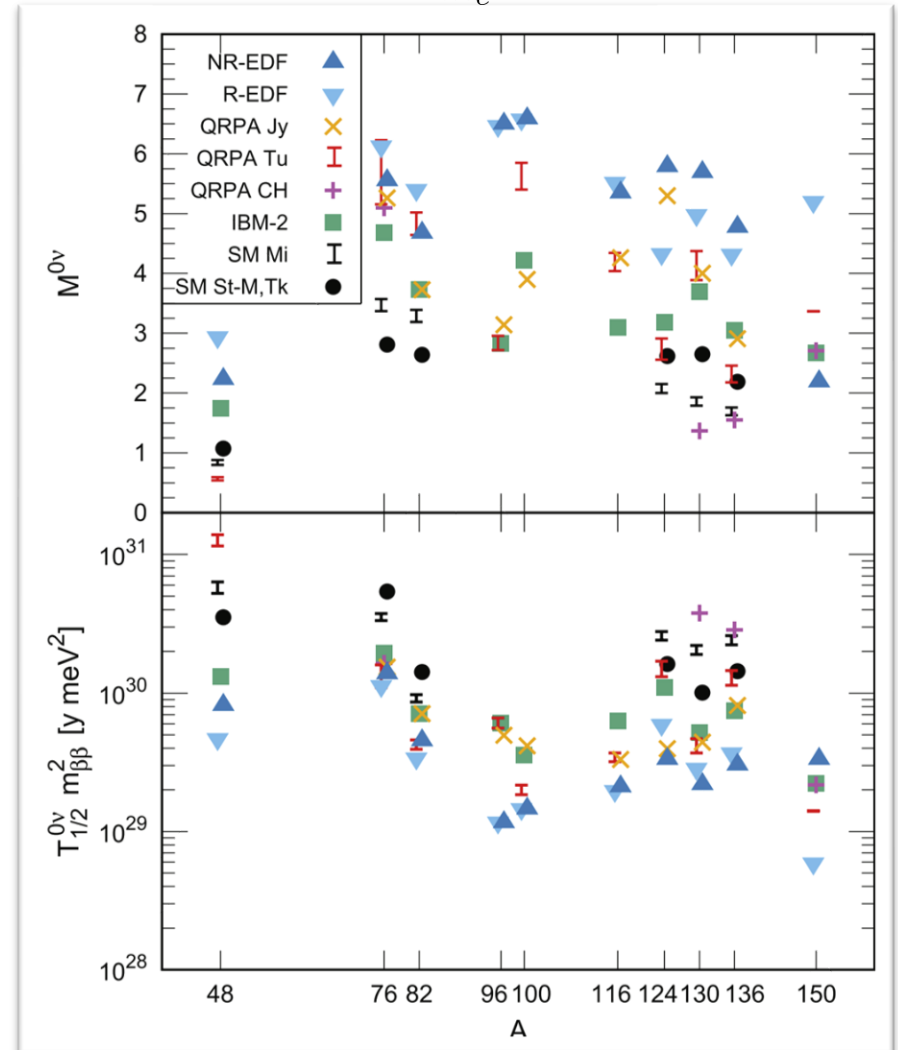
核结构层面:

- ✓ 形变及其涨落
- ✓ 同位旋矢量对关联及其涨落
- ✓ 同位旋标量对关联及其涨落
- ✓ 非集体关联和模型空间

衰变算符层面:

- ✓ 高阶核子流与核子尺寸效应
- ✓ 核子-核子间短程关联
- ✓ 封闭近似
- ✓ 算符的相对论效应
- ✓ 手征两体弱流

$$[T_{1/2}^{0\nu}]^{-1} = G^{0\nu} |M^{0\nu}|^2 \left| \frac{\langle m_{\beta\beta} \rangle}{m_e} \right|^2, M^{0\nu} = \langle \Psi^f | \hat{Q}^{0\nu} | \Psi^i \rangle$$



Yao, Meng, Niu, Ring, PPNP 126, 103965 (2022)

双伽莫夫-泰勒 (DGT) 跃迁

□ 双电荷交换 (DCE) 反应: $N_T(A, Z) + N_p(a, z) \rightarrow N_T(A, Z + 2) + N_p(a, z - 2)$

✓ 双费米跃迁 (DF)

✓ 双伽莫夫-泰勒跃迁 (DGT), 主导反应过程

Vogel et al., PLB 212, 259 (1988)

□ DCE 反应的微分截面可以分解成反应因子、弹核 DGT 跃迁矩阵元、以及靶核 DGT 跃迁核矩阵元的乘积

✓ 通过实验测得的微分截面, 提取 DGT 跃迁核矩阵元

Santopinto et al., PRC 98, 061601(R) (2018)

□ DGT 跃迁和 $0\nu\beta\beta$ 衰变的初末态相同, 算符的自旋依赖部分相似 \Rightarrow 两个衰变过程的核矩阵元具有关联性?

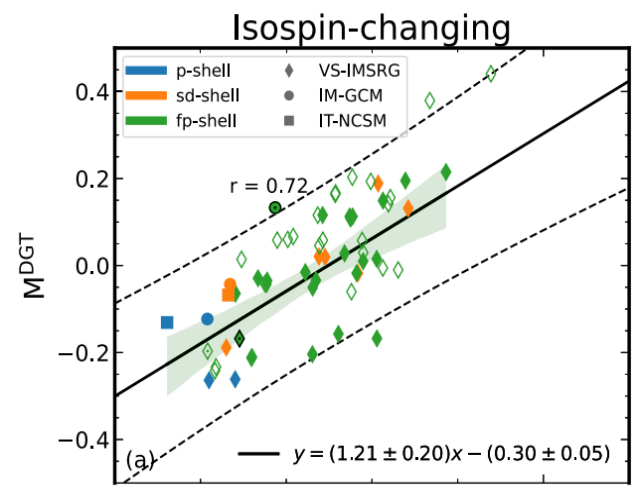
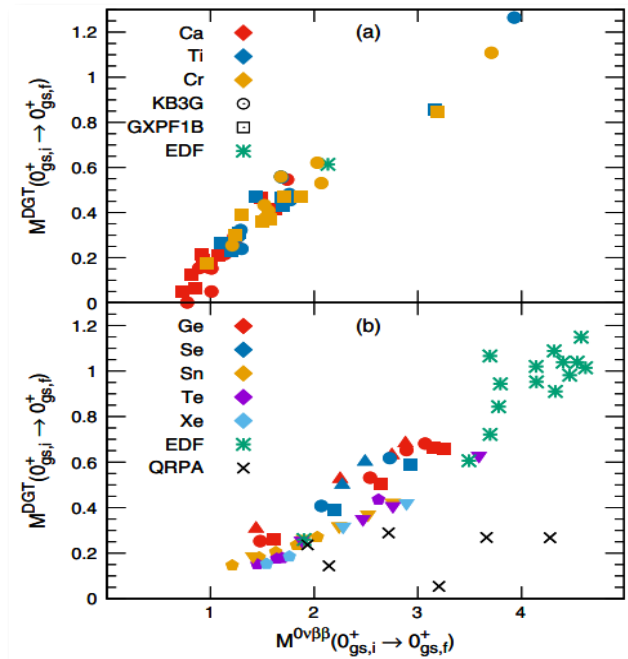
Rodríguez et al., PLB 719, 174 (2013), Cappuzzello et al., EPJA 51, 145 (2015)

如果两者存在关联, 则有望通过 DCE 实验结果, 约束 $0\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元

DGT 跃迁与 $0\nu\beta\beta$ 衰变的关联性

- 壳模型、非相对论密度泛函 (轴对称): DGT 和 $0\nu\beta\beta$ 衰变之间存在**强的线性关联**
- 关联起源于 DGT 跃迁和 $0\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元的**短程主导特性**
Shimizu et al., PRL 120, 142502 (2018)
- 基于手征核力的第一性原理方法对**轻核**的计算表明, 对于同位旋改变的跃迁过程, DGT 与 $0\nu\beta\beta$ 衰变的**关联较弱**
- DGT 跃迁核矩阵元具有**较显著的中程和长程贡献** *Yao et al., PRC 106, 014315 (2022)*

线性关联是否存在以及线性关联的起源是什么值得进一步研究



本文工作

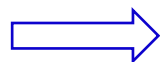
- 基于相对论组态相互作用密度泛函 (ReCD) 理论, 计算了 ^{48}Ca 、 ^{76}Ge 、 ^{82}Se 、 ^{96}Zr 、 ^{100}Mo 、 ^{116}Cd 、 ^{124}Sn 、 ^{128}Te 、 ^{130}Te 、 ^{136}Xe 的 DGT 跃迁和 $0\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元:
 - ✓ 研究了 DGT 跃迁与 $0\nu\beta\beta$ 衰变之间的关联性
 - ✓ 通过对 $0\nu\beta\beta$ 衰变算符进行分波分解, 给出了 DGT 跃迁和 $0\nu\beta\beta$ 衰变之间存在线性关联的原因

相对论密度泛函理论

相对论拉氏量密度与哈密顿量:

$$(\bar{\psi} \mathcal{O} \Gamma \psi), \quad \mathcal{O} \in \{1, \tau\}$$

$$\Gamma \in \{1, \gamma_\mu, \gamma_5, \cancel{\gamma_\mu \gamma_5}, \cancel{\sigma_{\mu\nu}}\}$$



$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\text{free}} + \mathcal{L}^{4f} + \mathcal{L}^{\text{der}} + \mathcal{L}^{\text{em}}$$

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \mathcal{H}(\mathbf{r})$$

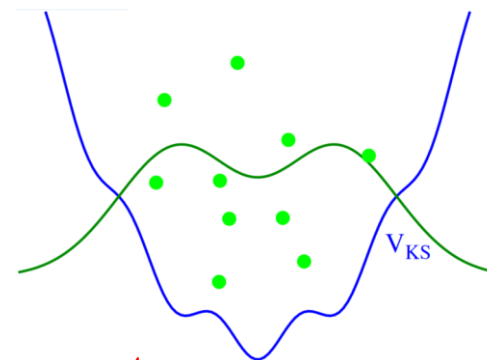
相对论密度泛函:

$$E \equiv \langle \Phi | \hat{H} | \Phi \rangle = \int d\mathbf{r} \left\{ \sum_{i=1}^A \psi_i^\dagger (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m) \psi_i \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \alpha_S \rho_s^2 + \frac{1}{3} \beta_S \rho_s^3 + \frac{1}{4} \gamma_S \rho_s^4 + \frac{1}{2} \delta_S \rho_s \Delta \rho_s$$

$$+ \frac{1}{2} \alpha_V j_\mu j^\mu + \frac{1}{4} \gamma_V (j_\mu j^\mu)^2 + \frac{1}{2} \delta_V j_\mu \Delta j^\mu$$

$$\left. + \frac{1}{2} \alpha_{TV} \vec{j}_\mu \vec{j}^\mu + \frac{1}{2} \delta_{TV} \vec{j}_\mu \Delta \vec{j}^\mu + \frac{1}{2} e^2 A_\mu j_p^\mu \right\}$$



$$|\Phi\rangle = \prod_{k=1}^A \hat{a}_k^\dagger |0\rangle \quad \text{Slater 行列式}$$

相对论 Kohn-Sham 运动方程:

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{V}) + V^0 + \beta(m + S)] \psi_k = \varepsilon_k \psi_k$$

$$\rho_s = \sum_{i=1}^A \bar{\psi}_i \psi_i \quad j^\mu = \sum_{i=1}^A \bar{\psi}_i \gamma^\mu \psi_i$$

$$\vec{j}^\mu = \sum_{i=1}^A \bar{\psi}_i \gamma^\mu \tau_3 \psi_i$$

ReCD 理论：核多体波函数

□ 试探波函数：

$$|\Psi_\alpha\rangle = \sum_{\kappa} f_{\kappa}^{\alpha} |\Phi_{\kappa}\rangle, \quad |\Phi_0\rangle = \prod_k \hat{\beta}_{\kappa} |-\rangle$$

$$|\Phi_{\kappa}\rangle \in \{|\Phi_0\rangle, \hat{\beta}_{\pi_i}^{\dagger} \hat{\beta}_{\pi_j}^{\dagger} |\Phi_0\rangle, \hat{\beta}_{\nu_i}^{\dagger} \hat{\beta}_{\nu_j}^{\dagger} |\Phi_0\rangle, \hat{\beta}_{\pi_i}^{\dagger} \hat{\beta}_{\pi_j}^{\dagger} \hat{\beta}_{\nu_i}^{\dagger} \hat{\beta}_{\nu_j}^{\dagger} |\Phi_0\rangle, \dots\}$$

□ 对称性恢复、广义本征方程求解

$$|\Psi_{\alpha}^J\rangle = \sum_{K=-J}^J \sum_{\kappa} f_{K\kappa}^{J\alpha} \hat{P}_{MK}^J |\Phi_{\kappa}\rangle$$

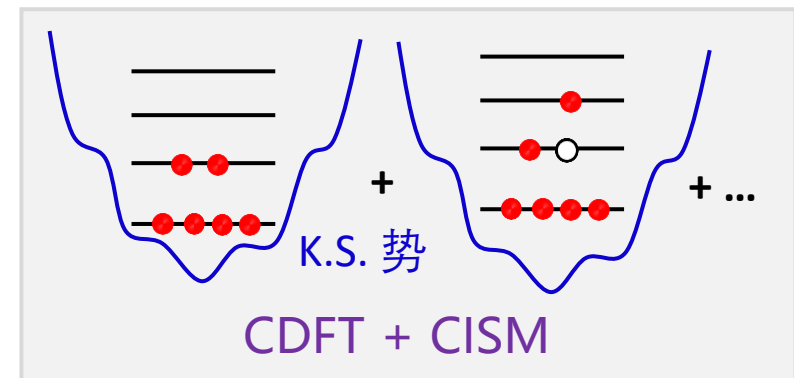
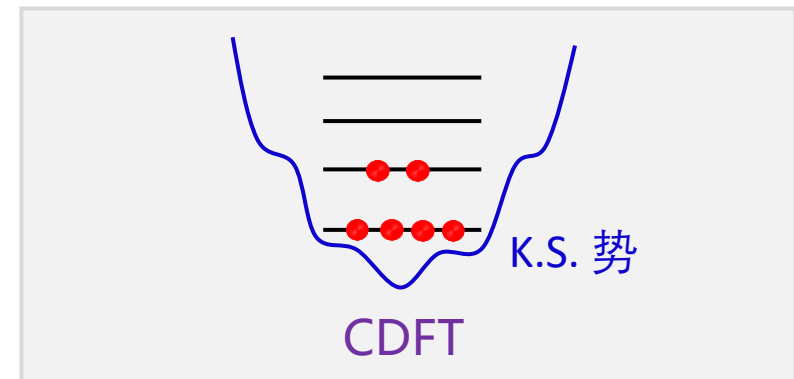
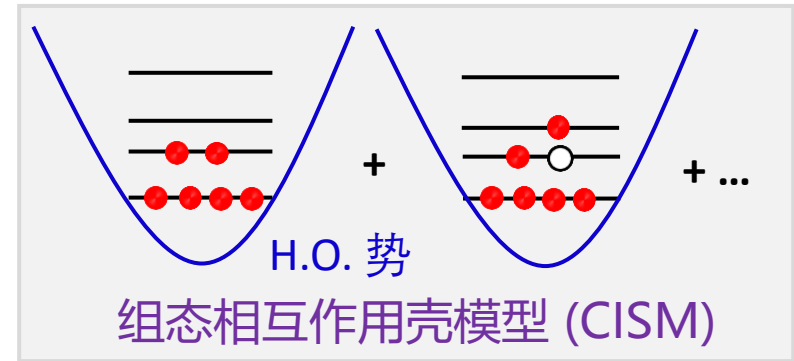
$$\sum_{K'\kappa'} \{ \mathcal{H}_{K\kappa';\kappa K'}^J - E_{\alpha}^J \mathcal{N}_{K\kappa';\kappa K'}^{J\alpha} \} f_{K'\kappa'}^{J\alpha} = 0$$

Relativistic Configuration-interaction
Density functional (ReCD) theory

Zhao, Ring, and Meng, PRC 94, 041301 (R) (2016)

Wang, Zhao, and Meng, PRC 105, 054311 (2022)

Wang, Zhao, and Meng, arXiv: 2304.12009 (2023)



衰变算符与核矩阵元

□ DGT 跃迁核矩阵元:

$$M^{\text{DGT}} = \langle \Psi^{I_f} | \sum_{1,2} [\hat{\sigma}_1 \otimes \hat{\sigma}_2]^0 \tau_1^+ \tau_2^+ | \Psi^{I_i} \rangle$$

□ $0\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元:

$$M^{0\nu} = \sum_{\alpha} \langle \Psi^{I_f} | \hat{O}_{\alpha} | \Psi^{I_i} \rangle$$

$$\text{衰变算符: } \hat{O}_{\alpha} = \frac{4\pi R}{g_A^2} \int \int d^3x_1 d^3x_2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)}}{q} \frac{[\mathcal{J}_{\mu}^{\dagger}(\mathbf{x}_1)\mathcal{J}^{\mu\dagger}(\mathbf{x}_2)]_{\alpha}}{q + E_d}$$

$$\alpha = VV : g_V^2(\mathbf{q}^2)[(\bar{\psi}(\mathbf{x}_1)\gamma_{\mu}\tau_{-}\psi(\mathbf{x}_1))][(\bar{\psi}(\mathbf{x}_2)\gamma^{\mu}\tau_{-}\psi(\mathbf{x}_2))]$$

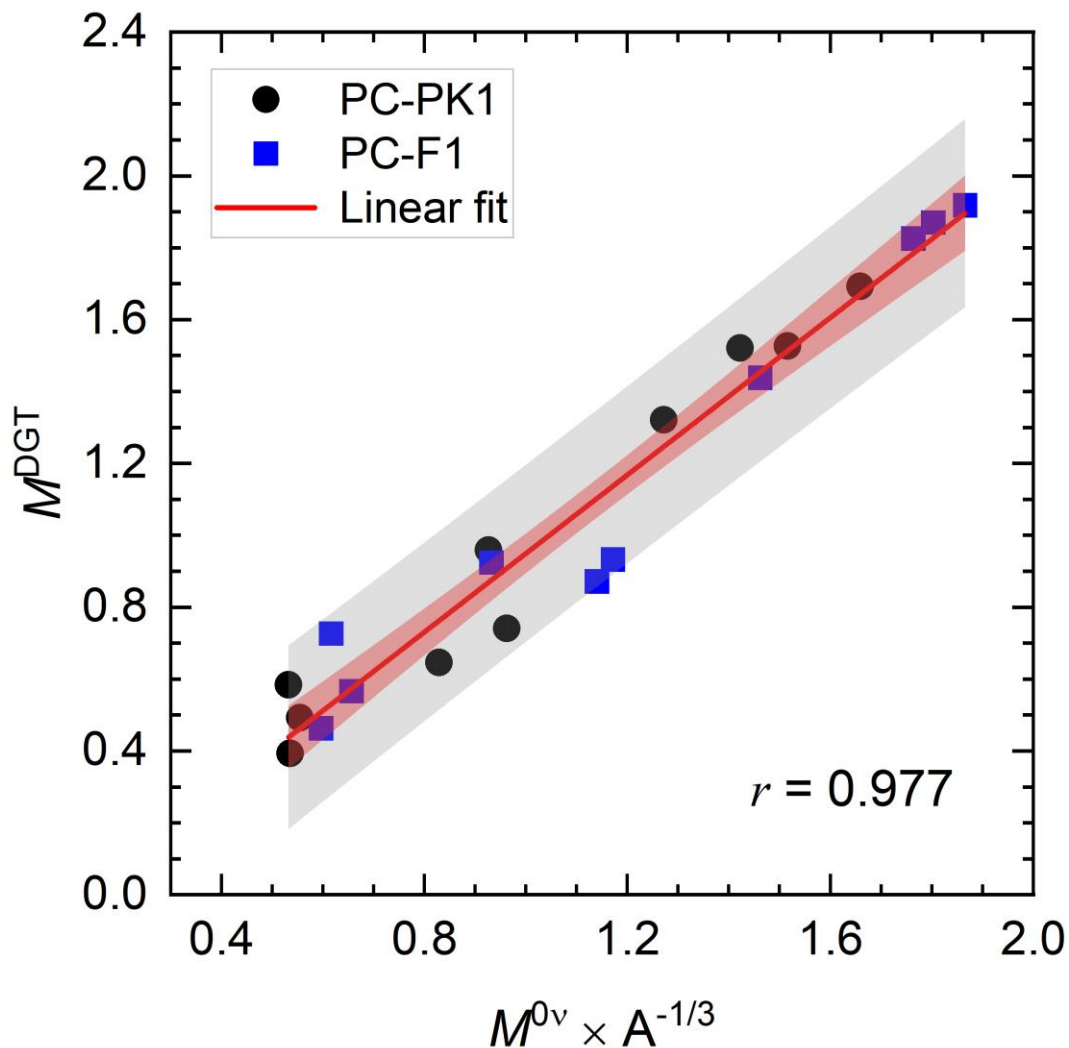
$$\alpha = AA : g_A^2(\mathbf{q}^2)[(\bar{\psi}(\mathbf{x}_1)\gamma_{\mu}\gamma_5\tau_{-}\psi(\mathbf{x}_1))][(\bar{\psi}(\mathbf{x}_2)\gamma^{\mu}\gamma_5\tau_{-}\psi(\mathbf{x}_2))]$$

$$\alpha = AP : 2g_A(\mathbf{q}^2)g_P(\mathbf{q}^2)[(\bar{\psi}(\mathbf{x}_1)\boldsymbol{\gamma}\gamma_5\tau_{-}\psi(\mathbf{x}_1))][(\bar{\psi}(\mathbf{x}_2)\mathbf{q}\gamma_5\tau_{-}\psi(\mathbf{x}_2))]$$

$$\alpha = PP : g_P^2(\mathbf{q}^2)[(\bar{\psi}(\mathbf{x}_1)\mathbf{q}\gamma_5\tau_{-}\psi(\mathbf{x}_1))][(\bar{\psi}(\mathbf{x}_2)\mathbf{q}\gamma_5\tau_{-}\psi(\mathbf{x}_2))]$$

$$\alpha = MM : g_M^2(\mathbf{q}^2)[(\bar{\psi}(\mathbf{x}_1)\frac{\sigma_{\mu i}}{2m_p}q^i\tau_{-}\psi(\mathbf{x}_1))][(\bar{\psi}(\mathbf{x}_2)\frac{\sigma^{\mu i}}{2m_p}q_i\tau_{-}\psi(\mathbf{x}_2))]$$

ReCD 理论：DGT 跃迁与 $0\nu\beta\beta$ 衰变的关联性



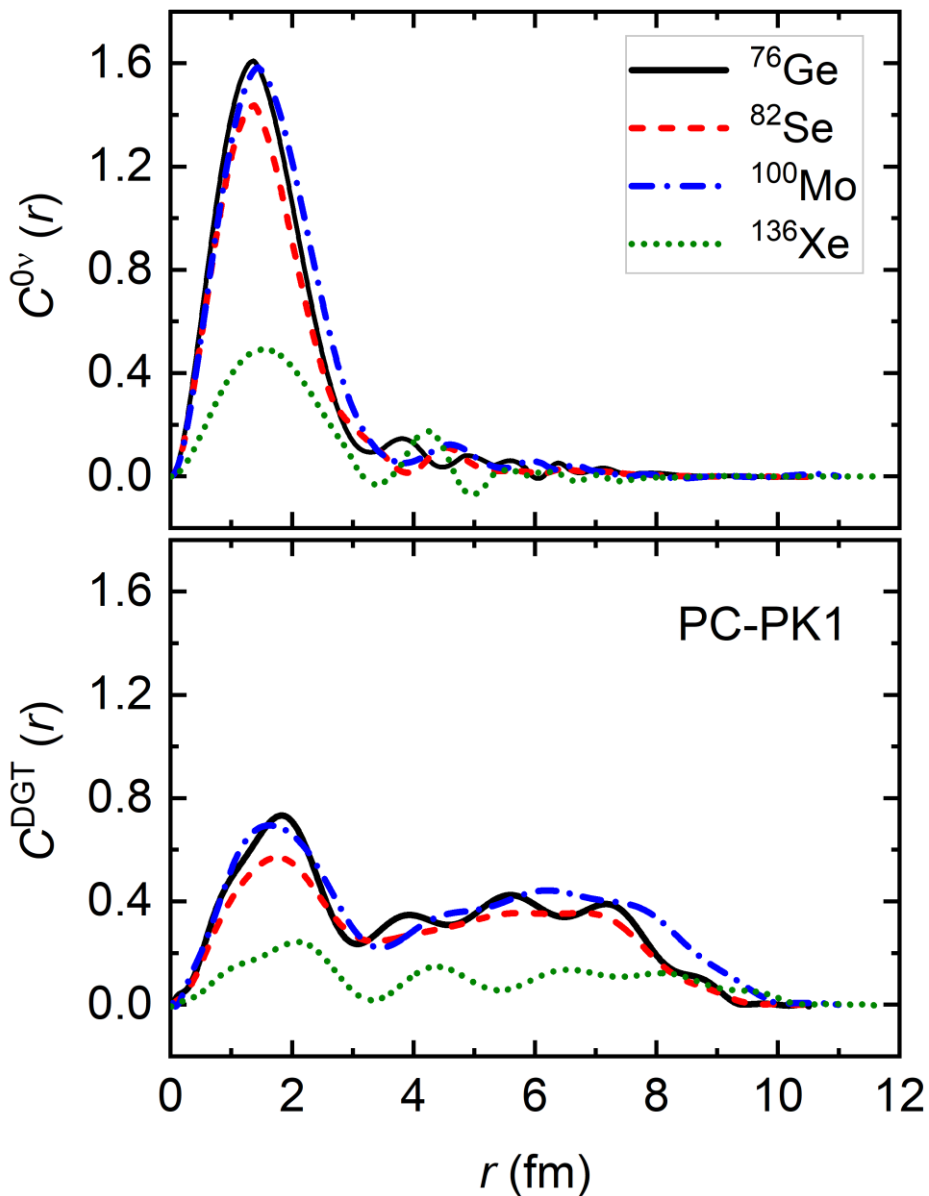
ReCD 理论对 ^{48}Ca , ^{76}Ge , ^{82}Se , ^{96}Zr , ^{100}Mo , ^{116}Cd , ^{124}Sn , $^{128,130}\text{Te}$, ^{130}Te , ^{136}Xe DGT 跃迁和 $0\nu\beta\beta$ 衰变的计算结果

两者之间存在强的线性关联，相应的关联系数为 $r = 0.977$

$$M^{DGT} = (1.093 \pm 0.057) \cdot M^{0\nu} \cdot A^{-1/3} - (0.144 \pm 0.068)$$

线性关联对于 PC-PK1 和 PC-F1 两个密度泛函均存在

ReCD 理论：核矩阵元随衰变核子距离的分布



$$M^\alpha = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 C^\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

↓

$$M^\alpha = \int dr C^\alpha(r)$$

$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2); \mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$

- $0\nu\beta\beta$ 衰变: $M^{0\nu}$ 的分布主要集中在 $r < 3$ fm 范围内
- DGT 跃迁: M^{DGT} 在 $r = 3$ fm 以内以及 $r = 3$ fm 以外均具有较显著分布
- M^{DGT} 并不具有“短程主导”特征

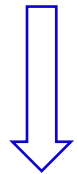
ReCD 理论: $0\nu\beta\beta$ 衰变算符的分解

$$\langle 13|O^{0\nu}|24\rangle^{AA} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{g_A^2(q^2)}{q(q+E_d)} \langle 1|\gamma^0\gamma_\mu\gamma_5 e^{iq\cdot r}|2\rangle \langle 3|\gamma^0\gamma^\mu\gamma_5 e^{-iq\cdot r}|4\rangle$$



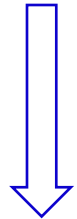
$e^{\pm iq\cdot r}$ 球谐函数展开

$$\langle l_1 j_1 || [\sigma_1 Y_L]_J || l_2 j_2 \rangle \langle l_3 j_3 || [\sigma_1 Y_L]_J || l_4 j_4 \rangle \times \int \frac{q^2 dq}{(2\pi)^3} \frac{g_A^2(q^2)}{q(q+E_d)} \langle n_1 l_1 | j_L(qr) | n_2 l_2 \rangle \langle n_3 l_3 | j_L(qr) | n_4 l_4 \rangle$$



$L = 0$ 分波

$$\langle l_1 j_1 || \sigma_1 || l_2 j_2 \rangle \langle l_3 j_3 || \sigma_1 || l_4 j_4 \rangle \times \langle n_1 l_1 | \frac{1}{r} | n_2 l_2 \rangle \langle n_3 l_3 | \frac{1}{r} | n_4 l_4 \rangle$$



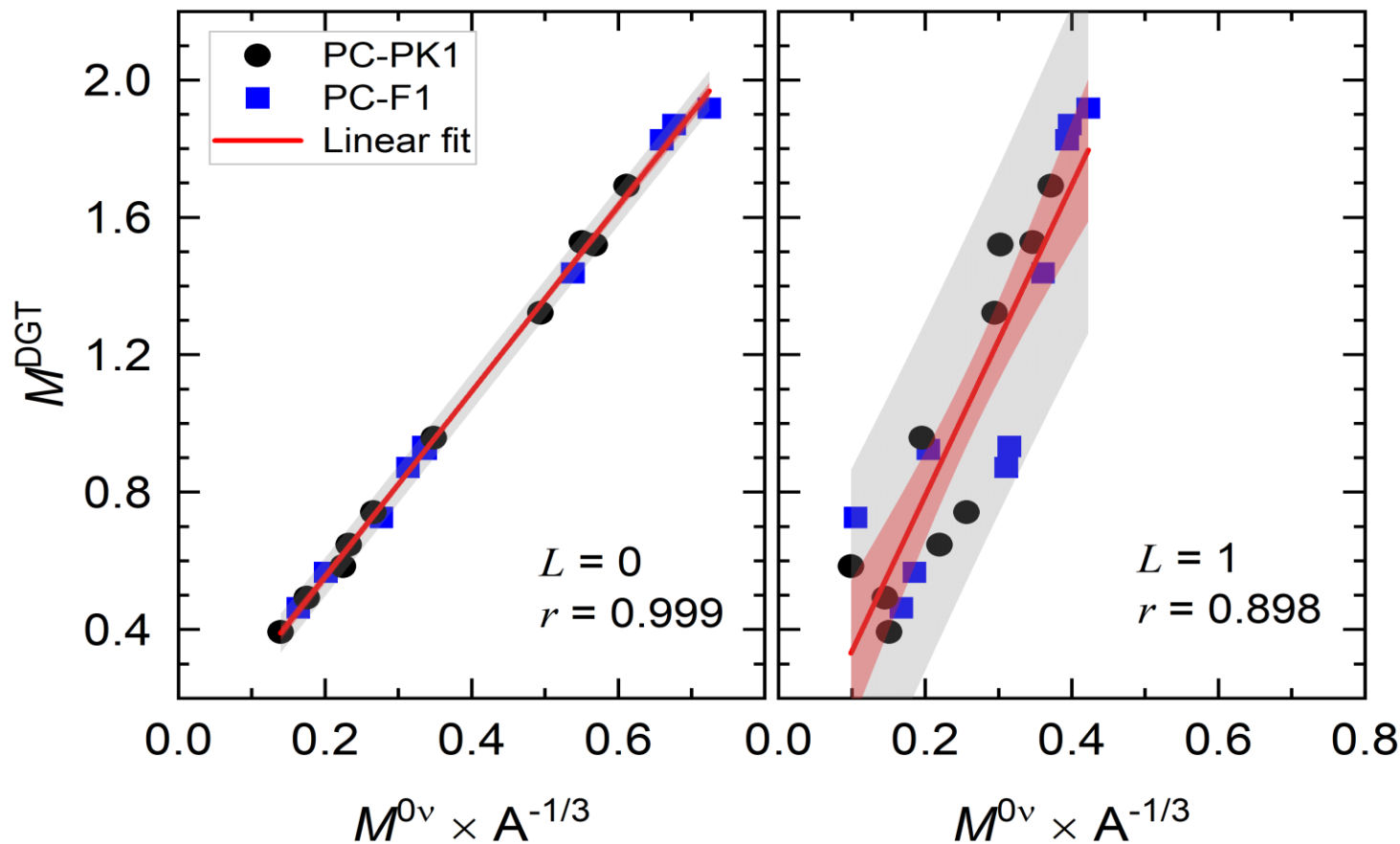
选择定则: $l_1 = l_2, l_3 = l_4, j_1 = j_2, j_2 \pm 1$

径向部分: $n_1 = n_2, n_3 = n_4$ 主导贡献

$$\langle l_1 j_1 || \sigma_1 || l_1 j_2 \rangle \langle l_3 j_3 || \sigma_1 || l_3 j_4 \rangle \times \delta_{n_1 n_2} \delta_{n_3 n_4} \text{ DGT 核矩阵元}$$

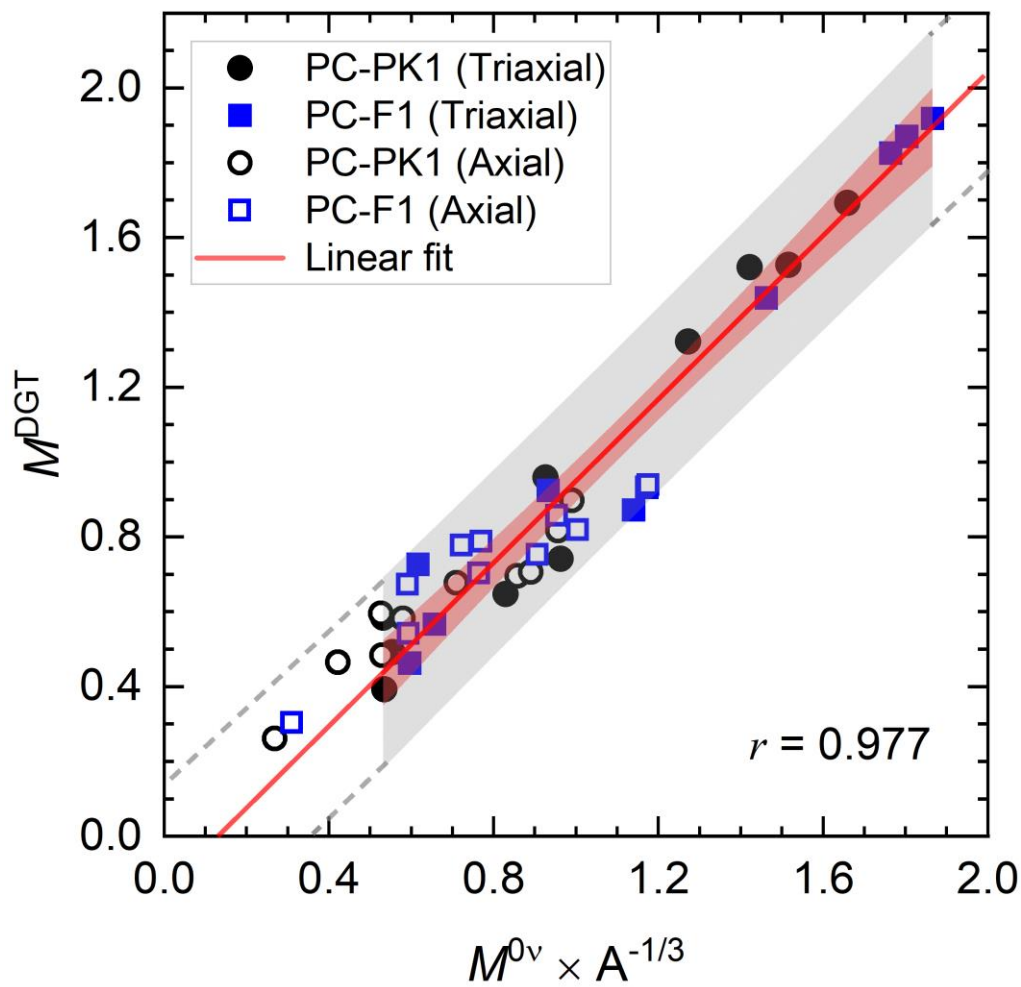
$0\nu\beta\beta$ 算符展开的 $L = 0$ 分量对应 DGT 跃迁算符!

ReCD 理论: $0\nu\beta\beta$ 衰变算符的分解



- $L = 0$ 分量贡献的核矩阵元与 DGT 跃迁核矩阵存在强关联
- 线性关联起源于 $0\nu\beta\beta$ 算符 $L = 0$ 分量与 DGT 算符的相似性

ReCD 理论：线性关联的形变依赖性

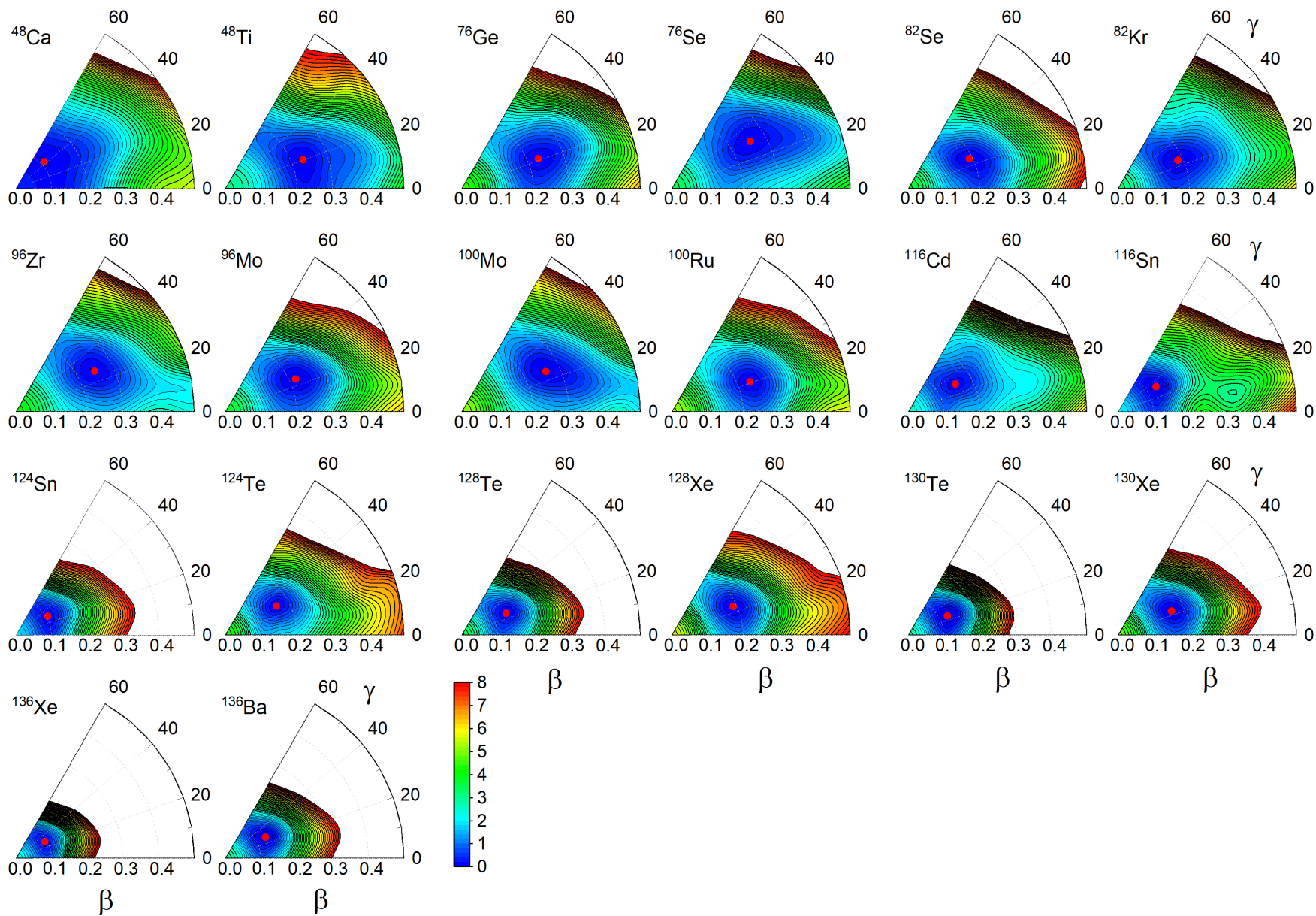


- 仅考虑了三轴形变的计算结果参与线性拟合
- 轴对称计算结果很好地落在线性拟合结果的附近 $\Rightarrow 0\nu\beta\beta$ 衰变与 DGT 之间的线性关联对形变不敏感

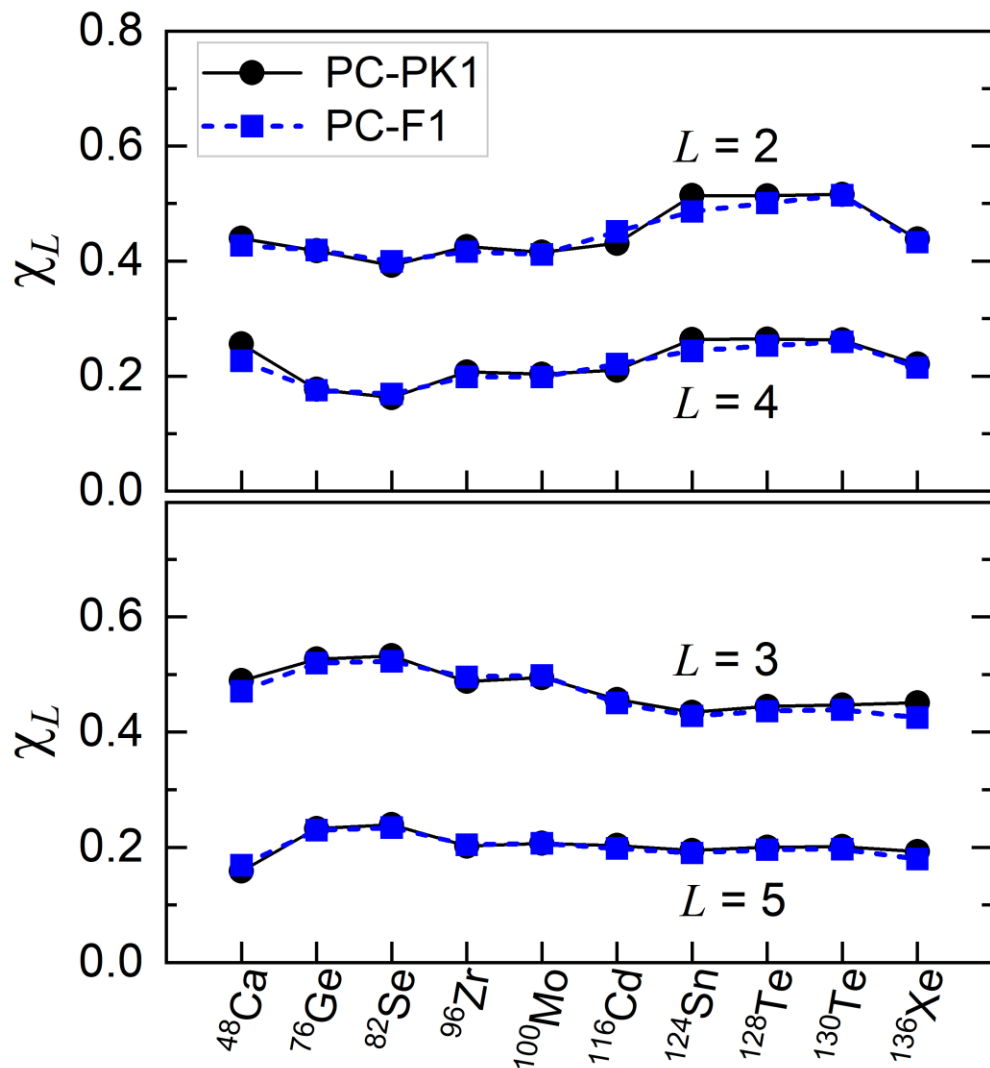
总结

- 基于相对论组态相互作用密度泛函理论，计算了 ^{48}Ca 、 ^{76}Ge 、 ^{82}Se 、 ^{96}Zr 、 ^{100}Mo 、 ^{116}Cd 、 ^{124}Sn 、 ^{128}Te 、 ^{130}Te 、 ^{136}Xe 的 $0\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元和 DGT 跃迁核矩阵元：
 - ✓ $0\nu\beta\beta$ 衰变与 DGT 跃迁之间存在强的线性关联，且该线性关联对密度泛函和形变并不敏感
 - ✓ $0\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元具有短程主导的特征，但 DGT 核矩阵元并不具有短程主导的特征
 - ✓ 存在线性关联的原因在于： $0\nu\beta\beta$ 衰变算符的分波展开中，贡献最大的 $L = 0$ 分波与 DGT 算符具有极强的相似性
 - ✓ 通过双电荷交换反应，确定 DGT 跃迁核矩阵元，有助于约束 $0\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元

0^+ 态位能曲面



ReCD 理论: $0\nu\beta\beta$ 衰变算符的分解



- L 每增加 2, 对核矩阵元的贡献约降低一半
- 考虑更高偶数阶分波的贡献, 不会影响 $0\nu\beta\beta$ 衰变与 DGT 核矩阵元之间的关联性
- 考虑更高奇数阶分波的贡献, 倾向于降低 $0\nu\beta\beta$ 衰变与 DGT 核矩阵元之间的关联性

奇数分波贡献约占偶数分波贡献的 40% ~ 60%, 显著小于偶数分波的贡献 \Rightarrow 总的 $0\nu\beta\beta$ 衰变核矩阵元与 DGT核矩阵元之间存在强的线性关联

$$\chi_L^{\text{even}} = M_L^{0\nu} / M_{L=0}^{0\nu}, \chi_L^{\text{odd}} = M_L^{0\nu} / M_{L=1}^{0\nu}$$