拓扑荷密度算符及η η'的格点QCD研究

报告人：苏玥

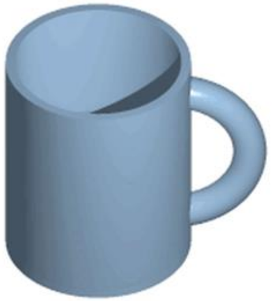
导师：桂龙成

April 21,2023

湖南師範大學
HUNAN NORMAL UNIVERSITY

什么是拓扑?

=



- 即使这两个对象在几何形状上有所不同，但它们在拓扑上完全等价。
- 对于三维对象，我们可以用来区分二者的主要是它们具有的孔数。
- 将这种不破坏既定规则的拉伸称为同胚。
- 具有拓扑结构的场可以看作是拓扑空间到另一个拓扑空间的映射。

拓扑在物理领域中的应用

- 拓扑在物理学的各个领域都有着广泛的应用。
- 凝聚态领域：拓扑超导，拓扑绝缘体，孤子，涡旋等，高能领域：瞬子，拓扑荷

Instanton
A. A. Belavin, et al., Phys. Lett. B 59, 85

θ 真空
C. G. Callan,et al., Phys. Lett. B 63, 334

η 质量

G. Veneziano, 1979, Nucl. Phys. B 159, 213

什么是拓扑荷?

- 可以采用 Cartan-Maurer 形式来表征拓扑不变量

$$\mathcal{J}[g] = \int d\theta^1 d\theta^2 \cdots d\theta^d \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_d} \times \mathrm{Tr}\left\{g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_1}} g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_2}} \cdots g^{-1}(\theta)\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^{i_d}}\right\},$$

- 考虑四维欧氏空间 SU(3) 规范场的情形，杨-米尔斯方程有如下的经典解

$$iA_i(x) = \left(\frac{r^2}{r^2 + R^2}\right) g_1^{-1}(\hat{x})\partial_i g_1(\hat{x})$$

什么是拓扑荷?

- 该形式解具有非平庸的拓扑结构，对应的拓扑不变量为

$$\mathcal{J}[g] = -(3\mathrm{N}/8)\epsilon_{ijkl} \int \mathrm{d}^4 x F_{\alpha ij} F^{\alpha}_{kl}$$

- 对应的缠绕数即为拓扑荷，

$$q(x) = \frac{g^2}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \mathrm{Tr}\, F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}$$

$$Q(x) = \int q(x)\, \mathrm{d}^4 x$$

- 拓扑荷可以用于区分不同拓扑结构的规范场。

什么是拓扑荷?

- QCD 的非平庸真空拓扑结构吸引了大量研究者的兴趣：

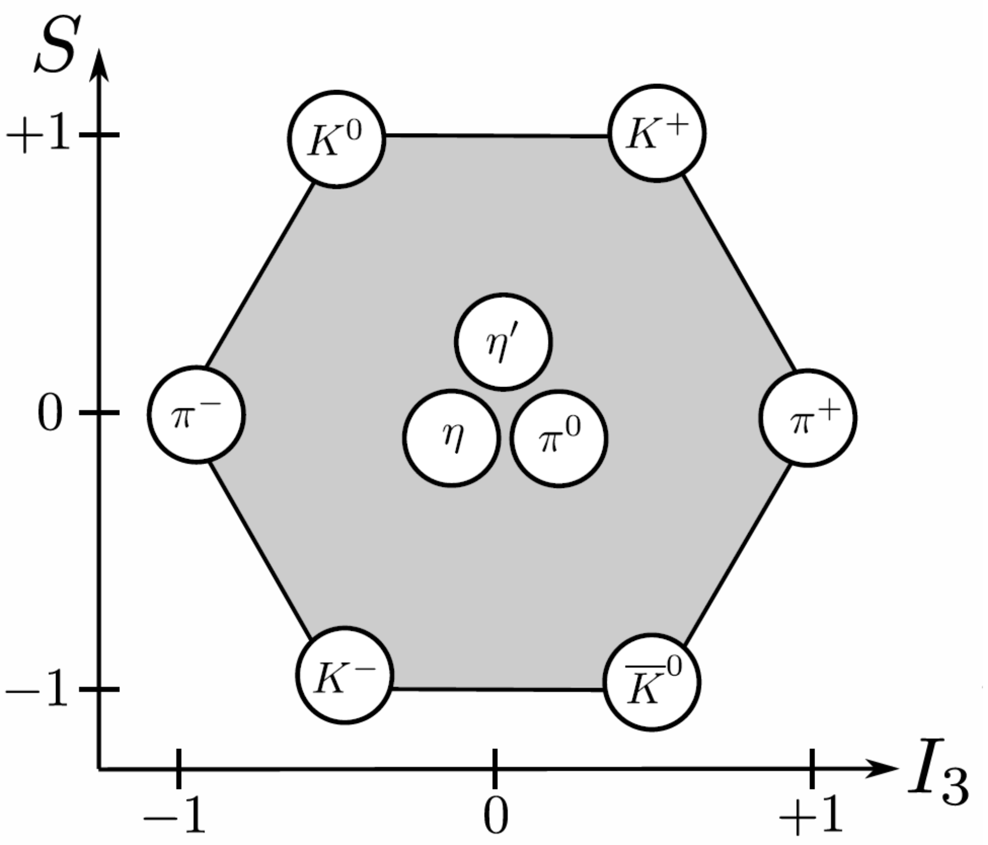
  E. Witten, Nucl. Phys. B 156, 269 (1979) 171，拓扑磁化率与 η' 质量的联系

  Sz. Borsanyi et al, Nature 539 (2016) 7627，用高温下拓扑磁化率来估计轴子质量

- 此外，规范场的非平庸拓扑性质也可以解释 $U(1)_A$ 反常问题。

研究背景

拓扑荷与$U(1)_A$



- 强相互作用中赝标量道最轻的粒子是八个赝标介子，根据夸克模型，它们是八重态。
- 为什么这些粒子质量如此轻？
  是对称性自发破缺产生的戈德斯通玻色子。在夸克质量为 0 时，我们期望它们的质量严格为0。
- 由于QCD 拉氏量还具有 $\boldsymbol{U(1)_A}$ 对称性，它的自发破缺应该给出味单态，即第九个戈德斯通玻色子。但是最轻的单态赝标介子η' 质量远重于八重态的赝标介子。

拓扑荷与$U(1)_A$

- 这一疑难的解决与量子反常有关。1969 年，Adler-Bell-Jackiw 在研究$\boldsymbol{\pi^0} \rightarrow \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}$时，计算三角图发现轴矢流不守恒。Fujikawa 用路径积分测度变换的方法重新导出了反常轴矢流。
- 在路径积分量子化中，费米子场积分测度改变导致相应的轴矢流对称性被破坏。

$$Z = \int \mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}, U] \mathrm{e}^{-S[\psi,\bar{\psi},U]} = \int \mathcal{D}[\psi', \bar{\psi}', U'] \mathrm{e}^{-S[\psi',\bar{\psi}',U']}$$

$$\mathcal{L} = \mathrm{i}\bar{\psi}(x)\mathrm{i}\partial\!\!\!/\psi(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)$$

$$\psi' = \left(\mathbb{1} + \mathrm{i}\varepsilon M\gamma_5\left(\mathbb{1} - \frac{a}{2}D\right)\right)\psi,\ \bar{\psi}' = \bar{\psi}\left(\mathbb{1} + \mathrm{i}\varepsilon M\left(\mathbb{1} - \frac{a}{2}D\right)\gamma_5\right)$$

$$\mathcal{D}[\psi, \bar{\psi}] = \mathcal{D}[\psi', \bar{\psi}'] \det\left[\mathbb{1} + \mathrm{i}\varepsilon M\gamma_5\left(\mathbb{1} - \frac{a}{2}D\right)\right]^2$$

拓扑荷与$U(1)_A$

$$[d\psi][d\bar{\psi}] \quad \rightarrow \exp\left\{i\alpha\int q(x)d^4x\right\}[d\psi][d\bar{\psi}]$$

$$q(x) \quad = \frac{1}{32\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_{\alpha}^{\mu\nu}(x)F^{\rho\sigma,\alpha}(x)$$

- 进一步可以给出轴矢流对应的 Ward 恒等式（考虑夸克质量项）：

$$\partial_\mu J_5^\mu(x) = 2m\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) - N_f q(x),$$

- 表明在存在海夸克的情形下，$\mathbf{q(x)}$与同位旋单态的赝标量介子算符 $\bar{\boldsymbol{\psi}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\gamma}_5\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})$存在联系，从而该算符可能会与同位旋单态赝标量介子存在耦合。
- 那么是否可以通过拓扑荷密度算符来研究 η 及 η' 的性质？

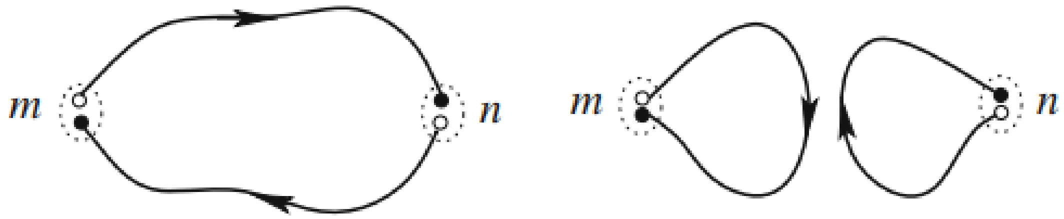
研究背景

通常情况，格点上利用费米子场计算η和η′

$$\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\bar{u}_x\gamma_5 u_x + \bar{d}_x\gamma_5 d_x\right]$$

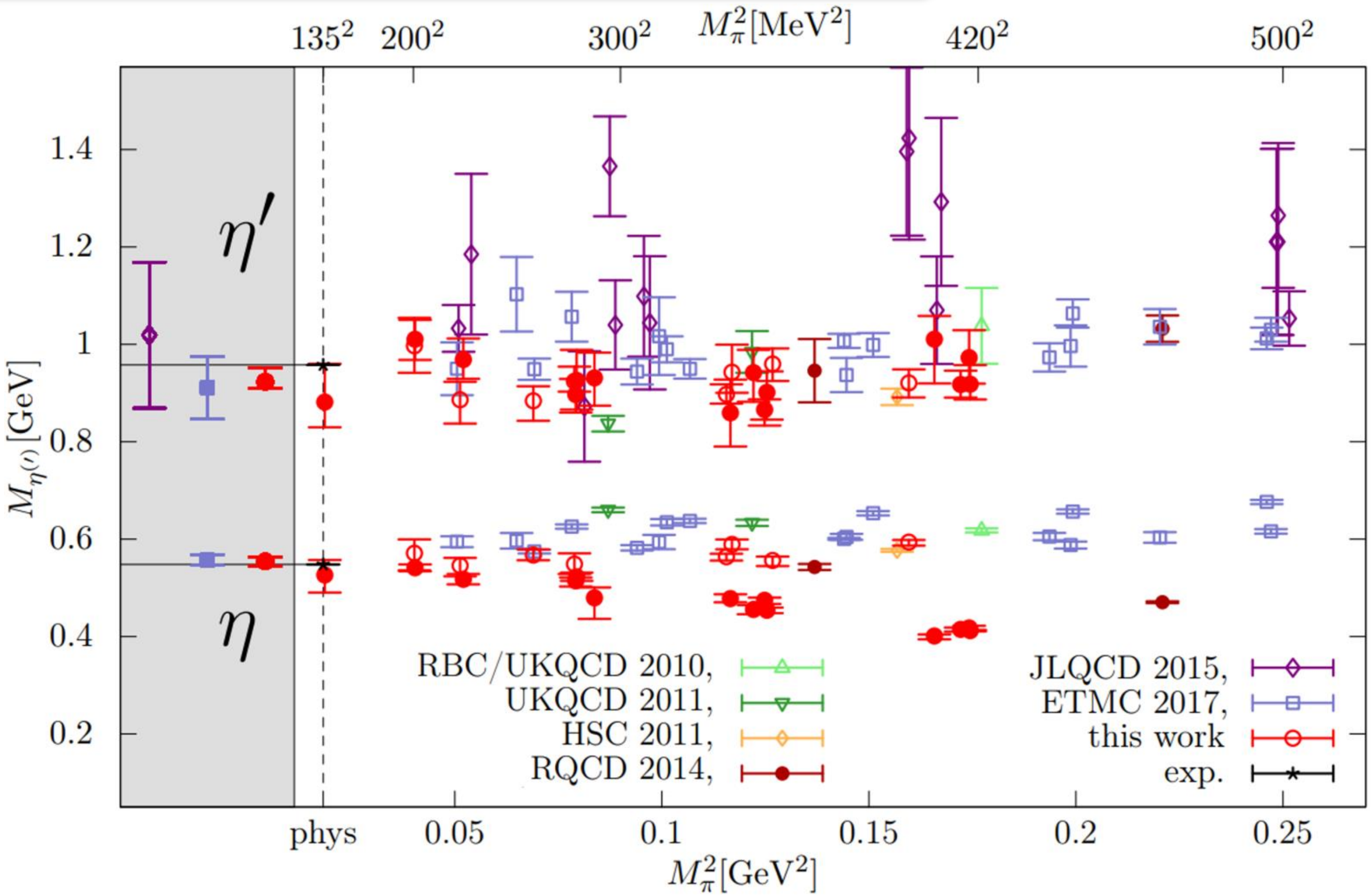
$$C_{\boldsymbol{p}}^{\eta}(t,t_0) = \left\langle \tilde{\eta}(t,\boldsymbol{p})\left(\tilde{\eta}(t_0,\boldsymbol{p})\right)^{\dagger}\right\rangle$$

$$C_{\boldsymbol{p}}^{\eta}(t,t_0) = \frac{1}{V_3}\sum_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}\left\langle \mathcal{Q}^{-1}_{\beta,b,t_0,\boldsymbol{y};\alpha,a,t,\boldsymbol{x}}\mathcal{Q}^{-1}_{\alpha,a,t,\boldsymbol{x};\beta,b,t_0,\boldsymbol{y}} - \mathcal{Q}^{-1}_{\beta,b,t_0,\boldsymbol{y};\beta,b,t_0,\boldsymbol{y}}\mathcal{Q}^{-1}_{\alpha,a,t,\boldsymbol{x};\alpha,a,t,\boldsymbol{x}}\right\rangle$$



研究背景

格点上利用费米子场计算η和η′



RQCD Collaboration,JHEP 08 (2021) 2106.05398v3

研究背景

传统格点计算必须包括断开的非连通图

⇩

这要求数据上有很高的统计量

格点上利用拓扑荷密度算符计算η和η′

- 在具有动力学海夸克组态上，可以用拓扑荷密度算符计算同位旋单态赝标量介子

  JLQCD Collaboration,Phys. Rev. D92 (2015) 111501

  Wei Sun,et al.,Chin. Phys. C 42 (2018) 093103

  Petros Dimopoulos,et al.,Phys. Rev. D 99,no.3,(2019)034511

- 需要进一步在物理点海夸克组态上验证该方法；另外在2+1味组态上，才能对应到物理的η′。所以在物理点的2+1味组态上进行模拟计算才是十分必要的。

- 我们通过计算由拓扑荷密度算符构成的两点关联函数来抽取相应的物理信息

$$q(x) = \frac{1}{32\pi^2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\mathrm{Tr}\,F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$$

$$C_2(|r|) \quad = \langle q(y)q(x)\rangle = \sum_{r'}\sum_{r_0} q(r_0+r')q(r_0)$$

$$f(r, m_{\eta'}) = A\frac{K_1(m_{\eta'}r)}{r}$$

其中 $\boldsymbol{r}$ 为两个时空点 $\boldsymbol{x}$、$\boldsymbol{y}$ 之间距离， r_0、 $\boldsymbol{r}'$ 为四维时空点，K_1为修正的贝塞尔函数。

计算细节及结果

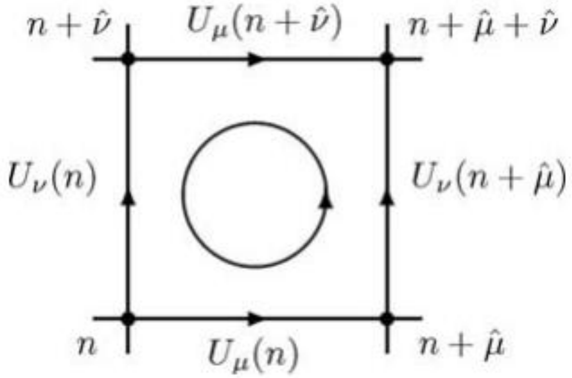
- 我们采达到物理 π 介子质量的2+1味海夸克组态进行模拟计算。具体参数见表格。

Table: 模拟计算相关的参数

Symbol	$L^3 \times T$	a(fm)	m_K	m_π	N_{cfg}
48I	$48^3 \times 96$	0.1141(2)	499	139	356
64I	$64^3 \times 128$	0.0837(2)	508	139	330

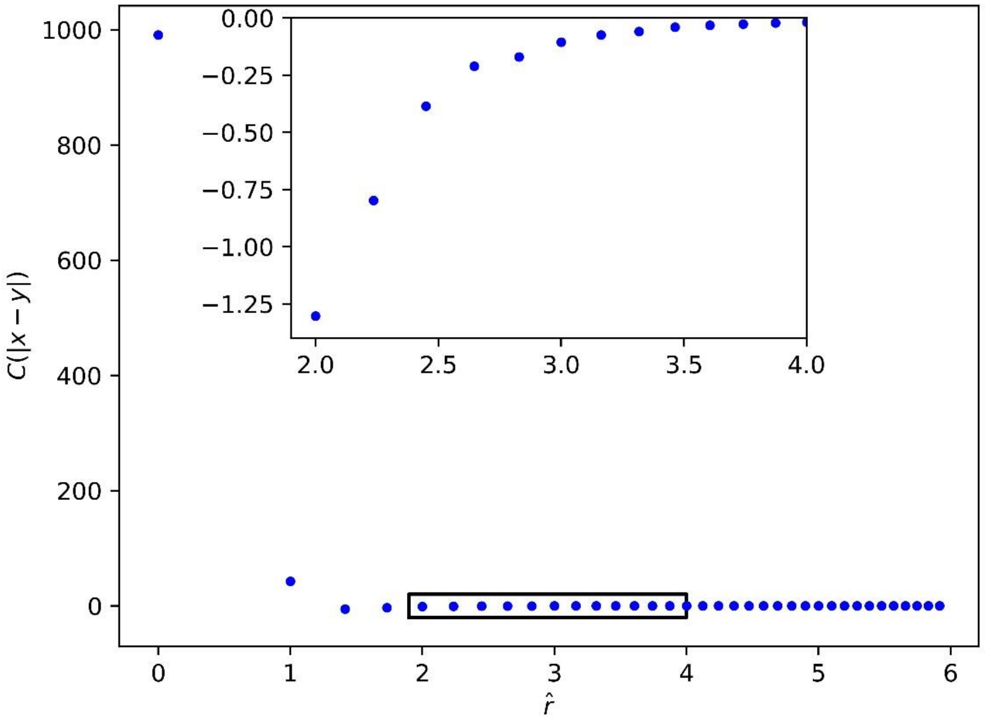
- 格点上使用wilson loop构造场强张量，进而构造拓扑荷密度算符，使用快速傅里叶变换的方法（FFT）拼接关联函数

$$F_{\mu\nu}(x) = \mathrm{Im}\left[U_\mu(x)U_\nu(x+a\hat{\mu})U_\mu^\dagger(x+a\hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)\right]$$



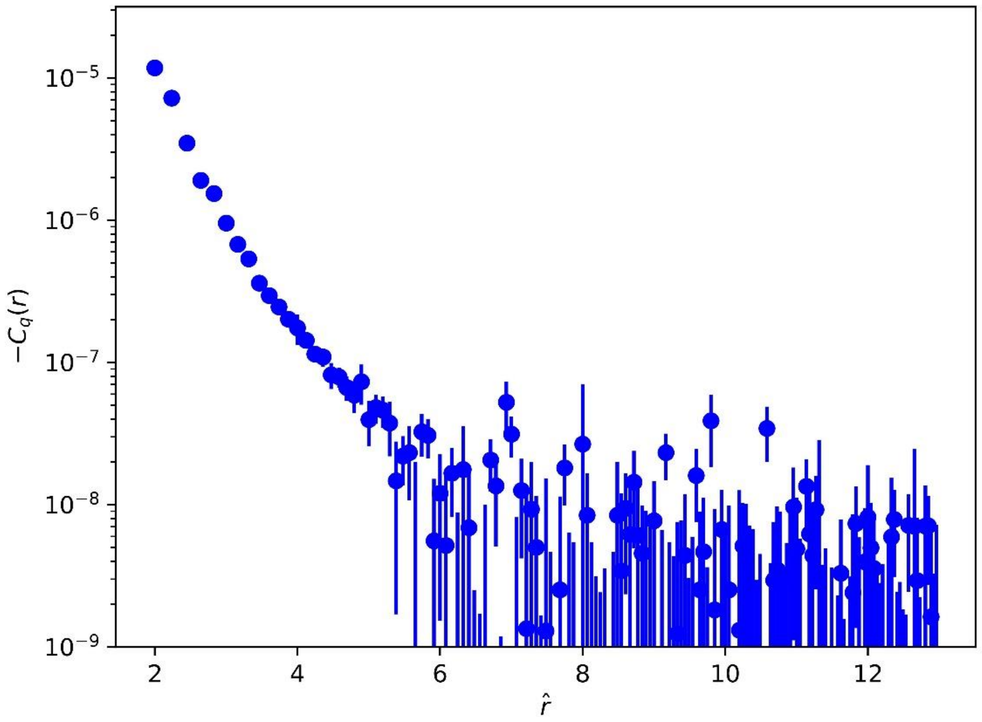
计算细节及结果

◆ 两点关联函数会随 r 由一个正数变成负数，并按指数衰减，到达某个最低点后会有上升的趋势。该两点关联函数在r=0时，即为拓扑磁化率(topological susceptibility)，因此是一个正的数；而在r>0时，两点关联函数的符号为负。理论上讲，$\mathbf{C_2(|r|)}$在大r区域的行为来自赝标量粒子的贡献。



计算细节及结果

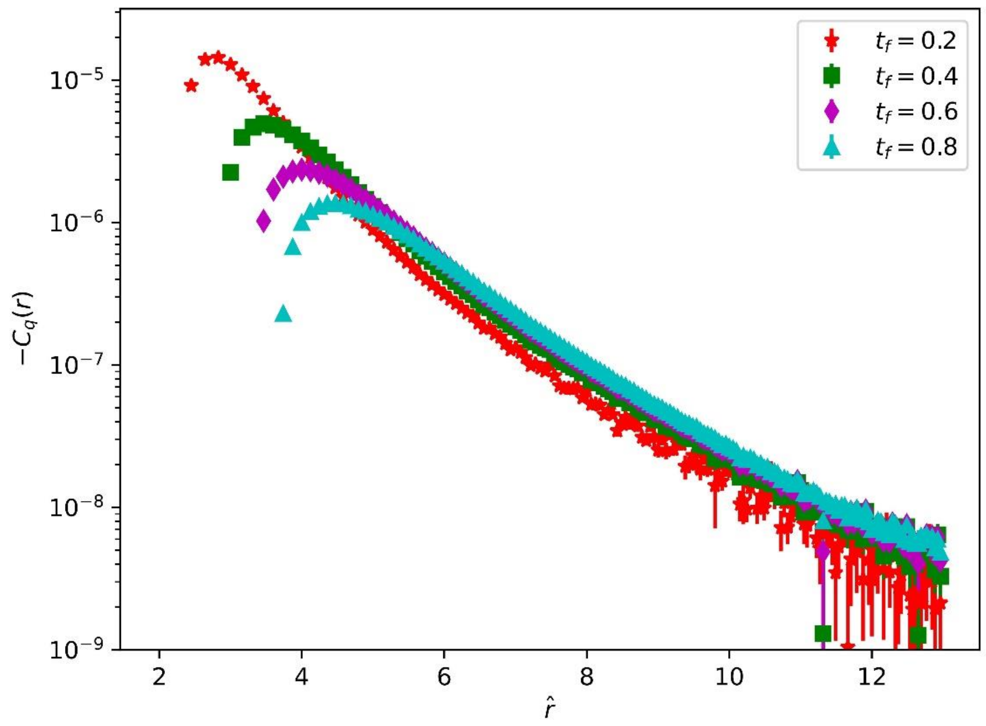
- 定义的 $q(x)$ 直接计算的关联函数在 r 比较大时统计噪音太大，得不到有统计意义的信号。



计算细节及结果

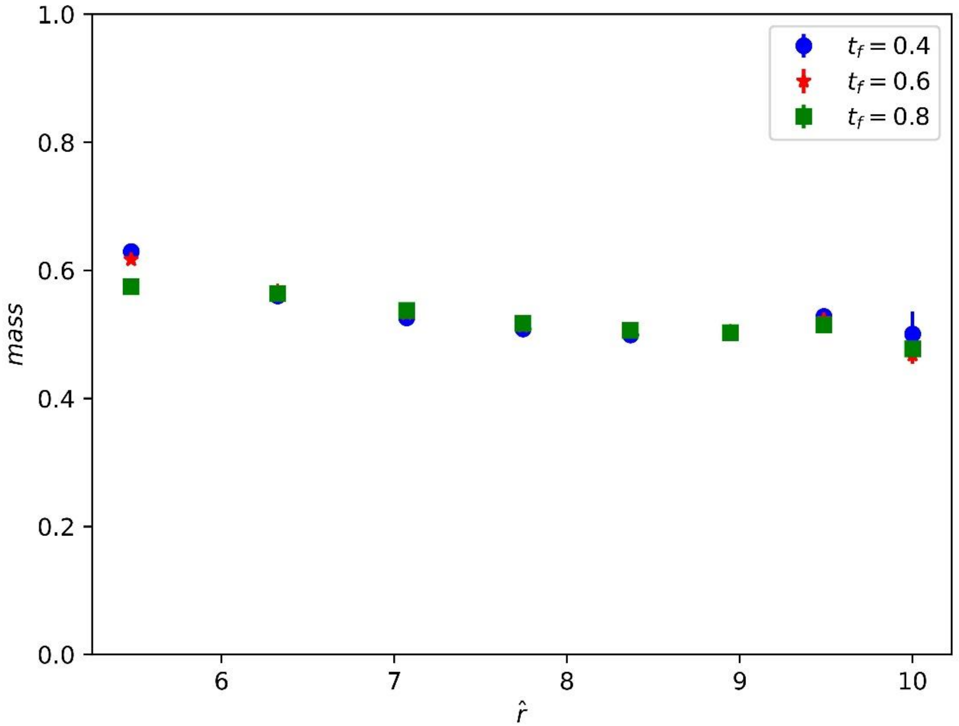
- 对规范场做Wilson flow，能有效改进拓扑荷密度算符关联函数的信号。

  随着流时间t_f增大，在大r的信号会增强，两点函数的由正变负的位置也会后移。不过当r>6时，不同流时间的两点函数的衰减行为类似，表明此时都以相近的质量衰减。



计算细节及结果

- 利用公式$\mathbf{f}(\mathbf{r},\mathbf{m}_{\eta'}) = \mathbf{A}\frac{\mathbf{K_1}(\mathbf{m}_{\eta'}\mathbf{r})}{\mathbf{r}}$拟合



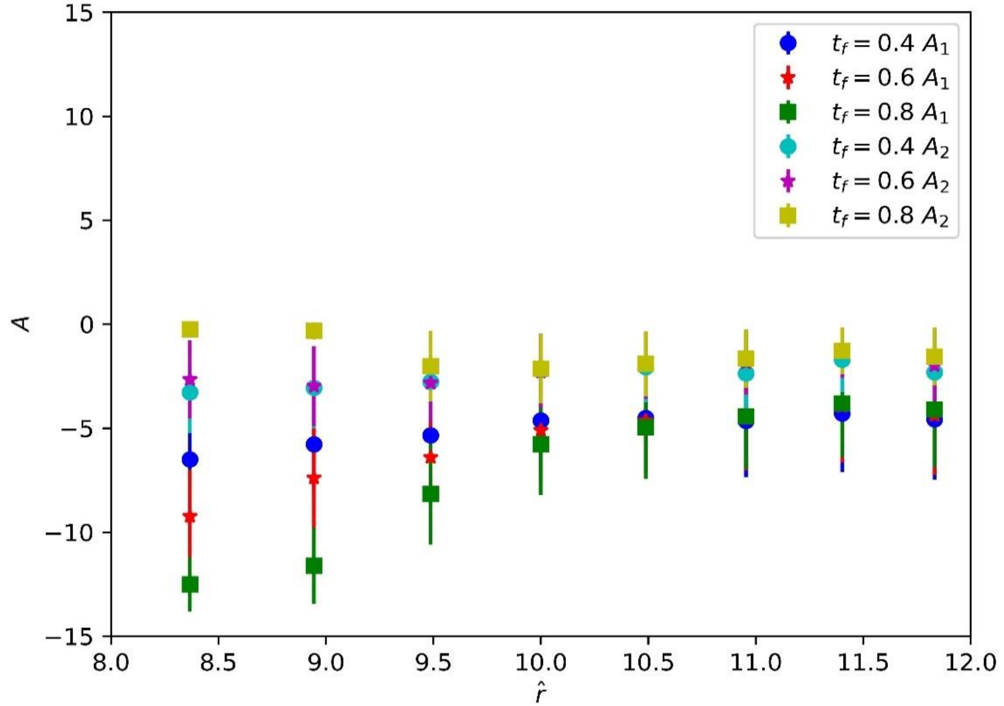
上图表示不同流时间下的 η' 质量随拟合起点 r 值的变化，拟合终点为 10.5。

- 单质量项形式给出的拟合结果为 m = 920(5)(10)MeV，实验值 $\mathbf{m}_{\eta'}$ = 957.78(6)MeV 是接近的。

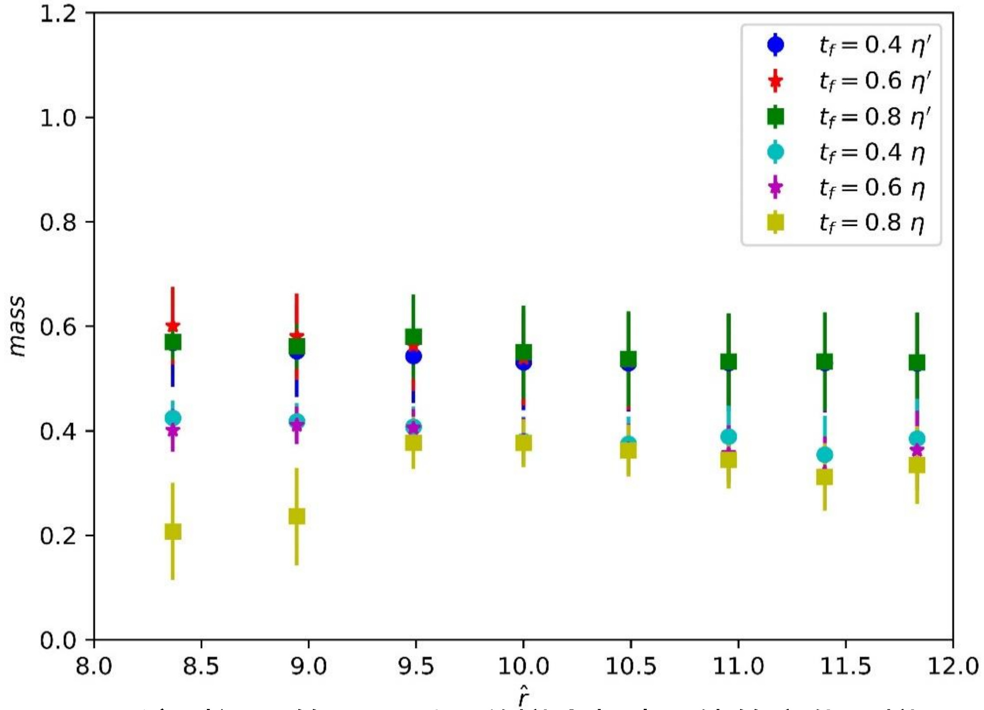
计算细节及结果

- 考虑到 η' 和 η 都会具有同位旋单态 η_1的成分，那么我们应该可以从拓扑荷密度算符两点关联函数中，看到这两个态。

$$\frac{A}{r}K_1(m_{\eta'}r) \to \frac{A_1}{r}e^{2m_{\eta'}^2 t}m_{\eta'}K_1(m_{\eta'}r) + \frac{A_2}{r}e^{2m_{\eta}^2 t}m_{\eta}K_1(m_{\eta}r)$$



不同流时间下的 A_1A_2 随拟合起点 r 值的变化，拟合终点为 12.6



不同流时间下的 η' η 质量随拟合起点 r 值的变化，拟合终点为 12.6

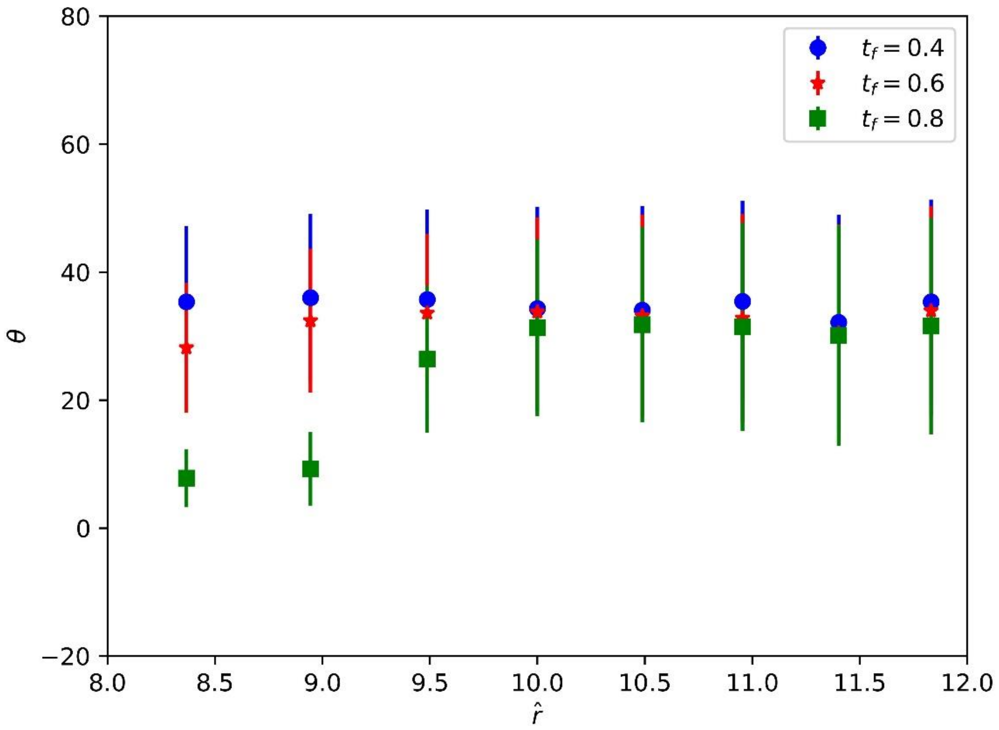
计算细节及结果

- 两态拟合给出最轻的态的质量为 $\mathbf{m}_\eta$ = 615(95)MeV，与实验上 η 质量 547.86(1)MeV接近；激发态的质量为$\mathbf{m}_{\eta'}$ = 918(160)MeV与 η' 介子质量是相容的。
- 考虑到 $\mathbf{A}_1$，$\mathbf{A}_2$ 物理含义为

$$\mathbf{A}_1 \sim \left|\langle 0|\mathbf{G}\tilde{\mathbf{G}}|\eta'\rangle\right|^2$$

$$\mathbf{A}_2 \sim \left|\langle 0|\mathbf{G}\tilde{\mathbf{G}}|\eta\rangle\right|^2 \quad \tan\theta = \frac{\langle 0|\mathbf{G}\tilde{\mathbf{G}}|\eta\rangle}{\langle 0|\mathbf{G}\tilde{\mathbf{G}}|\eta'\rangle}$$

$\langle 0|\mathbf{G}\tilde{\mathbf{G}}|\eta\rangle$ 为拓扑荷密度算符在赝标量介子态与真空态之间的矩阵元，我们就可以用$\theta = \arctan\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}$估计 $|\theta|$ 的取值范围。



不同流时间下的混合角随拟合起点r值的变化，拟合终点为12.6。

- 我们给出了混合角为$\mathbf{20-30}$°，和基于Gell-Mann-Okubo线性质量关系得到的混合角24.5°是符合的。

总结与展望

- 我们基于物理点的2+1味组态计算了拓扑荷密度算符的关联函数，拟合给出η'的质量为 920(5)(10)MeV。
- 验证了基于拓扑荷密度关联函数获取η'质量的可行性，并进一步给出了η和η'的质量及混合角。
- 未来基于更大统计规模的组态，可以进一步提升结果的精度。

⇨ End

感谢各位老师的聆听

欢迎批评指正

Thanks