Inverse Problem of Dispersion Relation

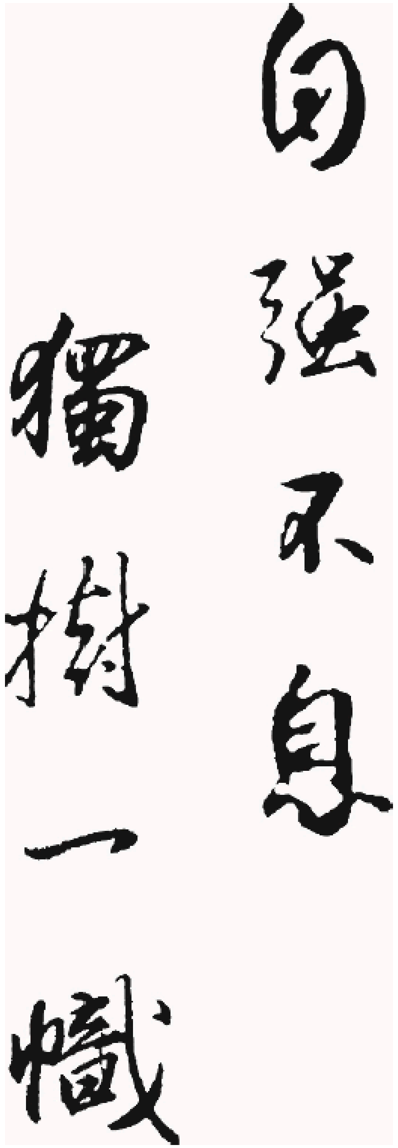
Ao-Sheng Xiong

Lanzhou University

Supervisor: Fu-Sheng Yu

Based on [ASX, Ting Wei(魏婷),Fu-Sheng Yu(于福升) **]**
arixv: 2211.13753

目录



1 研究动机

重大科学难题：非微扰问题

强相互作用是四种基本相互作用之一，

其基本理论是量子色动力学(QCD)。

QCD具有高能微扰和低能非微扰的性质。

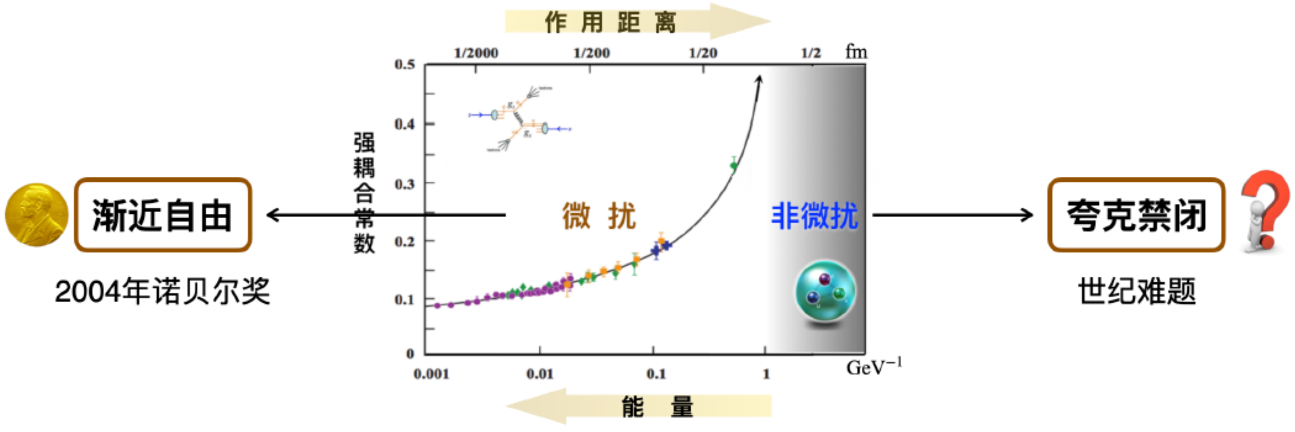
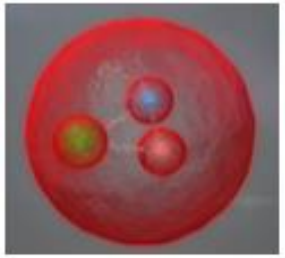


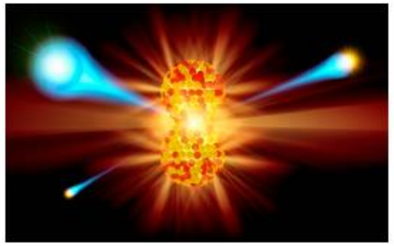
图1：高能微扰与低能非微扰

非微扰物理量难以计算，是世纪难题

粒子物理：标准模型内最后的难题。**夸克禁闭和新物理?**

核物理：核科学都能溯源到核力，核力本质是强相互作用，**强作用的非微扰问题**是制约核科学的根本问题之一。





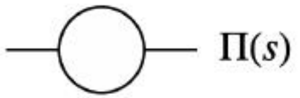
现有的非微扰方法各有优缺点

格点QCD(LQCD)：第一性原理的计算方法，但需要超级计算机且对激发态等物理量计算难度大。

其他方法：如QCD求和规则、Dyson-Schwinger方程等都有模型依赖性。唯象方法预言能力有限。

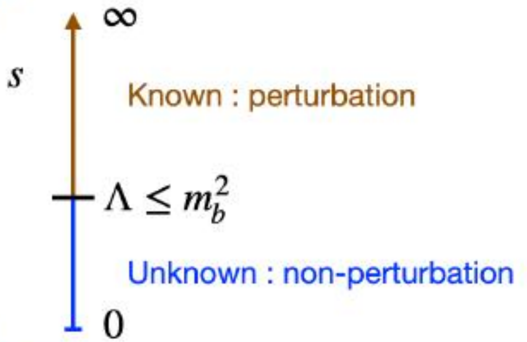
2 反问题介绍

基于量子场论的色散关系，通过已知的微扰计算反解未知的非微扰物理量：



Dispersion Relation:

$$\mathcal{R}e[\Pi(s)] = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_0^{\infty}\frac{\mathcal{I}m[\Pi(s')]}{s-s'}ds'$$



If $s > \Lambda$, $\quad \mathcal{P}\int_0^{\Lambda}\frac{\mathcal{I}m[\Pi(s')]}{s-s'}ds' = \pi\mathcal{R}e[\Pi(s)] - \mathcal{P}\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{\mathcal{I}m[\Pi(s')]}{s-s'}ds'$

To be solved

calculable

$$Kf = \int_a^b \frac{f(x)}{y-x}dx = g(y), y \in [c,d], c > b$$

H.N.Li, H.U, F.R.Xu, **F.S.Yu**, Phys.Lett.B 810(2020)

已知积分结果求被积函数需要用到反问题理论。

2 反问题介绍

反问题理论是成熟的数学分支领域：

与反问题对比的是正问题；

1950年左右发展至今；

在众多重要的前沿科学领域中广泛运用；

线性方程组的求解、地质探勘、缪子成像、CT……

If $s > \Lambda$, $\mathcal{P}\int_0^{\Lambda}\frac{\mathcal{I}m[\Pi(s')]}{s-s'}ds' = \pi\mathcal{R}e[\Pi(s)] - \mathcal{P}\int_{\Lambda}^{\infty}\frac{\mathcal{I}m[\Pi(s')]}{s-s'}ds'$

To be solved

calculable

$$\boxed{\int_a^b \frac{f(x)}{y-x}dx = g(y), y \in [c,d], c > b}$$

微扰论

\+

反问题理论

色散关系
反问题方法

非微扰
物理量

3 适定性研究

适定性是研究反问题的基础：

$$\int_a^b \frac{f(x)}{y-x}dx = g(y), y \in [c,d], c > b$$

解的存在性；解的唯一性；解的稳定性；

反问题的简单例子：

线性方程组的一般形式为：$A_{n\times n}x_{n\times 1} = b_{n\times 1}$。
上述方程组的解存在当且仅当$r_A = r_{(A,b)}$；当解存在时，解唯一当且仅当$r_A = n$；

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 2x_1 + 3.00001x_2 = 8.00002 \end{cases}$$

解为$x_1 = 1, x_2 = 2;$
当对方程组的右端加上微小的误差时

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 2x_1 + 3.00001x_2 = 8.00003 \end{cases}$$

解却变成 $x_1 = -0.5, x_2 = 3$ 。解却发生了巨大的变化，上述线性方程组不满足解的稳定性。

解的存在性：

$$\int_a^b \frac{f(x)}{y-x}dx = g(y), y \in [c,d], c > b$$

R(K) is the analytic functions

$$Kf = \int_a^b \frac{f(x)}{y-x}dx = \int_a^b \frac{1}{y}\frac{f(x)}{1-\frac{x}{y}}dx$$
$$= \frac{1}{y}\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x}{y})^k f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{y^{k+1}}\int_a^b x^k f(x)dx$$

where the last equal sign uses the control convergence theorem:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{y^{k+1}}\int_a^b x^k f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{y^{k+1}}\int_a^b x^{2k}dx||f(x)||_{L^2(a,b)}$$
$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{y^{k+1}}b^k\sqrt{b-a}||f(x)||_{L^2(a,b)}$$
$$\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{y^{k+1}}(\frac{b}{c})^k||f(x)||_{L^2(a,b)} \leq \infty$$

Thus, the R(K) is the analytic functions $\in [c,d]$

3 适定性研究

解的存在性：　　**解的唯一性：**

$$\int_a^b \frac{f(x)}{y-x}dx = g(y), y \in [c,d], c > b$$

Theorem 3.3. *Suppose that $f_1(x), f_2(x) \in L^2(a,b)$. If $Kf_1 = Kf_2 = g(y)$, $y \in [c,d]$, then we have $f_1(x) = f_2(x)$, a. e. $x \in [a,b]$.*

Proof. Since K is a linear operator, we know that $Kf_1 - Kf_2 = K(f_1 - f_2) = 0$. Therefore, in order to prove $f_1(x) = f_2(x)$, a. e. $x \in [a,b]$, we just need to prove that $Kf = 0$ implies $f(x) = 0$, a. e. $x \in [a,b]$.

It is easy to obtain that $Kf = \int_a^b \frac{1}{y-x} f(x)dx = \int_a^b \left(\frac{1}{y}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x}{y})^k\right) f(x)dx$. Since $x \in [a,b]$, $y \in [c,d]$, $c > b$, we know $|\frac{x}{y}| \le |\frac{b}{c}| < 1$, which implies that $\left|\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{x}{y})^k f(x)\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{b}{c})^k |f(x)|$ for all $x \in [a,b]$. Combined with $\int_a^b |f(x)|dx < +\infty$ and the control convergence theorem, we have

$$y\int_a^b \frac{1}{y-x} f(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{y^k}\int_a^b x^k f(x)dx = 0, \quad y \in [c,d]. \tag{3.4}$$

If $d = +\infty$, by using (3.4), we have

$$\int_a^b f(x)dx + \frac{1}{y}\int_a^b xf(x)dx + \cdots + \frac{1}{y^k}\int_a^b x^k f(x)dx + \cdots = 0, \quad y \in (c, +\infty). \tag{3.5}$$

Letting $y \to +\infty$ in (3.5), we have $\int_a^b f(x)dx = 0$. Then multiplying y on both sides of (3.5) and letting $y \to +\infty$, we also have $\int_a^b xf(x)dx = 0$. Repeating above process, we can obtain that

$$\int_a^b x^k f(x)dx = 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{3.6}$$

By using (3.6), we know that $\int_a^b f(x)Q_n(x)dx = 0$. Combined with the Cauchy inequality, we have

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{L^2(a,b)} &= \int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b \left(f^2(x) - f(x)Q_n(x)\right)dx \\
&\le \int_a^b |f(x)| \cdot |f(x) - Q_n(x)|dx \\
&\le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b |f(x) - Q_n(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_{L^2(a,b)}\|f - Q_n\|_{L^2(a,b)} \\
&\le (\epsilon + \epsilon\sqrt{b-a})\|f\|_{L^2(a,b)},
\end{aligned}$$

which implies that $\|f\|_{L^2(a,b)} \le \epsilon + \epsilon\sqrt{b-a}$.

Letting $\epsilon \to 0$, we have $\|f\|_{L^2(a,b)} = 0$, i. e. $f(x) = 0$, a. e. $x \in [a,b]$. The proof is completed. □

3 适定性研究

解的存在性： ☺ **解的唯一性：** ☺ **解的稳定性：** ☹

$$\int_a^b \frac{f(x)}{y-x}dx = g(y), y \in [c,d], c > b$$

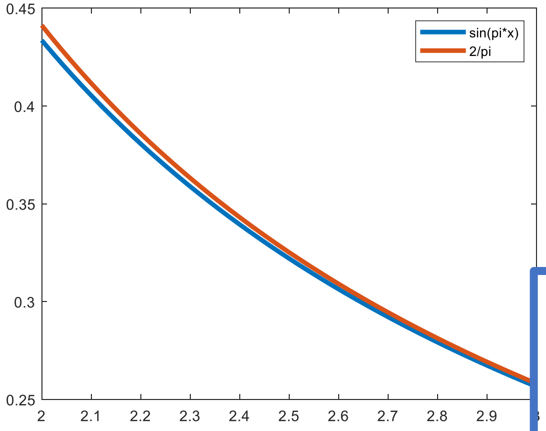
We show the instability of the inverse problem of dispersion relation by the special case. Taking $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 3$, $f_2(x) = f_1(x) + \sqrt{n}\cos(n\pi x)$, and $f_{1,2}$ are the solutions of $g_{1,2}$ with $g_i(y) = \int_0^1 \frac{1}{y-x} f_i(x)dx$. As $n \to \infty$, it is obvious that

$$\|f_2 - f_1\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 (\sqrt{n}\cos(n\pi x))^2 dx\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \to \infty, \quad (3.7)$$

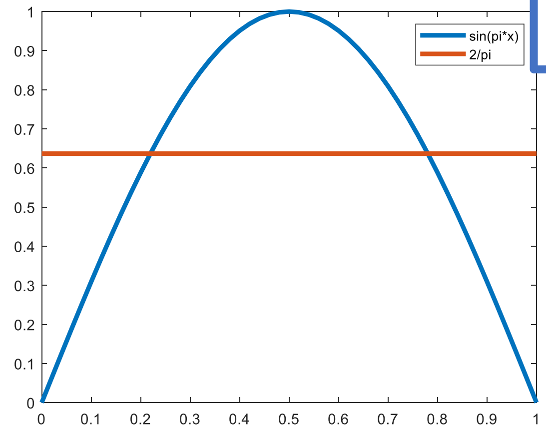
and

$$\|g_2 - g_1\|_{L^2(2,3)} = \frac{1}{\sqrt{n}\pi}\left(\int_2^3 \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{y-x}\right)^2 \sin(n\pi x)dx\right)^2 dy\right)^{1/2} \le \frac{M}{\sqrt{n}\pi} \to 0. \quad (3.8)$$

That means the solutions could be changed infinitely even though the noise of the input data is approaching to vanish. So the inverse problem is unstable.



两个相似的$g(y)$对应的解却有着有很大差别



实际物理中，数据一定存在误差： $\left\|g^\delta - g\right\|_{L^2} \le \delta$

不稳定性是求解该反问题的难题！

正则化方法：

不适定问题 → 正则化方法 → 近似的适定问题

Tikhonov正则化方法：

$$f_\alpha^\delta = argmin\left\{\frac{1}{2}||Kf - g^\delta||_{L^2}^2 + \boxed{\frac{\alpha}{2}||f||_{L^2}^2}\right\}$$

L-curve法：

$$\alpha = argmin\{||f_\alpha^\delta||_{L^2}||Kf_\alpha^\delta - g^\delta||_{L^2}\}$$

第一项可看作χ^2拟合，第二项是罚项；

罚项的形式可根据实际问题做改进；

$\alpha > 0$是正则化参数，对结果有影响，不能过大或过小。

Andreas Kirsch.2011

基于严格的数学理论和逻辑，不引入可调参数，有成为第一性原理的潜力

$$||f_\alpha^\delta - f^*||_{L^2} \to 0, as\ \delta \to 0$$

5 数值结果

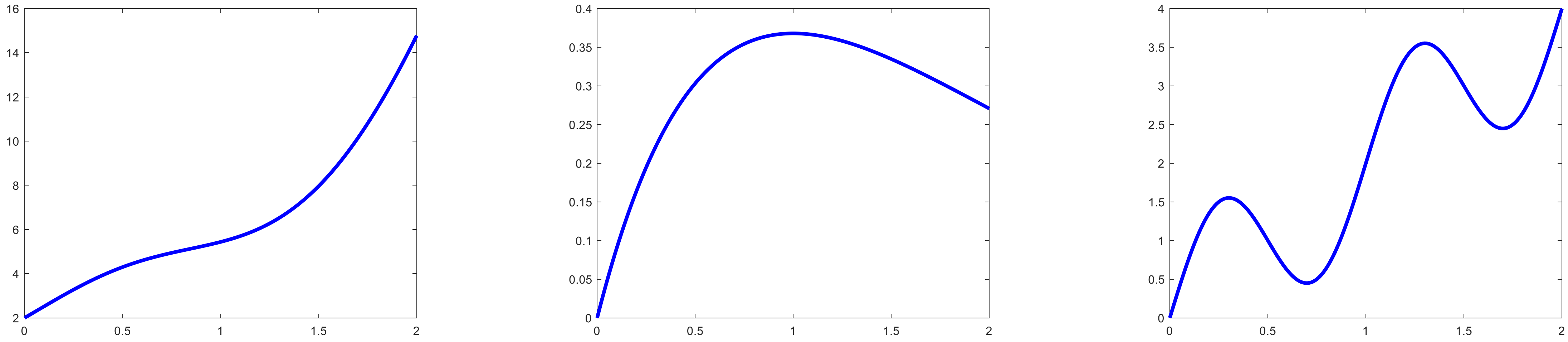
Toy Models:

构造真实解$f(x)=a_1f_1(x)+a_2f_2(x)$和对应的输入数据$g(y)$，并对数据加误差得到误差数据$g^{\delta}(y)$，以此来测试正则化方法的可靠性。

Model 1: a monotonic function as $f_1(x)=\sin(\pi x)$, $f_2(x)=e^x$;

Model 2: a simple non-monotonic function as $f_1(x)=xe^{-x}$, $f_2(x)=0$;

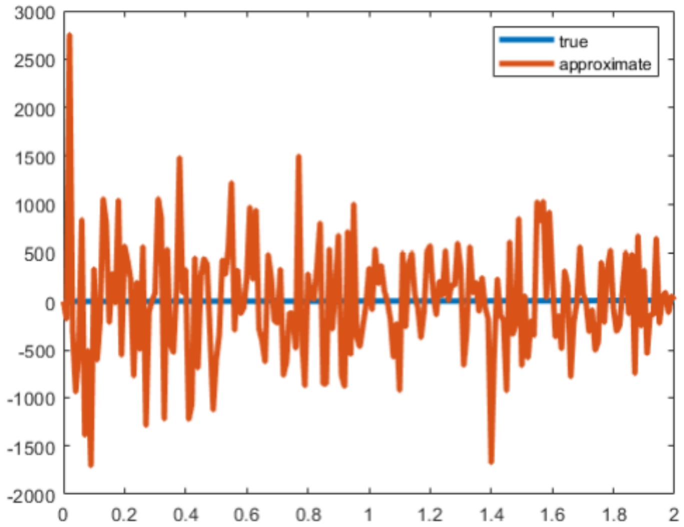
Model 3: an oscillating function as $f_1(x)=\sin(2\pi x)$, $f_2(x)=x$.



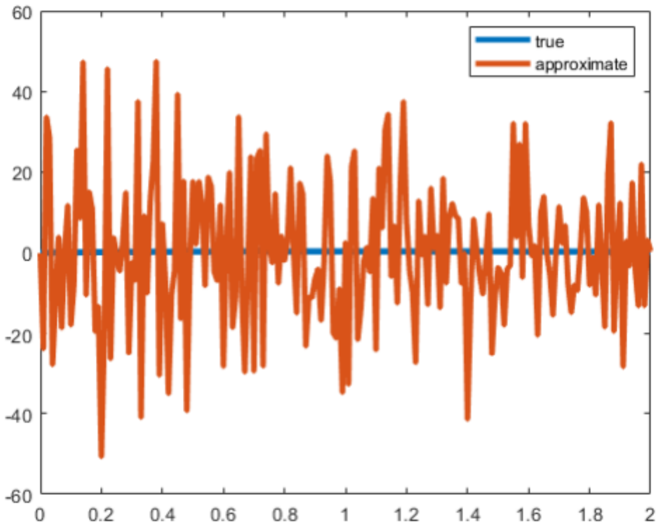
model 1 model 2 model 3

5 数值结果

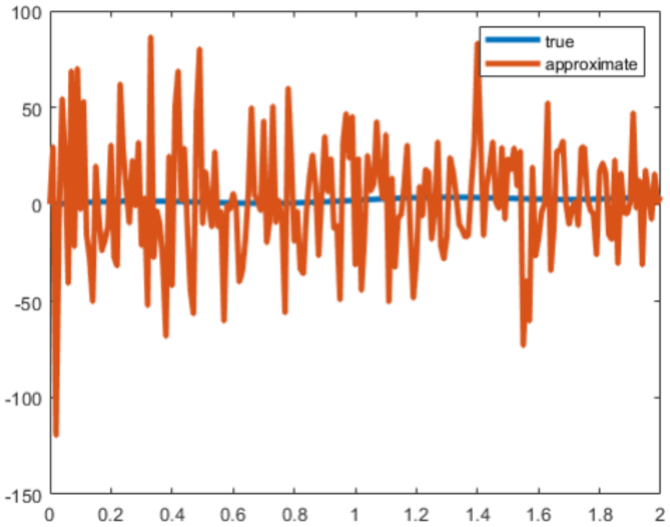
使用经典方法的结果：



model 1



model 2



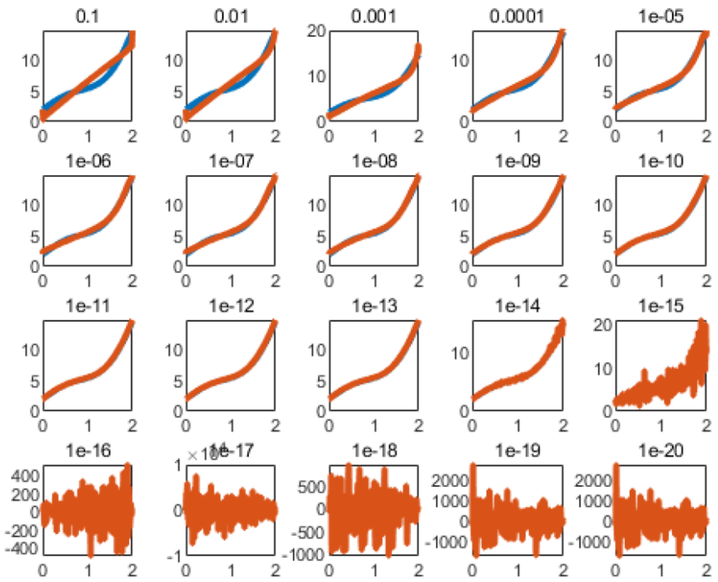
model 3

验证问题的不稳定性；

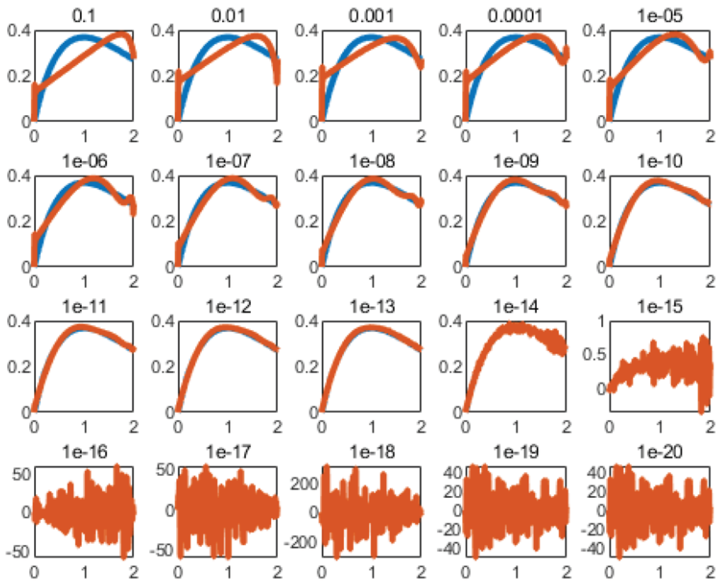
无法使用经典的方法求解，必须要使用正则化方法。

5 数值结果

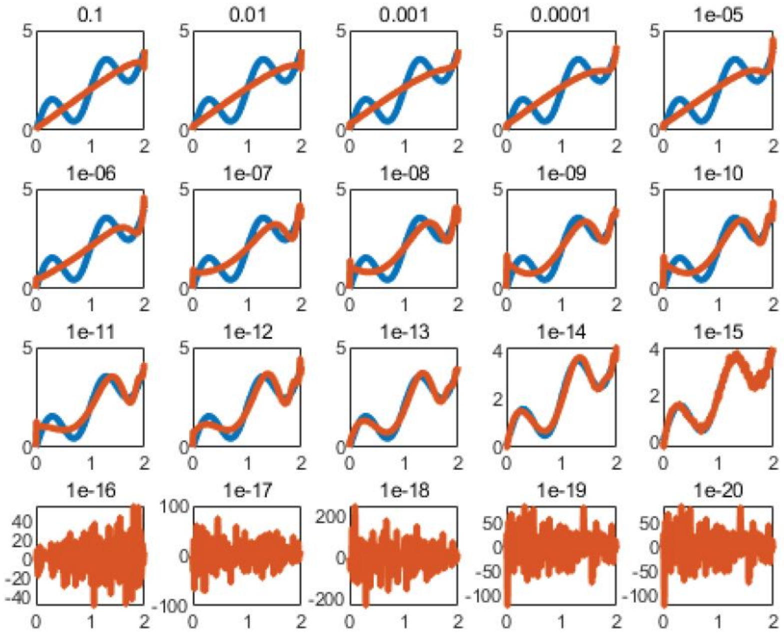
对正则化参数进行遍历：



model 1



model 2

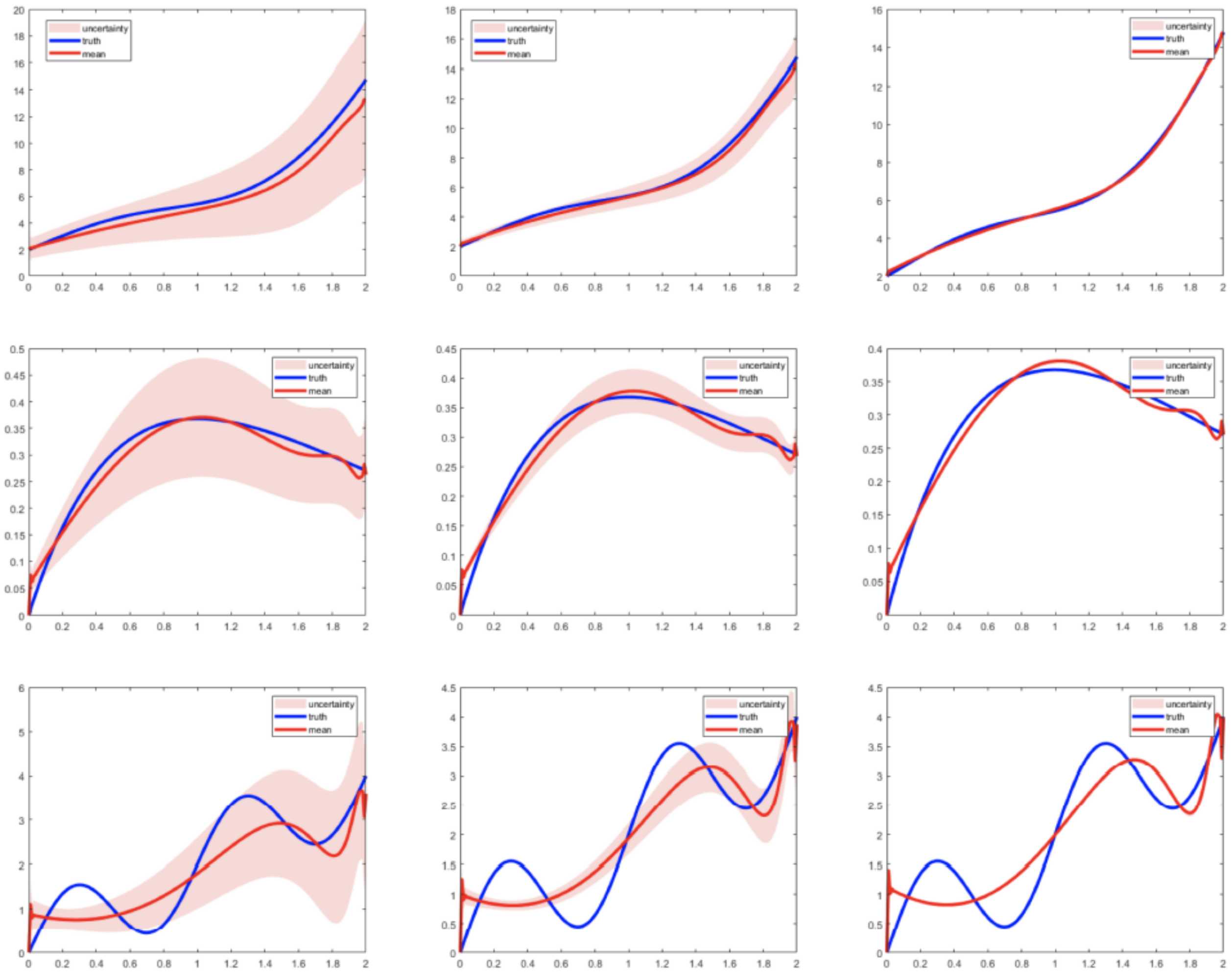


model 3

正则化参数α的选取比较重要；

正则化方法可以很好地解决该反问题。

Tikhonov正则化方法和L-curve法的结果：



输入误差分别为30%，10%和1%；

随着输入误差降低，解的误差也逐渐降低。

误差水平基本一致

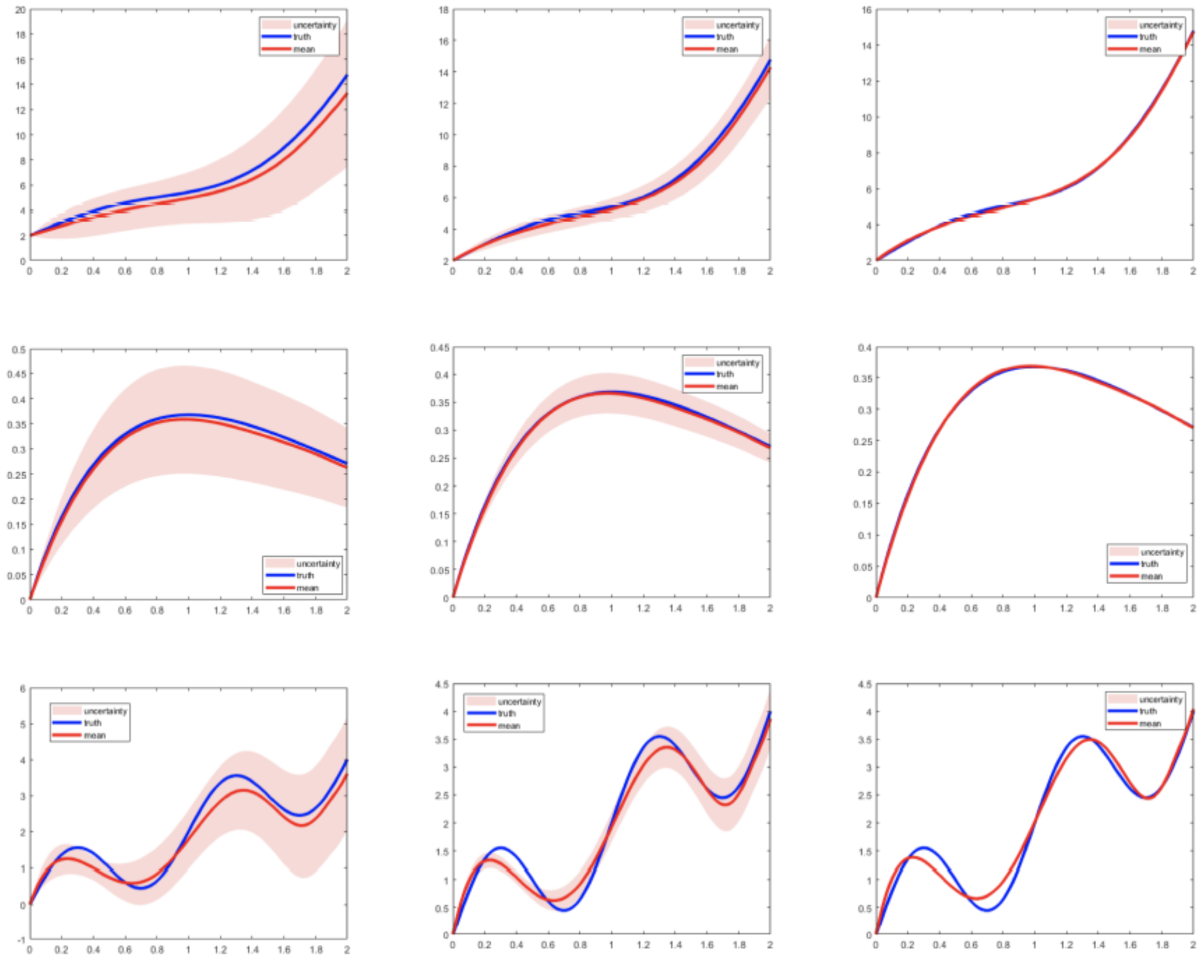
对于Model 1能够很好的反演，而Model 2和Model 3的反演效果不是特别好；

积分方程将解磨平

可对正则化方法进行改进，使得解变得更好。

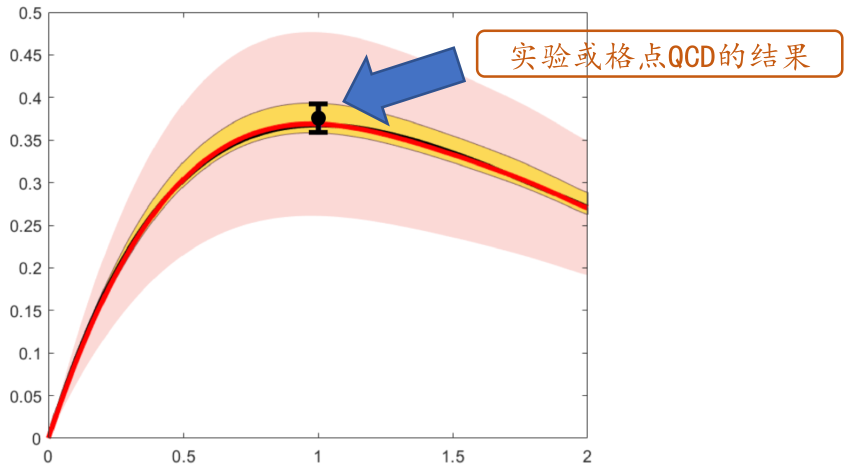
5 数值结果

限制解的空间：$||f||^2_{L^2} \rightarrow ||f||^2_{H^1}$



反问题方法优势：

1. 基于严谨的数学框架；
2. 能够系统性地控制误差；
3. 不需要过大的计算资源；
4. 能够计算全部非微扰能区、激发态等；
5. 针对具体问题进行改进；
6. 可以与实验或格点QCD结合并互补；



6 总结与展望

总结：

- 计算非微扰量的新方法；
- 严格证明色散关系反问题的不适定性；
- 运用正则化方法将不适定问题转化为适定性问题；
- 数值试验验证正则化方法的有效性。

展望：

- 数学框架的进一步搭建；
- 物理问题的深入应用，解决重大基本问题；
- 寻找反问题方法运用的新方向。

感谢

谢谢大家的聆听！