JNSS 2023
江门中微子暑期学校

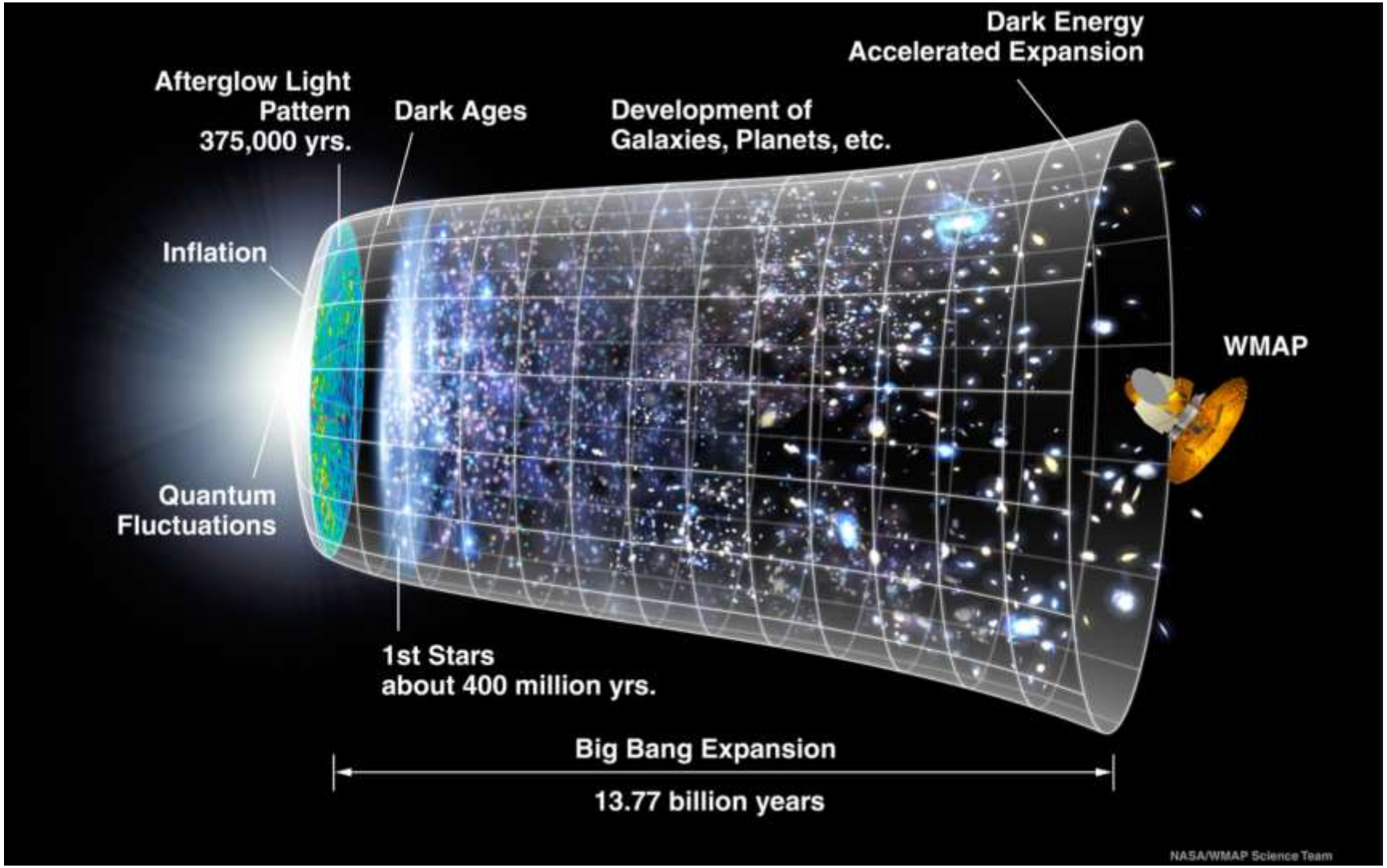
中微子宇宙学

夏俊卿

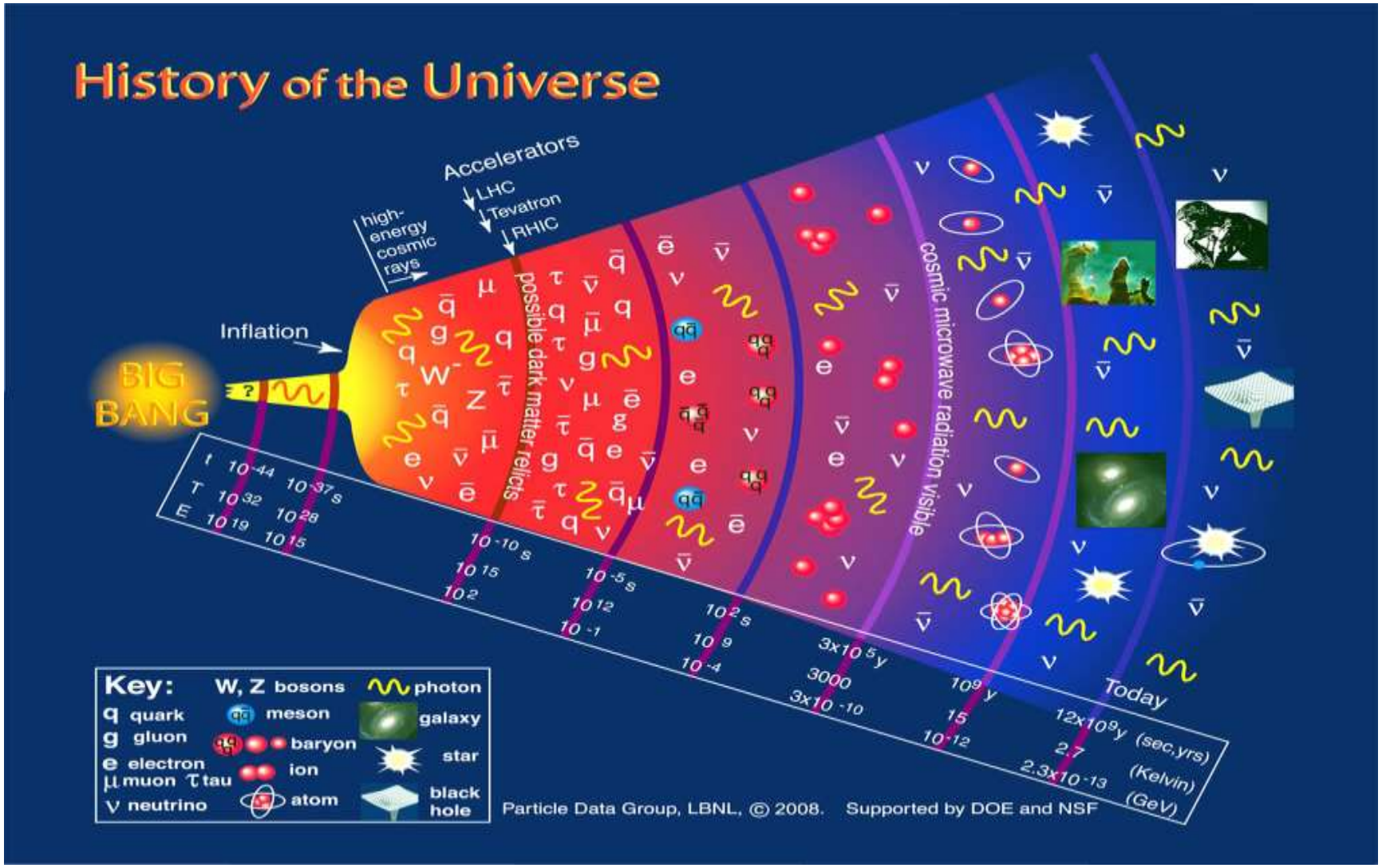
北京师范大学天文系

2023-06-23

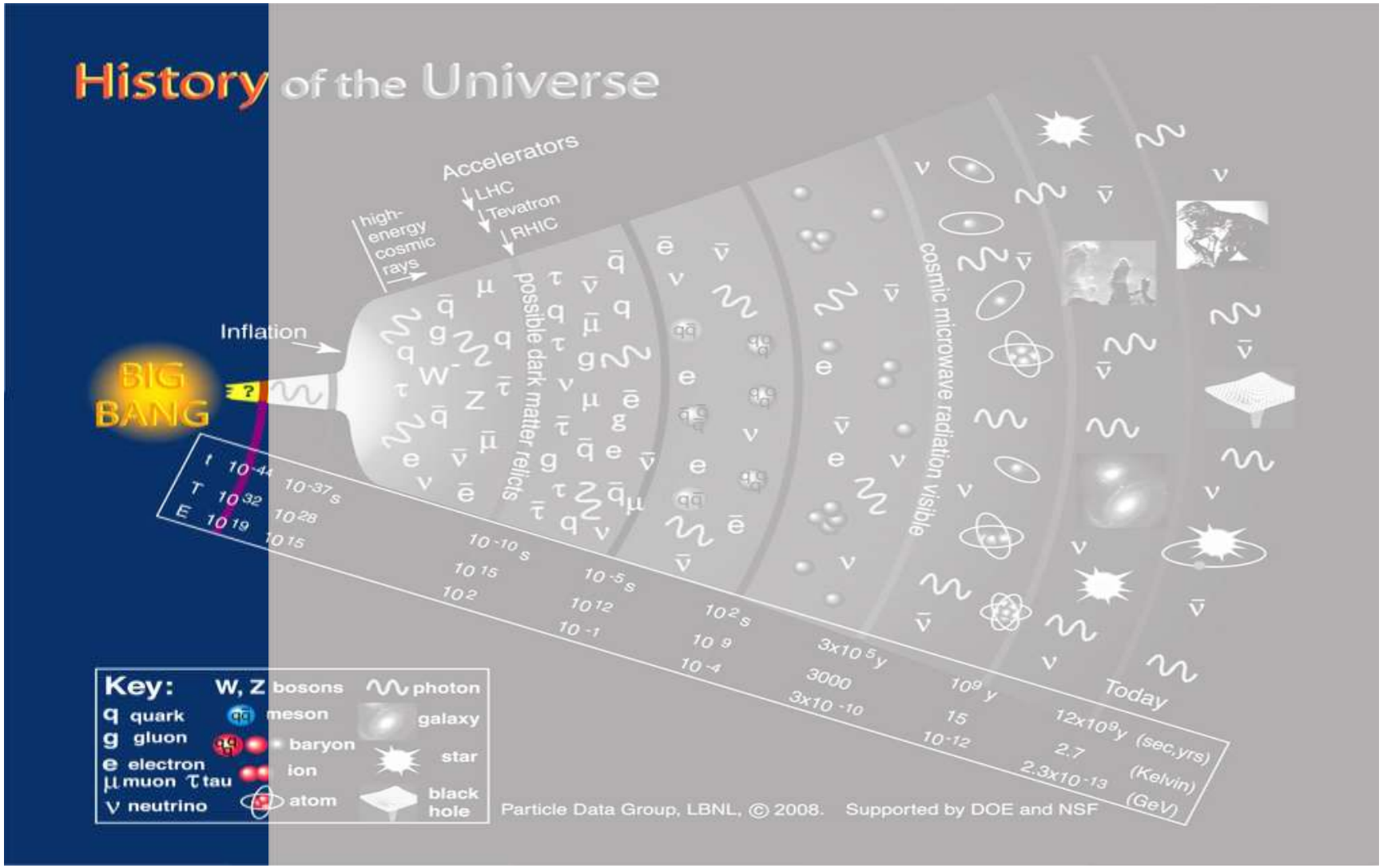
宇宙学主要研究宇宙起源、形成、演化



宇宙的演化

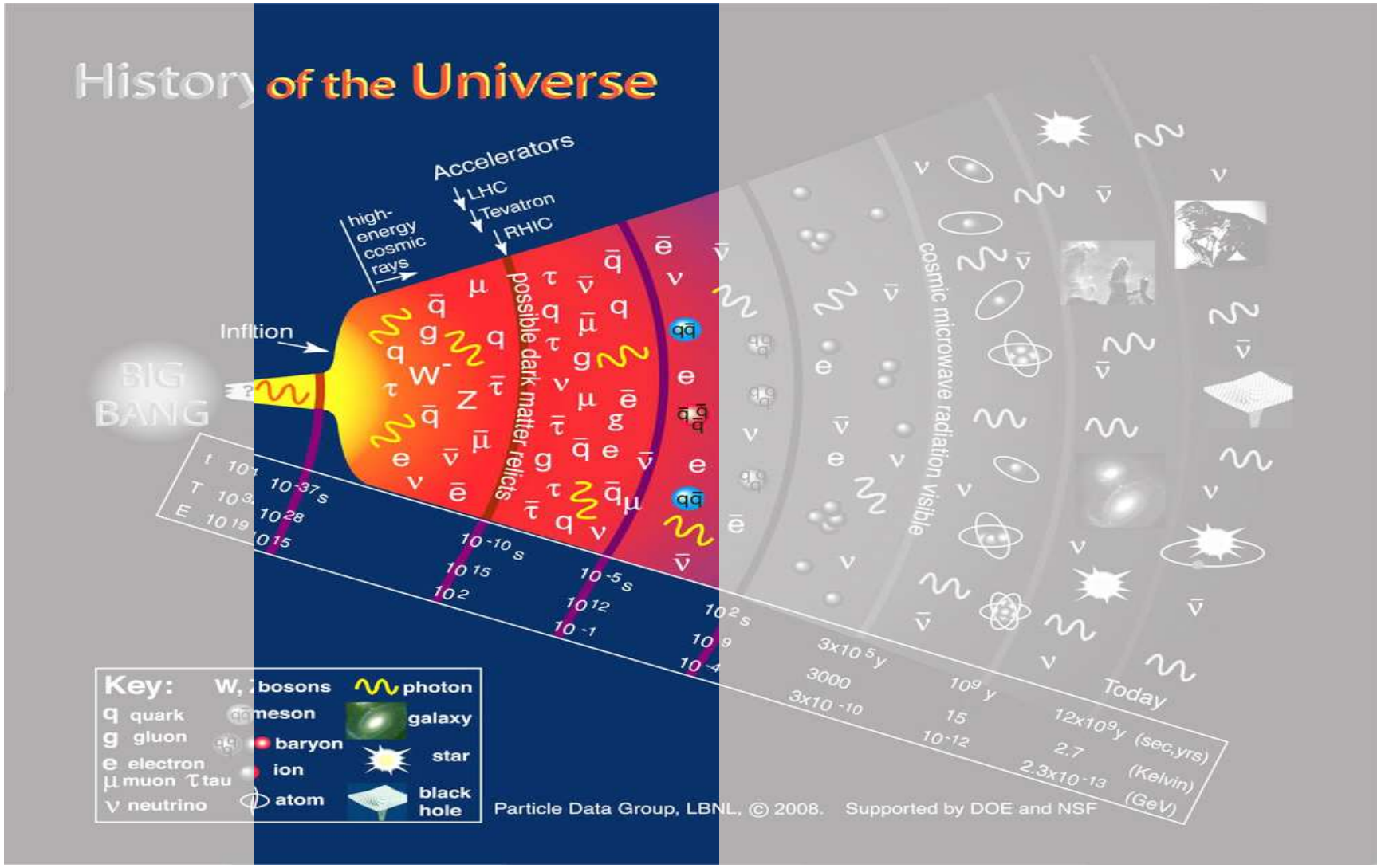

History of the Universe
Accelerators
LHC
Tevatron
RHIC
high-energy cosmic rays
Inflation
BIG BANG
possible dark matter relicts
cosmic microwave radiation visible
Today
Key:
W, Z bosons
photon
q quark
meson
galaxy
g gluon
baryon
star
e electron
ion
μ muon τ tau
black hole
ν neutrino
atom
Particle Data Group, LBNL, © 2008. Supported by DOE and NSF
(sec,yrs)
(Kelvin)
(GeV)

宇宙的演化



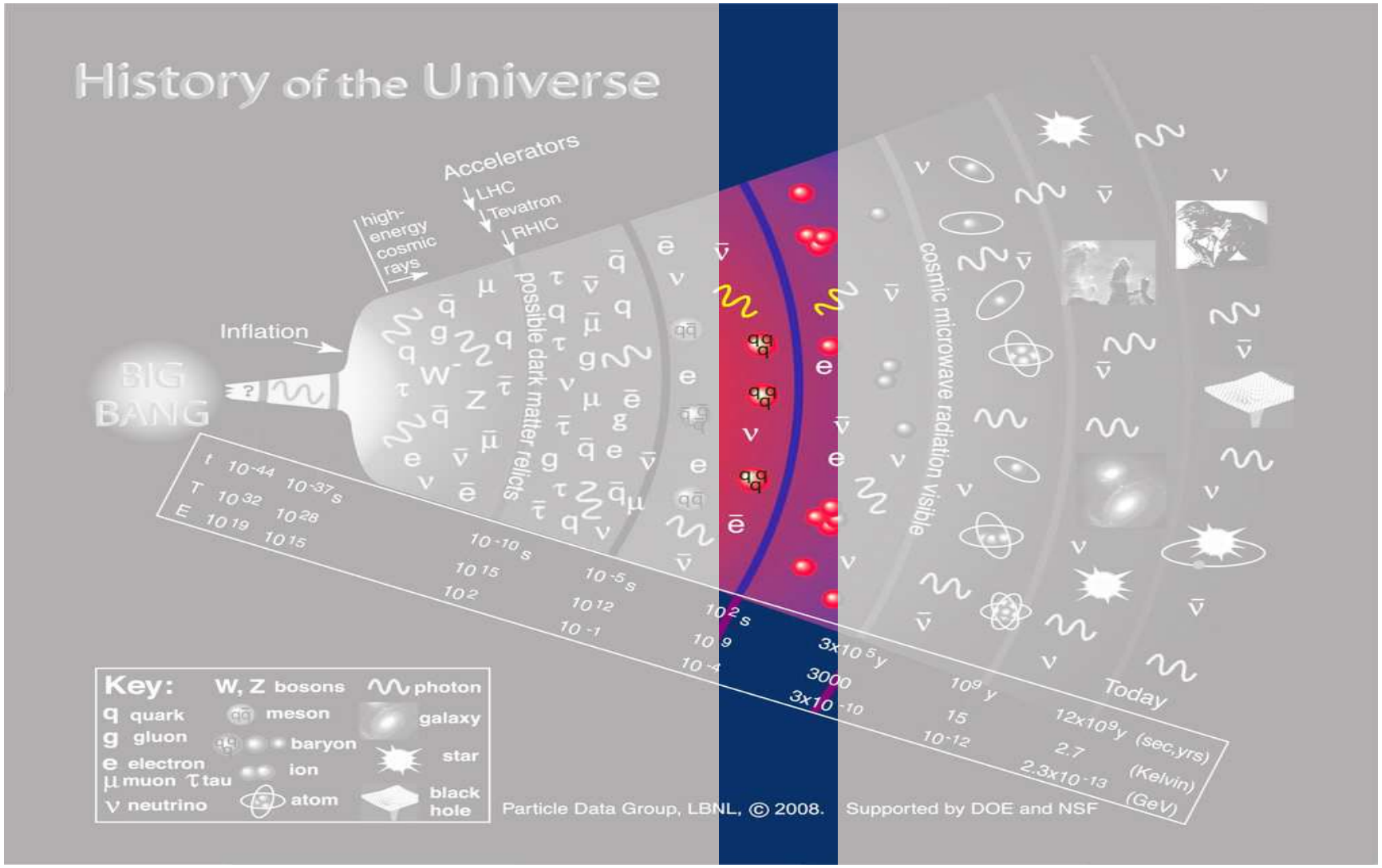
- “量子宇宙学”($t \leq 10^{-43}$s, $E \geq 10^{19}$GeV)
- 该时期宇宙的能标和尺度处于量子框架内，但由于量子宇宙理论尚待建立，人们并没有一个很好的理论描述该时期的宇宙，另外大爆炸时期存在奇点问题。

宇宙的演化



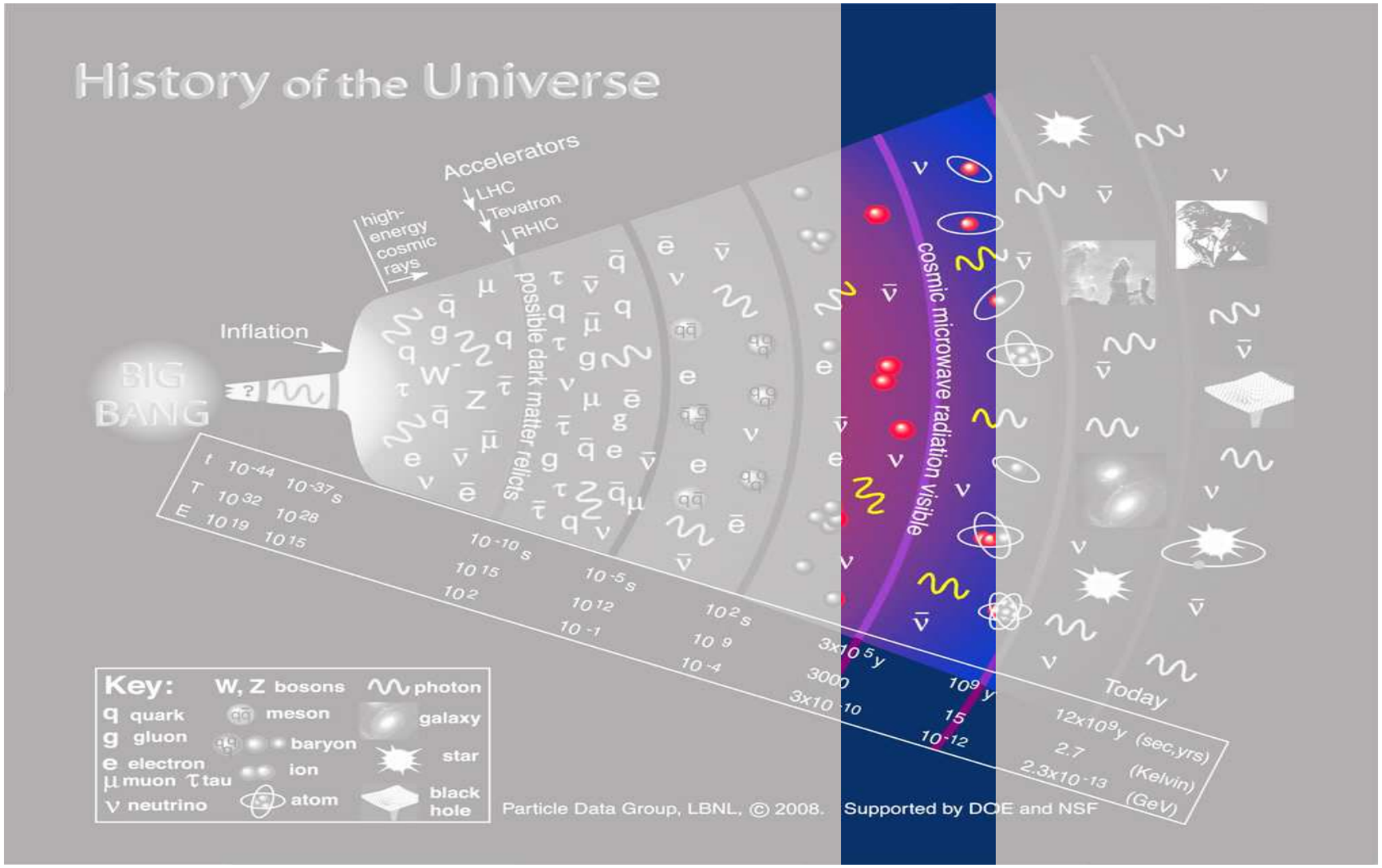
- “粒子宇宙学”(10^{-43} ~ 10^{-4}s, 10^{19} ~ 0.1GeV)
- 该时期事件有：暴涨、重子数（夸克）产生，暗物质形成、高能宇宙线产生、大统一对称性破缺、电弱对称性破缺、基本粒子获得质量、夸克转变成强子等。

宇宙的演化



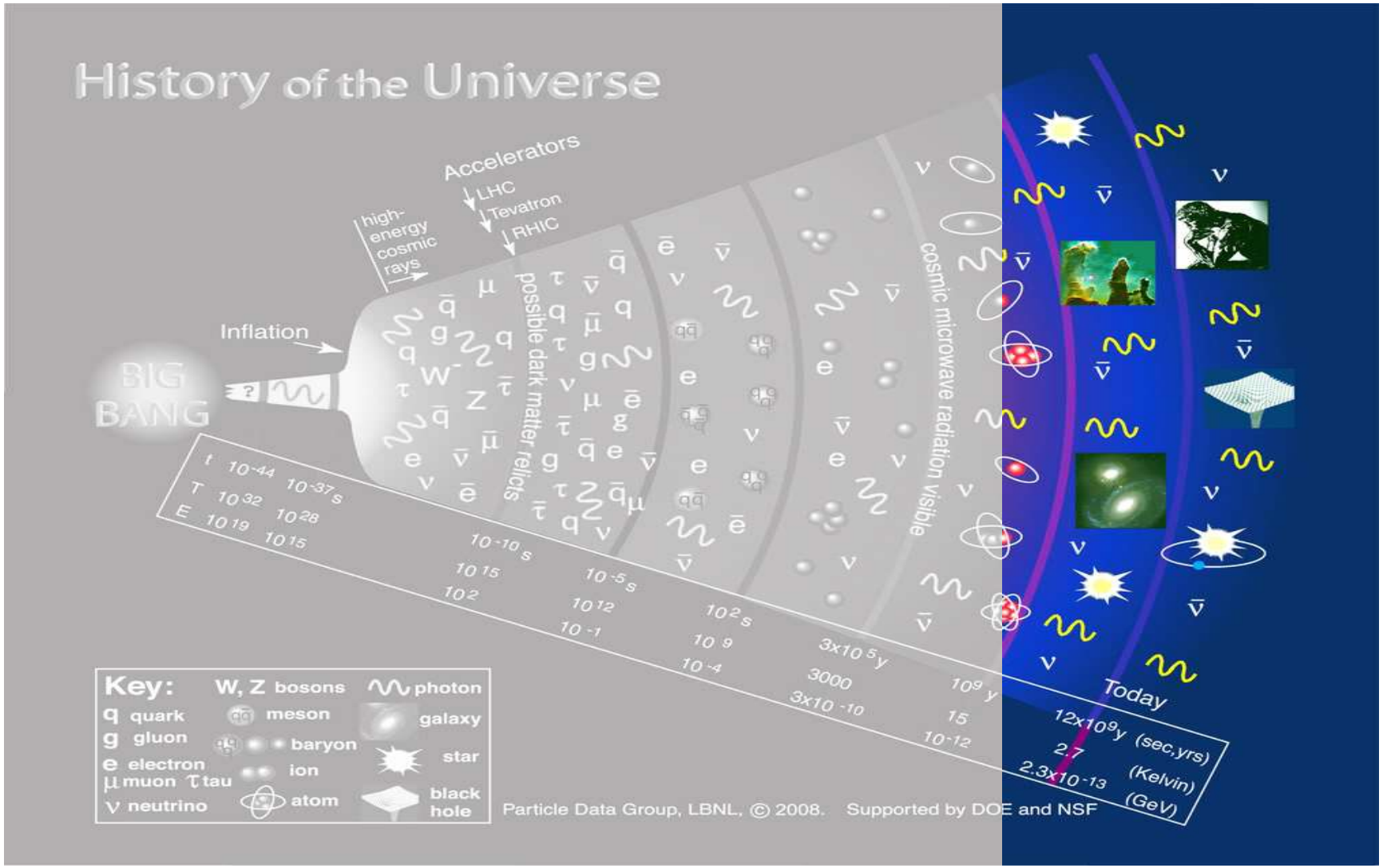
- “核宇宙学”(10^{-4} ~ 10^{12}s, 0.1GeV ~ 10eV)
- 该时期在大约1s~30min的时候，宇宙进入最初的核合成阶段，由基本粒子组成原子核。主要是H，He，Li等一些轻元素。

宇宙的演化



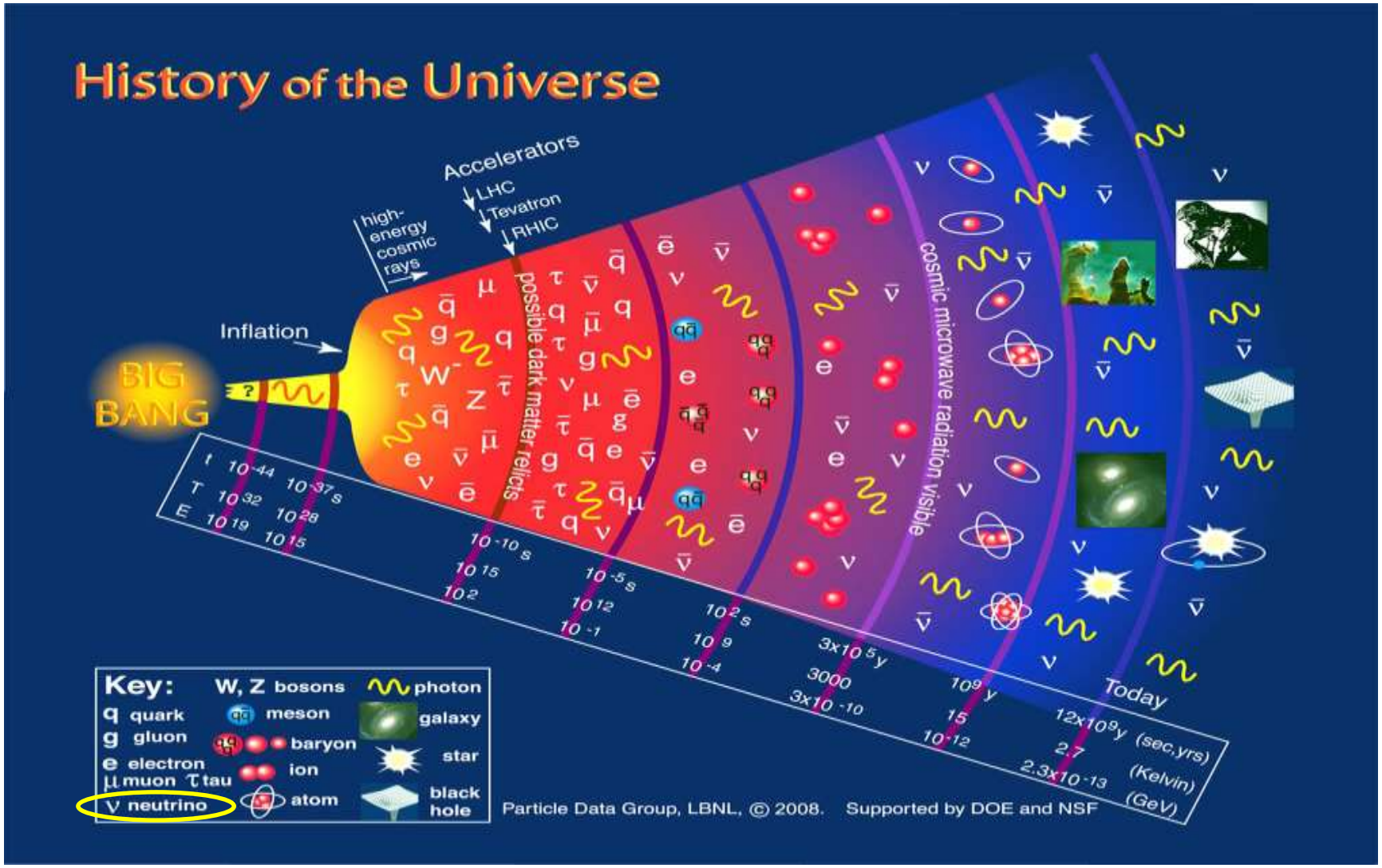
- “原子宇宙学”(10^4 ~ 10^9y, 10eV ~ 1meV)
- 该时期原子核和电子逐渐结合成中性氢原子，光子和重子物质退出热平衡系统，形成今天的宇宙微波背景辐射，宇宙从辐射为主时期进入物质为主时期。

宇宙的演化



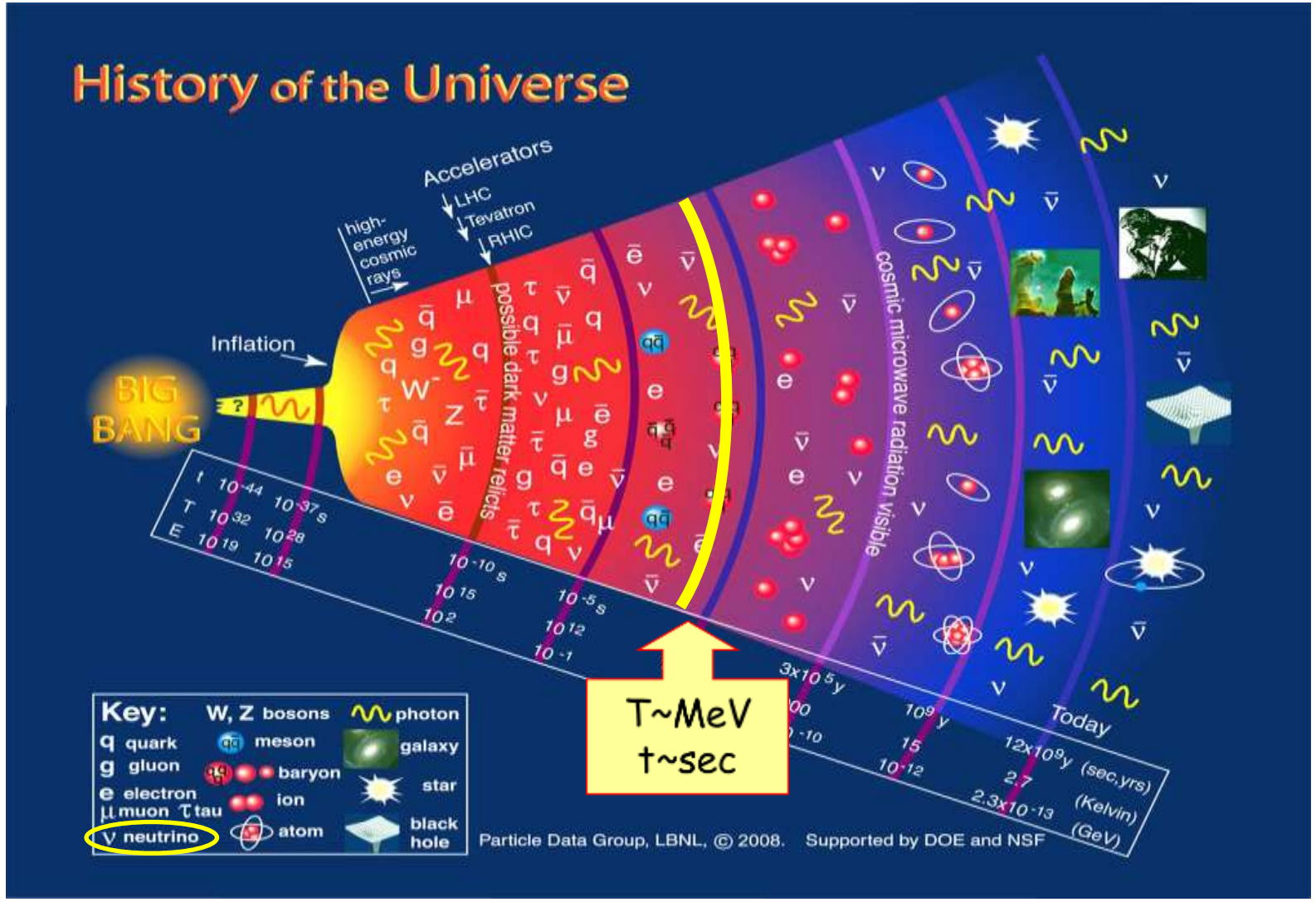
- “结构形成时期”($t > 10^9$y, $E <$ 1meV)
- 该时期宇宙大尺度结构产生、第一代恒星形成、宇宙再电离、宇宙从物质为主时期进入宇宙加速膨胀时期，暗能量开始成为宇宙的主导，影响宇宙的演化进程。

宇宙演化中的中微子


History of the Universe
Accelerators
LHC
Tevatron
RHIC
high-energy cosmic rays
Inflation
BIG BANG
possible dark matter relicts
cosmic microwave radiation visible
Today
Key:
W, Z bosons
q quark
g gluon
e electron
μ muon τ tau
ν neutrino
meson
baryon
ion
atom
photon
galaxy
star
black hole
Particle Data Group, LBNL, © 2008. Supported by DOE and NSF

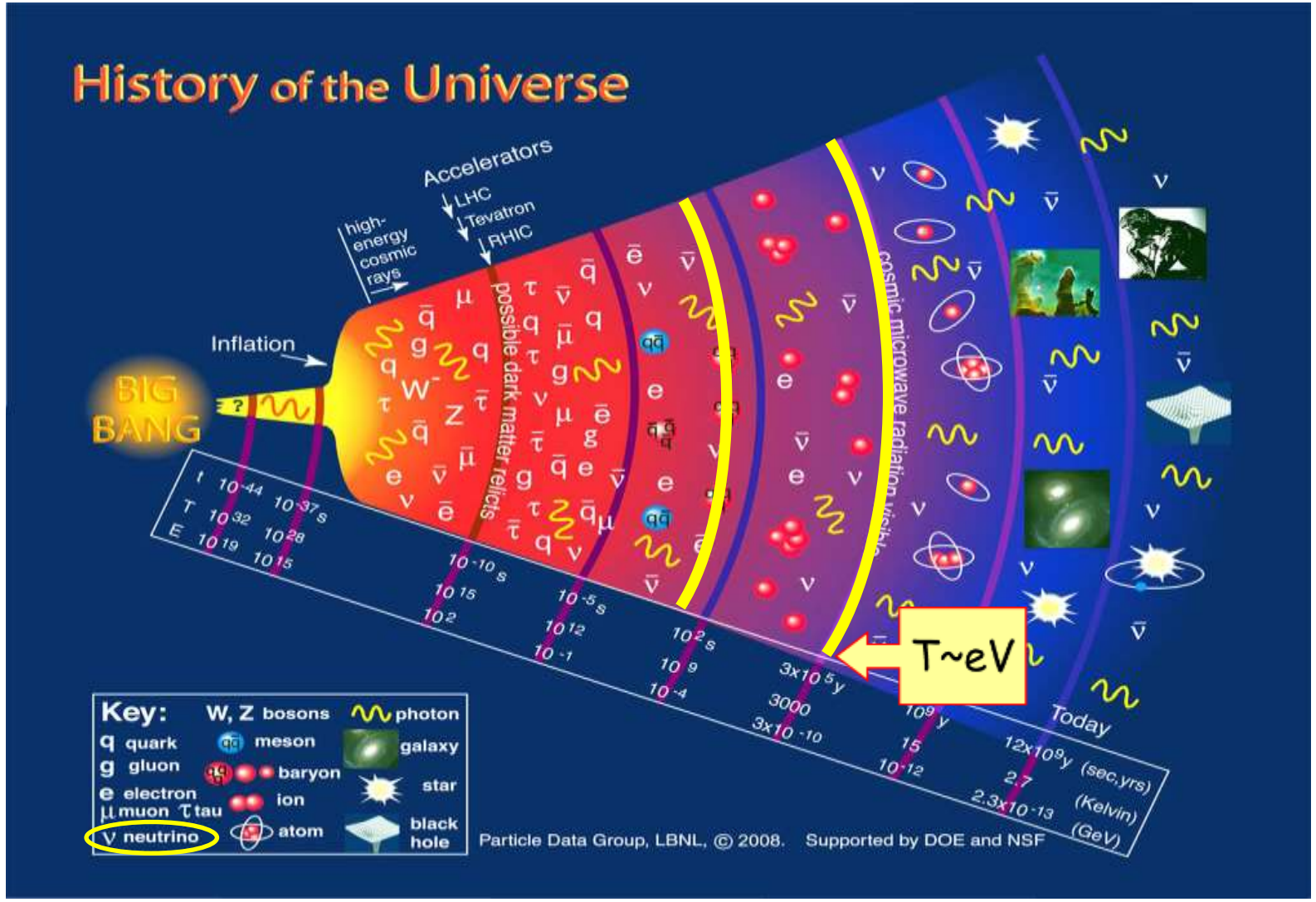
宇宙演化中的中微子

- T > MeV, 中微子通过弱相互作用与其他粒子处于热平衡状态
- T < MeV, 中微子脱离热平衡系统，开始自由传播，形成宇宙中微子背景(CNB)
- T ~ MeV, 中微子脱离热平衡的时间与宇宙的原初核合成时期非常接近

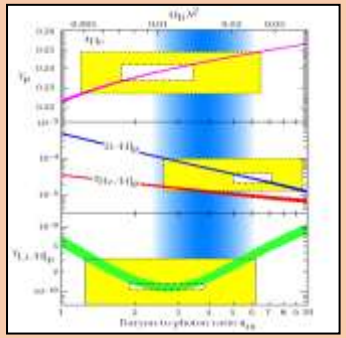
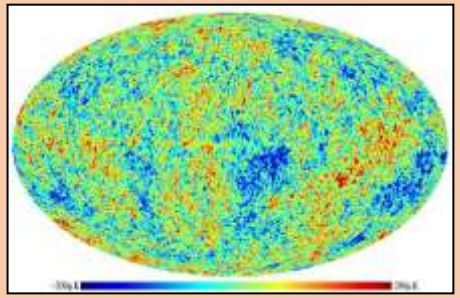
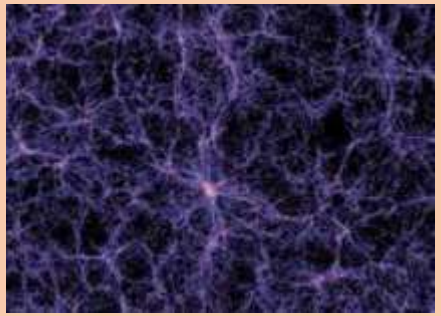


宇宙演化中的中微子

- $T > \mathrm{eV}$, 中微子处于相对论性
- $T < \mathrm{eV}$, 中微子至少有1代中微子开始转变成非相对论性
- 有质量中微子会在宇宙早期作为辐射形式参与宇宙演化，在宇宙晚期作为物质形式参与大尺度结构的形成过程，可以通过宇宙学研究中微子性质



中微子对宇宙演化影响

		
原初核合成 BBN	宇宙微波背景辐射 CMB	宇宙大尺度结构 LSS
$T \sim$ MeV	$T <$ eV	
N_{eff}	N_{eff} & m_ν	

相关教材和文献

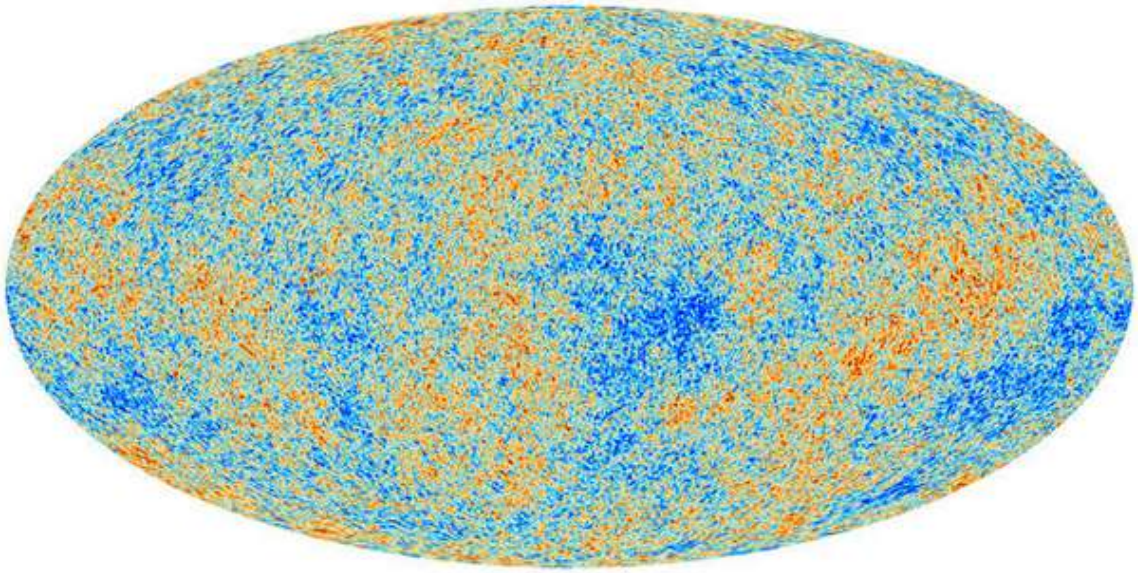
- 宇宙学经典教材
  - Modern Cosmology, Scott Dodelson (Academic Press, 2003)
  - The Early Universe, E. Kolb & M. Turner (Addison-Wesley, 1990)
- 中微子综述文献
  - Neutrino Cosmology, A. D. Dolgov, Phys. Rep. 370 (2002) [hep-ph/0202122]
  - Massive Neutrino and Cosmology, J. Lesgourgues & S. Pastor, Phys. Rep. 429 (2006) [astro-ph/0603494]

课程提纲

- 宇宙学基础知识
- 中微子遗迹的产生和退耦
- 中微子在三个演化阶段中的影响
- 中微子质量的宇宙学限制

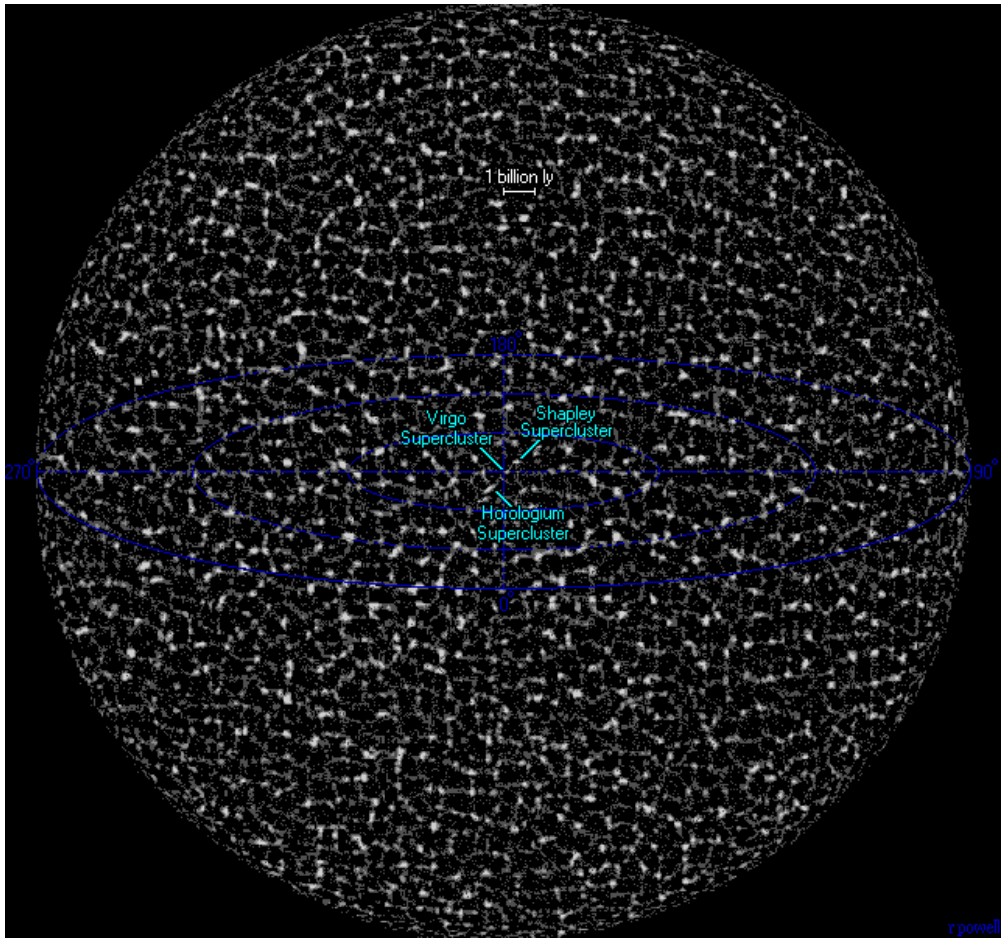
宇宙学基本原理

- 在大尺度上，宇宙中物质分布是均匀、各项同性的。
- 观测表明，宇宙在大尺度下的确是均匀各向同性的，如宇宙微波背景辐射在很高的精度上表现出均匀各向同性。



宇宙学基本原理

- 在大尺度上，宇宙中物质分布是均匀、各项同性的。
- 观测表明，宇宙在大尺度下的确是均匀各向同性的，如宇宙微波背景辐射在很高的精度上表现出均匀各向同性。
- 在小尺度上不是均匀各向同性的。原初密度涨落会通过引力不稳定性形成结构，物质并和形成星系，星系又并和形成星系团，最后形成观测到的宇宙大尺度结构。



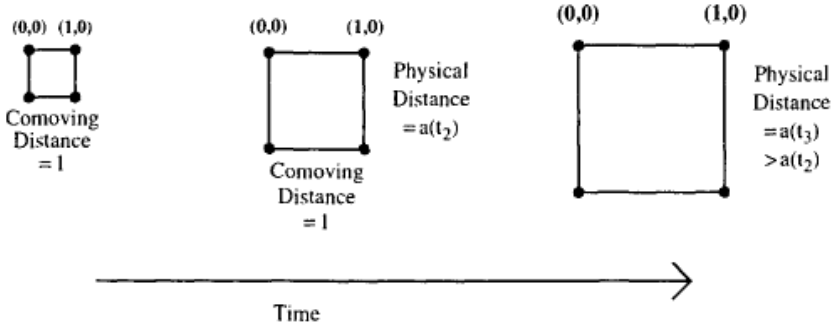
宇宙学基本公式

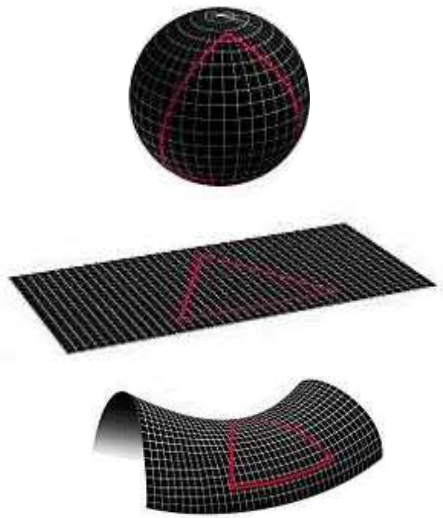
- 为了描述满足宇宙学基本原理的膨胀宇宙的空间特性，引入FLRW度规

$$ds^2 = -c^2dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right)\right]$$

- 这里 $a(t)$ 是尺度因子，描述宇宙的膨胀，K 表示宇宙的曲率，+1, 0, -1

宇宙开始：$a = 0$
宇宙今天：$a = 1$





- 利用爱因斯坦场方程，求解宇宙的演化规律

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Friedmann方程

- 假设宇宙中的各种成分都可以用理想流体进行描述
- 由爱因斯坦场方程的时间分量，可得Friedmann方程

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}$$

- H 表示哈勃参数，反映宇宙膨胀的速率

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \quad \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}$$

- 临界能量密度

$$\rho_{\mathrm{crit},0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.9 \times 10^{-29}\, h^2\, \mathrm{grams\ cm^{-3}}$$

$$= 2.8 \times 10^{11}\, h^2\, M_\odot\, \mathrm{Mpc^{-3}}$$

状态方程参数

- 进一步可以得到能量演化方程 $\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0$
- 仿照热力学定义，将各类成分的压强 P 和其能量密度 ρ 的关系定义为状态方程，其中 w 是状态方程参数 $P = w\rho$
- 通过求解可得宇宙中各类成分的能量密度随宇宙的演化规律

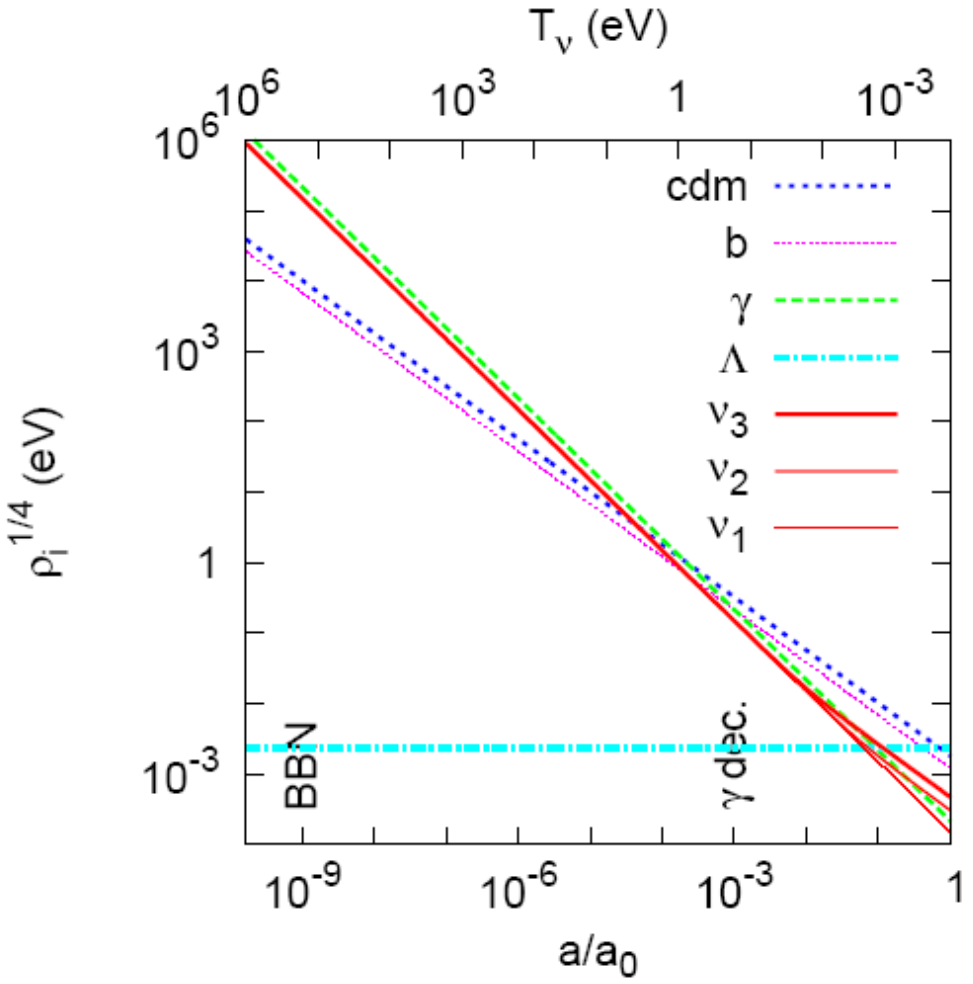
$$\rho \propto a^{-3(1+w)}$$

- 辐射物质： $P = \rho/3$ ， $w = 1/3$ $\rho_{\mathrm{r}} \propto a^{-4}$
- 普通物质： $w \sim 0$ $\rho_{\mathrm{m}} \propto a^{-3}$
- 暗能量： $w = -1$ ρ_{Λ} 为常数

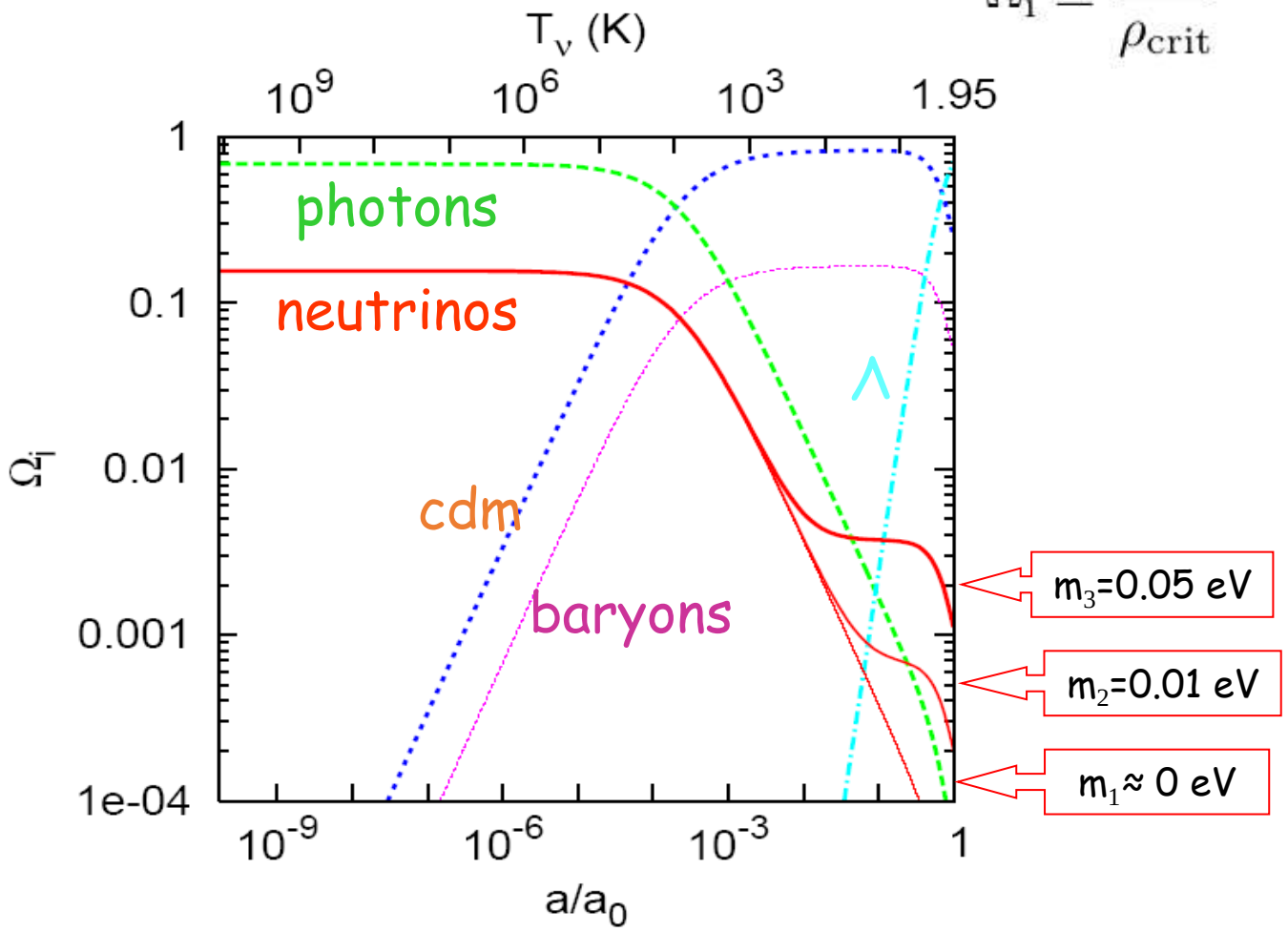
能量密度的演化

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_b + \rho_c + \rho_\nu + \rho_{\rm DE} + \rho_\gamma\right)$$

- 由此可以得到 $T \sim 1\text{MeV}$ 至今，宇宙中各类成分的能量密度演化情况



$$\Omega_{\rm i} \equiv \frac{\rho_{\rm i}}{\rho_{\rm crit}}$$

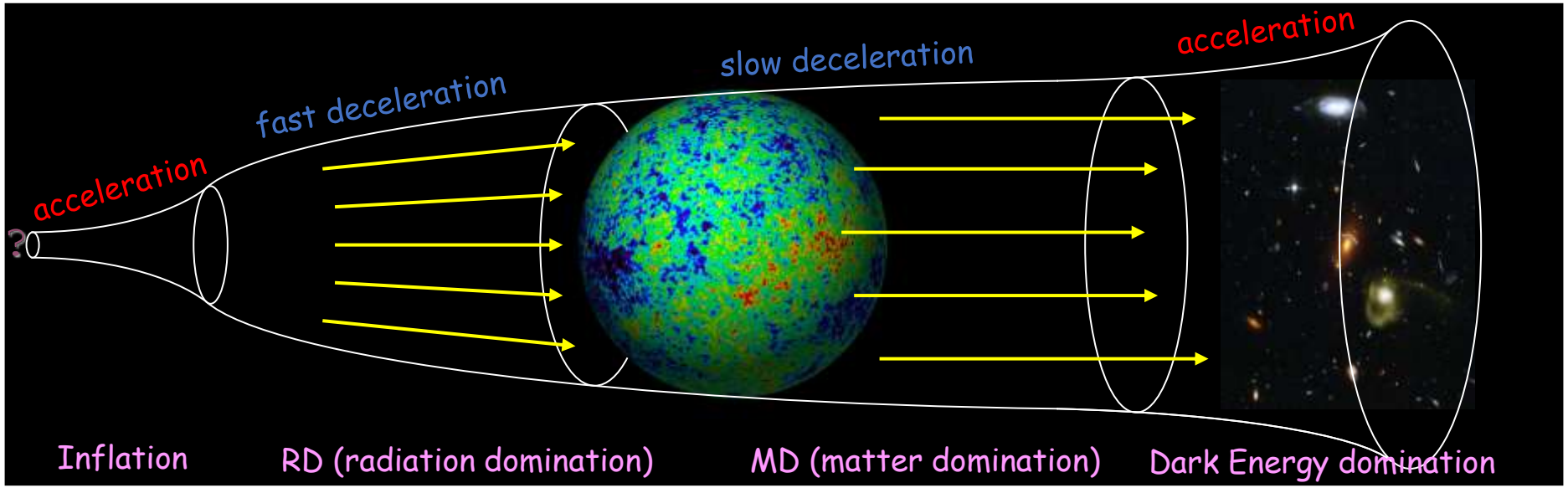


宇宙膨胀的加速度

- 由爱因斯坦场方程的空间分量，可得方程

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)$$

- 宇宙中各类成分的能量密度和压强决定宇宙膨胀的加速度



$$a_{\mathrm{r}}(t) \propto (t - t_0)^{1/2} \quad a_{\mathrm{m}}(t) \propto (t - t_0)^{2/3}$$

课程提纲

- 宇宙学基础知识
- 中微子遗迹的产生和退耦
- 中微子在三个演化阶段中的影响
- 中微子质量的宇宙学限制

热平衡状态

- 宇宙早期，由于温度很高($T \sim 1/a$)，各种粒子都处于热平衡状态中，粒子之间可以进行充分的相互作用。热平衡状态中的粒子具有相同的温度，且服从玻色或费米分布函数。

$$f_i^{eq}(p,T) = \left[\exp\left(\frac{E_i - \mu_i}{T}\right) \mp 1\right]^{-1}$$

$$n = g_i \int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^3} f_i(p,T)$$

$$\rho = g_i \int \frac{d^2\vec{p}}{(2\pi)^3} E_i \, f_i(p,T)$$

VARIABLE	RELATIVISTIC		NON REL.
	BOSE	FERMI	
n	$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3$	$\frac{3}{4}\frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3$	$g\left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m/T}$
ρ	$\frac{\pi^2}{30} g T^4$	$\frac{7}{8}\frac{\pi^2}{30} g T^4$	mn

中微子退耦

- 温度 T > MeV 时，中微子与其他粒子一起处于热平衡状态
- 随着宇宙的膨胀，温度不断降低，热平衡系统中的粒子的数密度也在降低，这就使得中微子所参与的弱相互作用慢慢无法保证中微子能继续保持在热平衡系统当中
- 当宇宙的膨胀速率大于中微子的弱相互作用反应率，中微子就将退出热平衡系统

$$H = \sqrt{\frac{8\pi\rho}{3M_P^2}} = \Gamma_\nu = \langle \sigma_\nu n_\nu \rangle \qquad T_{\rm dec} \approx 1\ {\rm MeV}$$

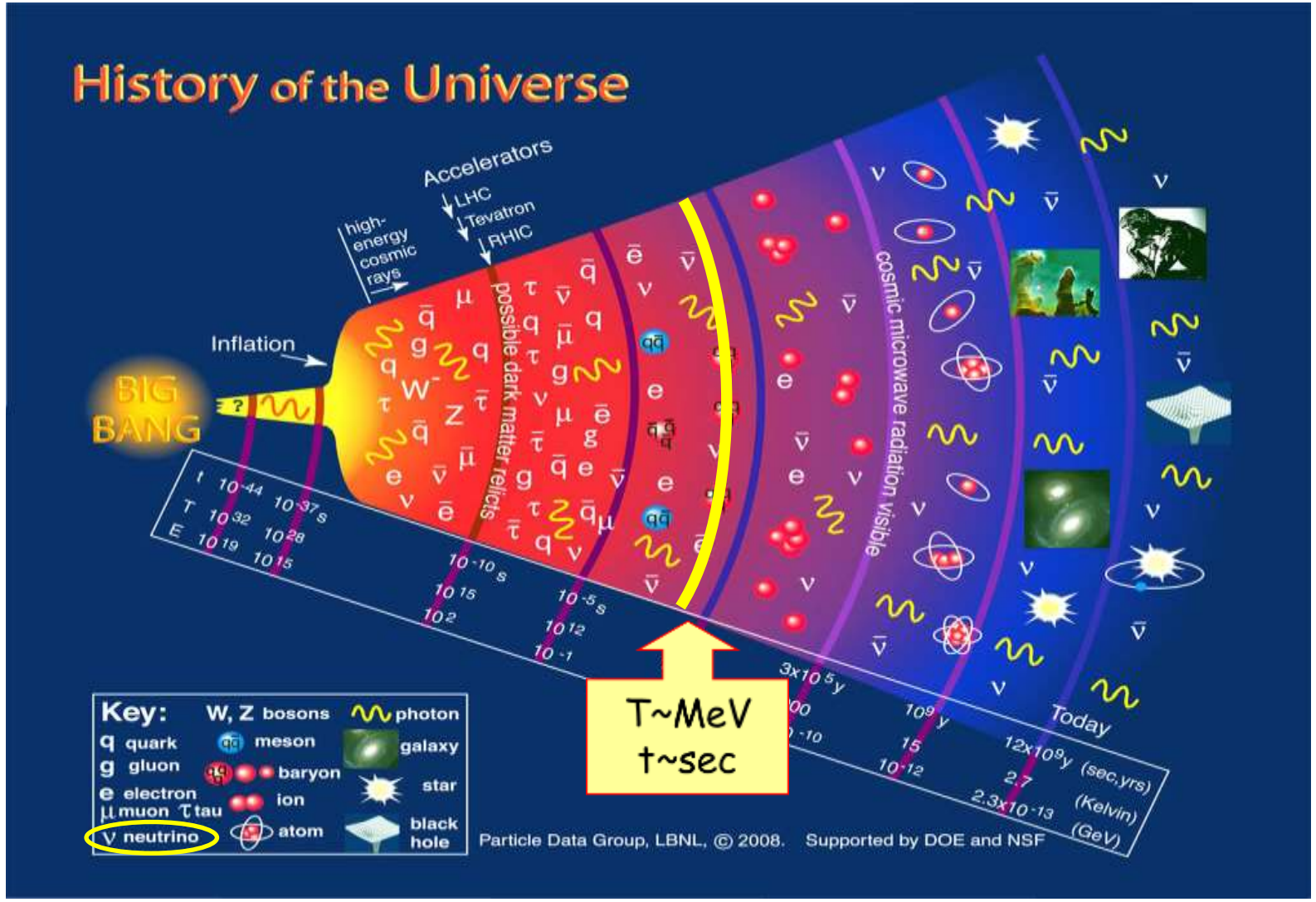
- 由于电子中微子会和正负电子发生 CC 和 NC 相互作用

$$T_{\rm dec}(\nu_e) \sim 2{\rm MeV}; \quad T_{\rm dec}(\nu_\mu,\nu_\tau) \sim 3{\rm MeV}$$

中微子退耦

- T > MeV, 中微子通过弱相互作用与其他粒子处于热平衡状态
- T < MeV, 中微子脱离热平衡系统，开始自由传播，形成宇宙中微子背景(CNB)，由于中微子质量较小，退耦后依然保持相对性费米子的分布函数

$$f_\nu(p,T)=\frac{1}{e^{p/T_\nu}+1}$$



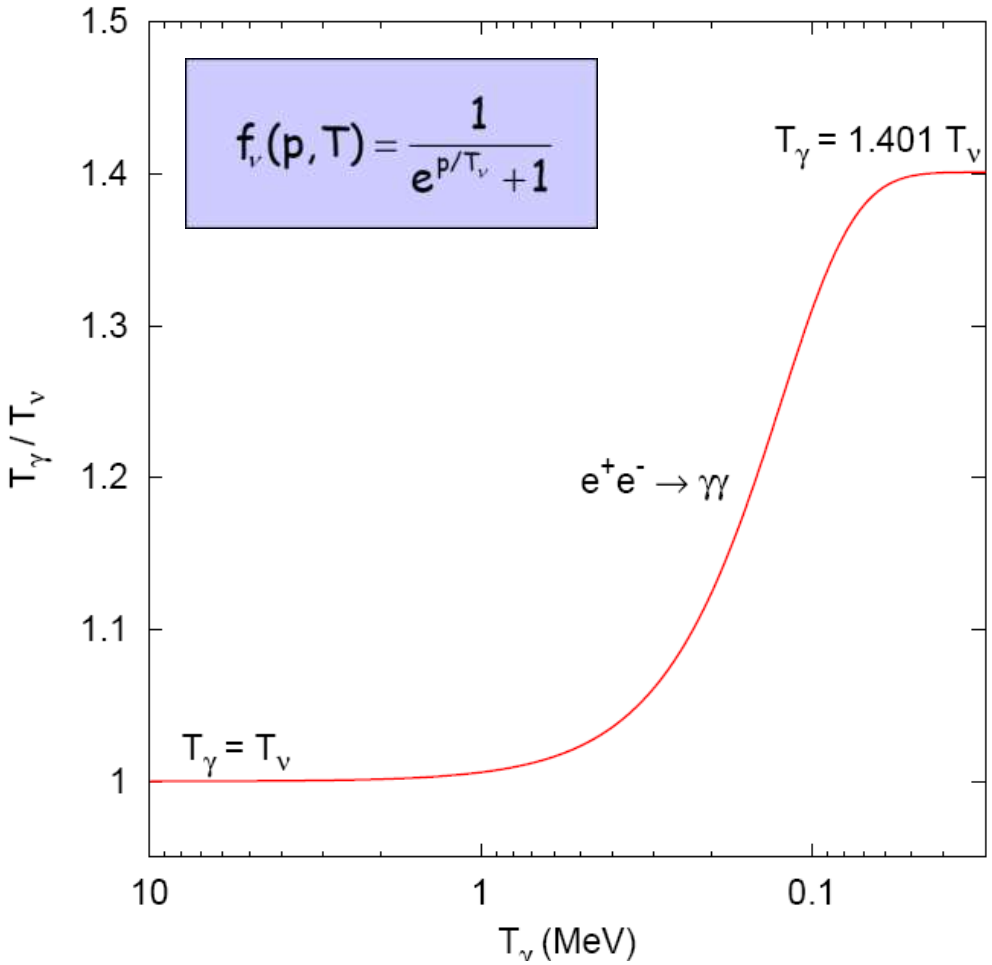
中微子退耦

- $T \sim$ MeV 中微子开始退耦 $T_\nu = T_\gamma$
- $T \sim m_e = 0.511$MeV 正负电子湮灭成光子的过程会加热光子，但是不会加热退耦的中微子

$$e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$$

- 因此，光子和中微子的温度关系会发生变化

$$\frac{T_\gamma}{T_\nu} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}$$



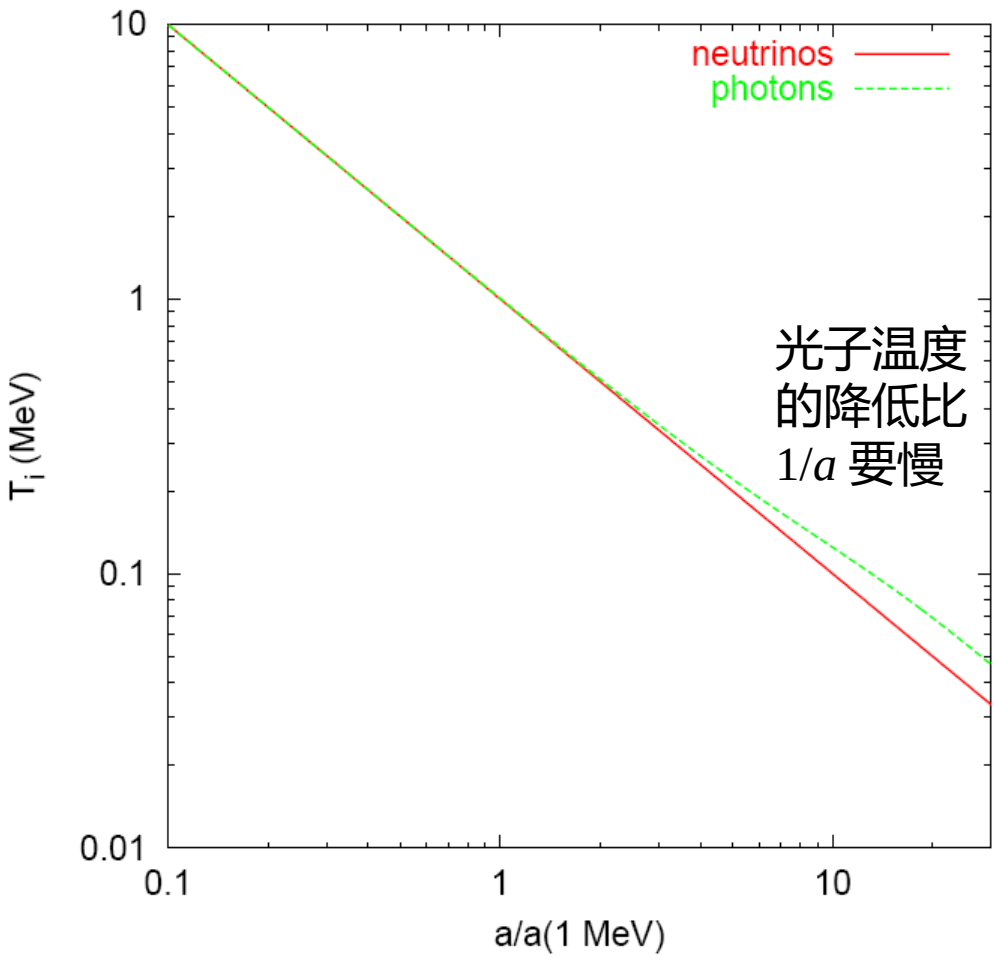
中微子退耦

- $T \sim$ MeV 中微子开始退耦 $T_\nu = T_\gamma$
- $T \sim m_e = 0.511$MeV 正负电子湮灭成光子的过程会加热光子，但是不会加热退耦的中微子

$$e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma$$

- 因此，光子和中微子的温度关系会发生变化

$$\frac{T_\gamma}{T_\nu} = \left(\frac{11}{4}\right)^{1/3}$$



宇宙中微子背景

- $T \sim$ MeV，中微子退耦后依然保持相对性费米子的分布函数

$$f_\nu(p,T) = \frac{1}{e^{p/T_\nu}+1}$$

- 计算可得中微子遗迹的数密度（~112cm^{-3} per flavor）

$$n_\nu = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_\nu(p,T_\nu) = \frac{3}{11} n_\gamma = \frac{6\zeta(3)}{11\pi^2} T_{CMB}^3$$

- 中微子遗迹的能量密度

$$\Omega_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho_{\rm crit}}$$

$$\rho_{\nu_i} = \int \sqrt{p^2 + m_{\nu_i}^2} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_\nu(p,T_\nu) \rightarrow \begin{cases} \frac{7\pi^2}{120}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} T_{CMB}^4 \\ m_{\nu_i} n_\nu \end{cases}$$

$$\Omega_\nu h^2 = 1.7 \times 10^{-5}$$ 无质量

$$\Omega_\nu h^2 = \frac{\sum_i m_i}{94.1\text{eV}}$$ 有质量

宇宙中的相对论性粒子

- 这个时期，辐射物质占据宇宙的主导成分，影响着宇宙的演化 $H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3}$
- 辐射物质主要由光子和中微子组成，所以其能量密度为

$$\rho_{\mathrm{r}} = \rho_\gamma + \rho_\nu = \frac{\pi^2}{15}T_\gamma^4 + 3\times\frac{7}{8}\times\frac{\pi^2}{15}T_\nu^4 = \left[1+\frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3}3\right]\rho_\gamma$$

- 为了更一般性的表示早期宇宙中的相对论性粒子，设置参数 N_{eff}

$$\rho_{\mathrm{r}} = \rho_\gamma + \rho_\nu = \left[1+\frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3}N_{\mathrm{eff}}\right]\rho_\gamma$$

- N_{eff} 将直接影响早期宇宙的膨胀历史，可以通过宇宙学观测进行限制

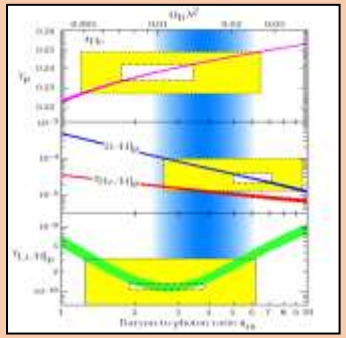
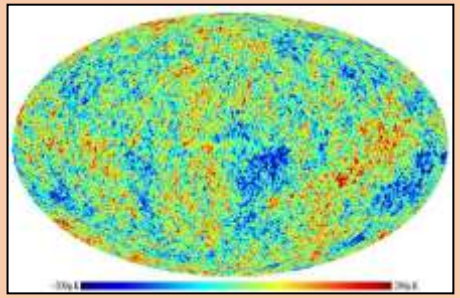
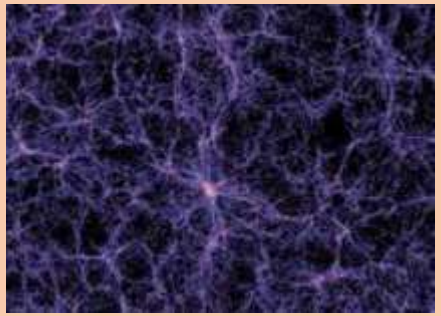
中微子非瞬时退耦

- 对于非标准的早期宇宙模型，比如惰性中微子、早期重粒子衰变的相对论性产物等，都有可能影响 N_{eff} 的数值，因此，可以通过对 N_{eff} 的测量来限制这些模型。
- 但是，即便是标准的中微子模型，N_{eff} 也不是严格等于3！
- 因为，中微子离开热平衡系统的退耦过程并不是完美的、瞬时完成的，因此，当正负电子湮灭过程加热光子的时候，依然有一小部分中微子因未完全脱离热平衡系统而受到该过程的影响，导致中微子的温度有略微的升高，中微子此时的分布函数会存在微小的修正

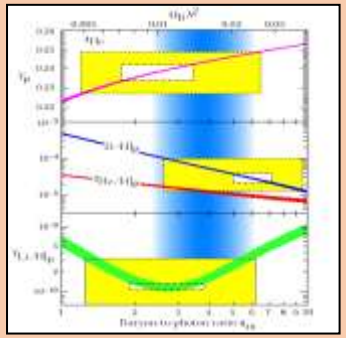
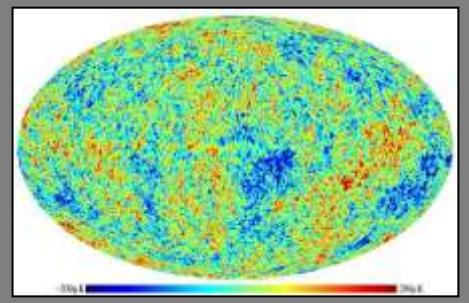
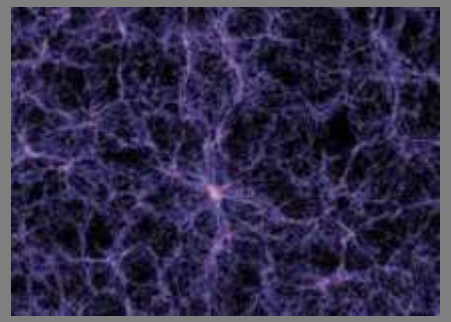
$$f_\nu = f_{\mathrm{FD}}(p, T_\nu)(1 + \delta f(p))$$

- 严格计算得，标准中微子模型下，$N_{eff} = 3.046$，能量密度 $\Omega_\nu h^2 = \frac{\sum_i m_i}{93.1\mathrm{eV}}$，数密度 $n_\nu \sim 113\mathrm{cm}^{-3}$ per flavor

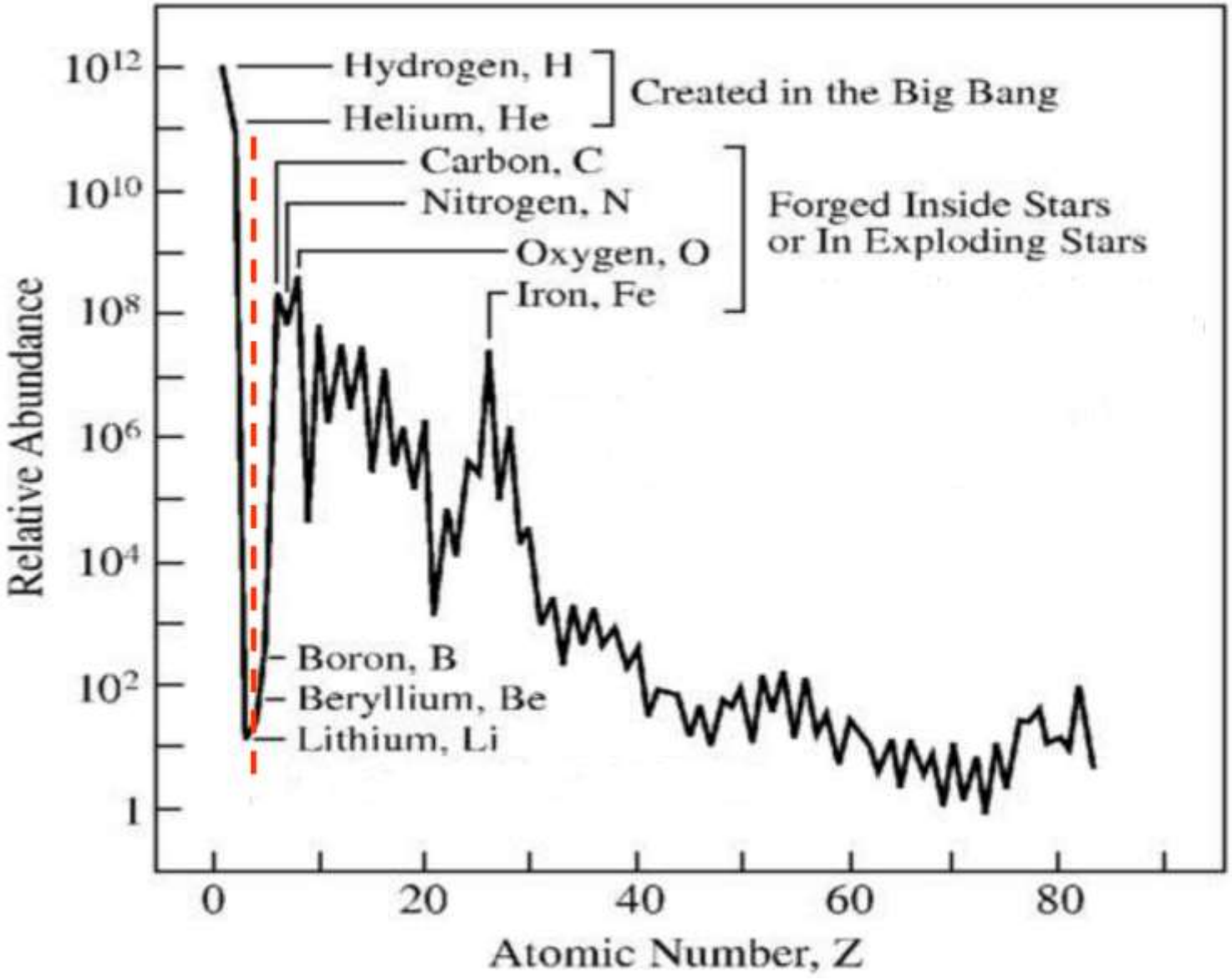
中微子在三个演化阶段中的影响

		
原初核合成 BBN	宇宙微波背景辐射 CMB	宇宙大尺度结构 LSS
$T \sim$ MeV	$T <$ eV	
N_{eff}	N_{eff} & m_ν	

中微子在三个演化阶段中的影响

		
原初核合成 BBN	宇宙微波背景辐射 CMB	宇宙大尺度结构 LSS
$T \sim$ MeV	$T <$ eV	
N_{eff}	N_{eff} & m_ν	

原初核合成


Hydrogen, H
Helium, He
Created in the Big Bang
Carbon, C
Nitrogen, N
Oxygen, O
Iron, Fe
Forged Inside Stars
or In Exploding Stars
Boron, B
Beryllium, Be
Lithium, Li
Relative Abundance
10^{12}
10^{10}
10^{8}
10^{6}
10^{4}
10^{2}
1
0
20
40
60
80
Atomic Number, Z

热平衡系统

- T > MeV 时，宇宙热平衡系统中的质子和中子可以结合成最简单的原子核--氘(^{2}D)，但是由于此时宇宙温度很高，而且氘核周围有太多的高能光子，无法产生大量的氘核。
- 系统中的质子和中子会通过弱相互作用而发生相互转化
- 中子和质子的数密度之比
- 随着温度的降低，中子和质子数之比也是不断降低的

$$p + n \leftrightarrow {}^2D + \gamma$$

$$p + e^- \leftrightarrow n + \nu_e$$

$$p + \bar{\nu}_e \leftrightarrow n + e^+$$

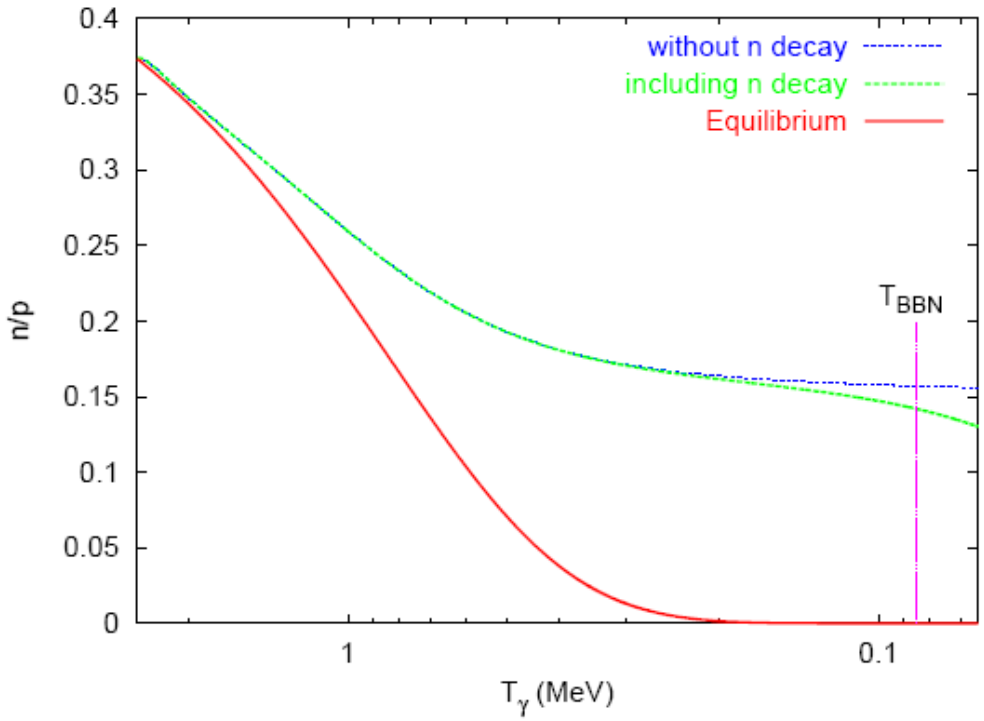
$$n_n/n_p = e^{-(m_n - m_p)/T}$$

n/p 数密度之比固定

- 随着宇宙的膨胀，温度逐渐降低。当 $T \sim 1\text{MeV}$ 时，质子和中子之间的弱相互作用反应率不再远大于宇宙的膨胀速率，弱相互作用很难继续维持，质子和中子不能再互相转化，中子和质子的数密度之比就被固定下来，约为1:7

- 不过，中子还可以通过衰变，继续向质子转化。中子衰变的半衰期约为10分钟，所以，当宇宙温度降到0.1MeV的时候，宇宙诞生3分钟左右，中子开始衰变

$$n \to p + e^- + \nu_e$$

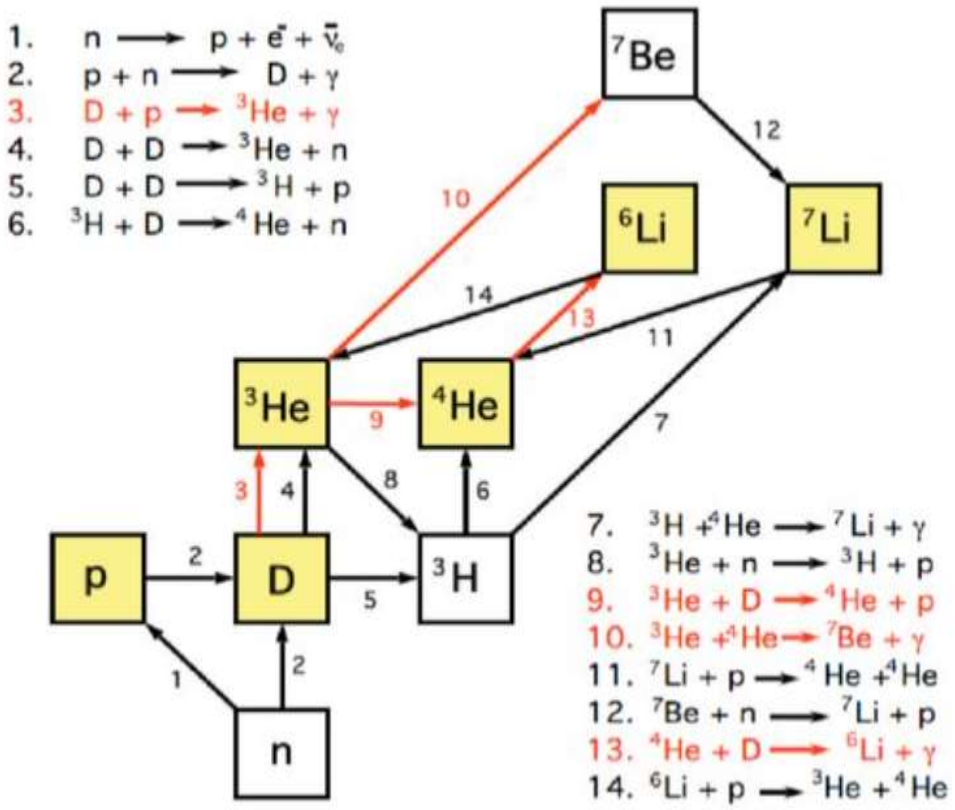


氘核产生

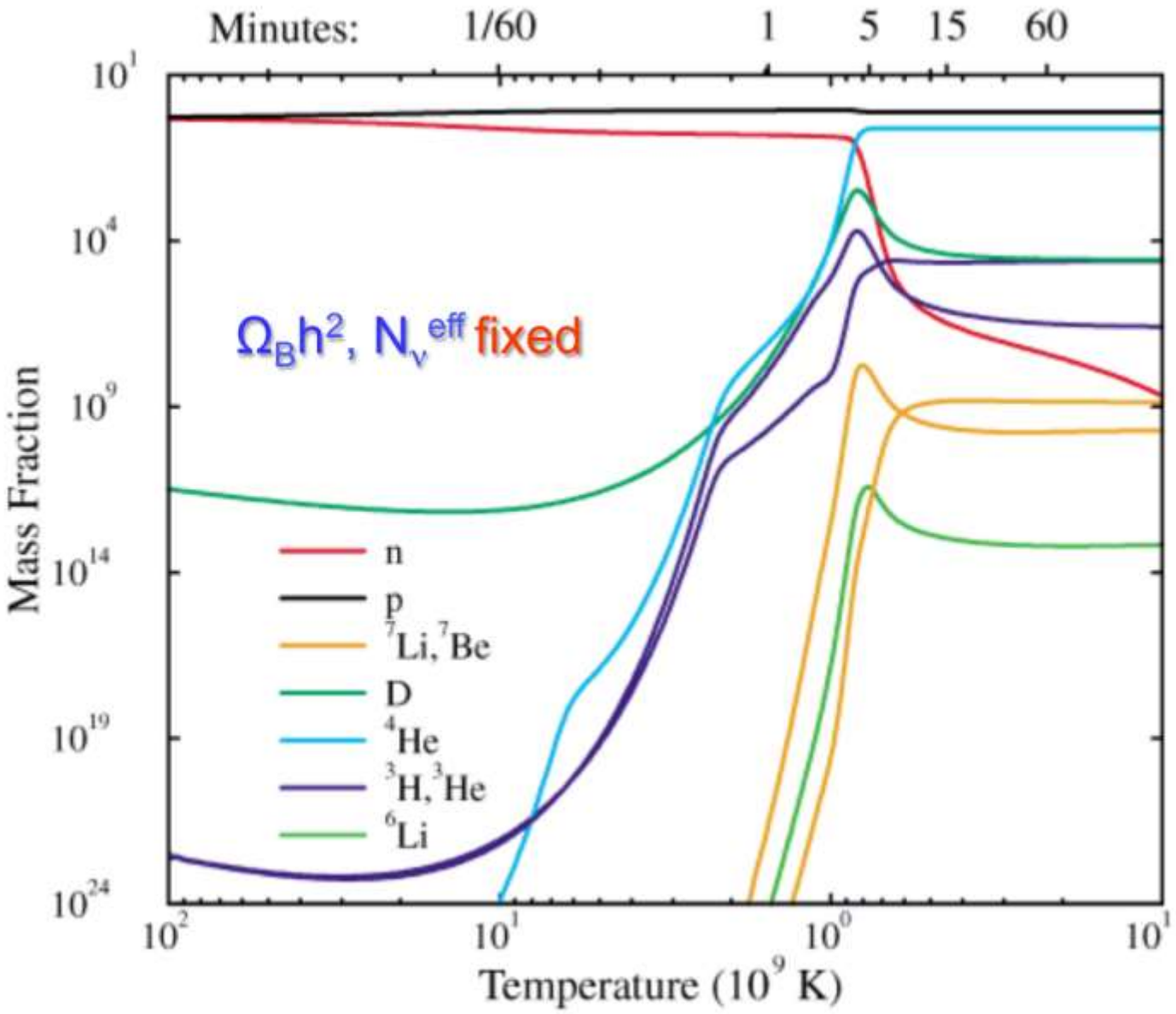
- 当宇宙温度降到0.1MeV的时候，中子和质子周围的高能光子迅速减少，使得产生的氘核不再被高能光子瓦解。
- 随着氘核的不断产生，原初核合成过程正式开始。
- 可以发现，原初核合成过程和两个非常关键的参数有关：
- 重子和光子的数密度之比 η，$\eta \sim 6\times10^{-10}$，$\eta$ 越大，光子越少，氘核可以更早的大量产生，原初核合成过程可以更早发生
- 中微子有效代数 N_{eff}，N_{eff}越大，辐射能量密度越高，宇宙膨胀速率越大，质子和中子的弱相互作用更早无法维持，固定下来的中子和质子数密度之比也就更大，参与原初核合成的中子数就更多

连锁核反应

- 一旦氘合成开始，后续的连锁核反应都将快速进行，标准的原初核合成主要有如下的12个核反应过程
- 由于原子量 A=5 不存在稳定的原子核，前期主要的核反应在生成大量的^{4}He后就中断了
- 随着^{4}He的积累，后期出现更多原子量增加的反应，但是原子量 A=8 同样不存在稳定的原子核，所以最终只合成少量的^{7}Li和^{7}Be
- 当温度降低到0.01MeV时，一切热核反应都停止了，原初核合成过程结束。

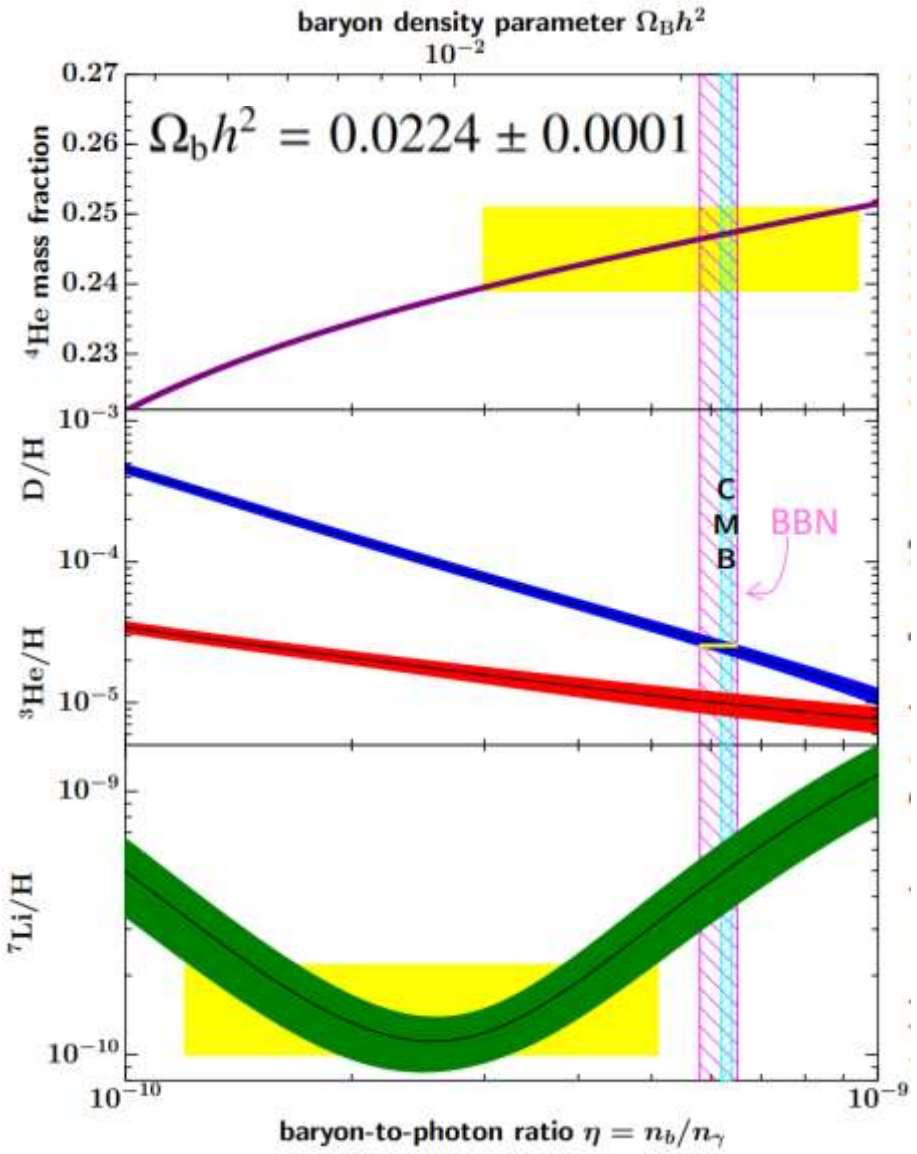


原初核合成的发展过程


Minutes: 1/60 1 5 15 60
10^{1}
10^{4}
10^{9}
10^{14}
10^{19}
10^{24}
Mass Fraction
$\Omega_B h^2$, N_ν^{eff} fixed
n
p
^{7}Li, ^{7}Be
D
^{4}He
^{3}H, ^{3}He
^{6}Li
10^{2}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
Temperature (10^9 K)

原初丰度的测量

- 通过对于各种轻元素丰度的测量，可以限制相关的宇宙学模型参数，常用的有：
- ^{4}He的丰度：主要通过对河外的HII恒星形成区域进行观测，$Y_p = 0.245 \pm 0.003$
- D的丰度：主要通过对高红移类星体的吸收线进行测量，[D/H] = (2.543 ± 0.027) ×10^{-5}
- ^{7}Li的丰度：主要通过对贫金属矮星的大气进行测量，[^{7}Li /H] = (1.6 ± 0.3) ×10^{-10}
- ^{3}He的丰度：由于不太容易和^{4}He的观测进行区分，目前还没有非常可信的测量



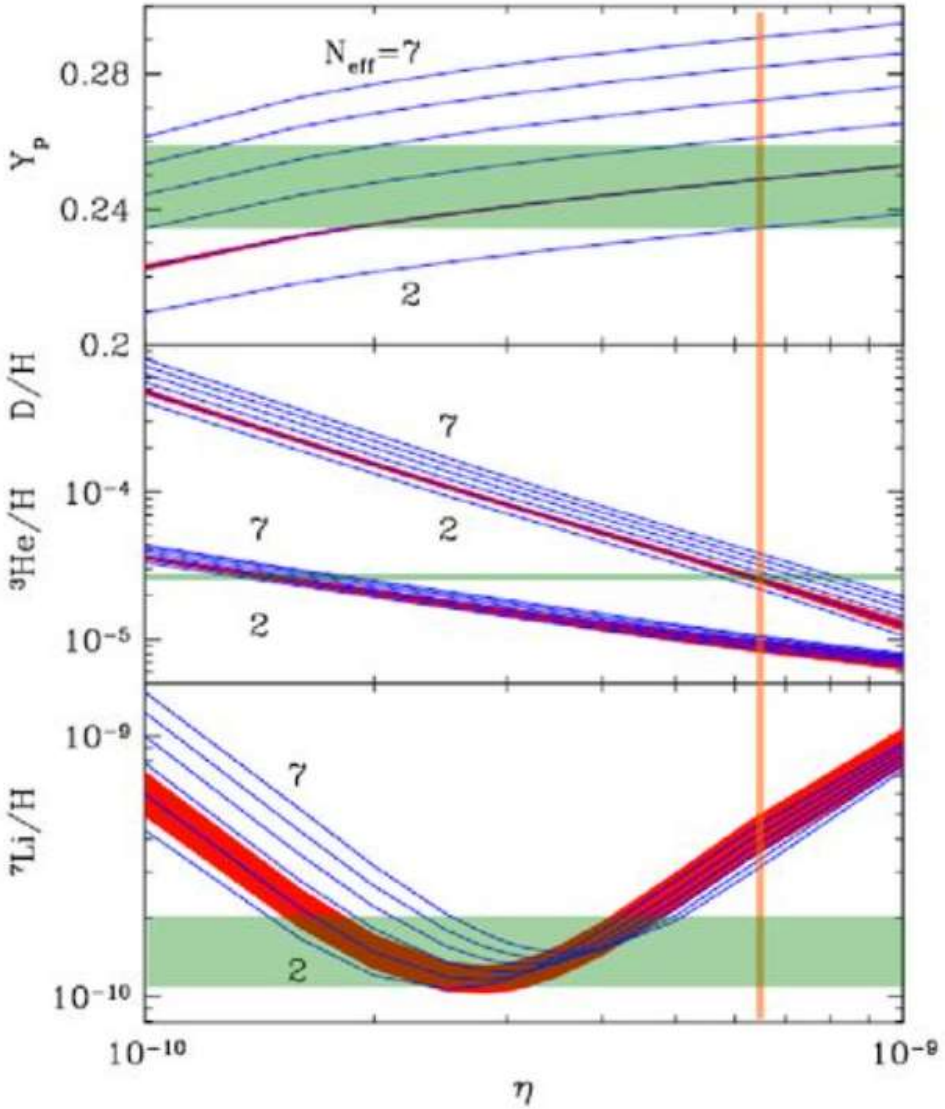
中微子的影响

- 中微子有效代数 N_{eff} 越大，会使得参与原初核合成的中子数就更多，进而导致大部分元素的丰度变大。
- 因此，通过对于 Y_p 和 [D/H] 的测量，可得

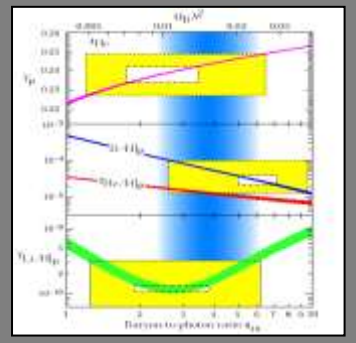
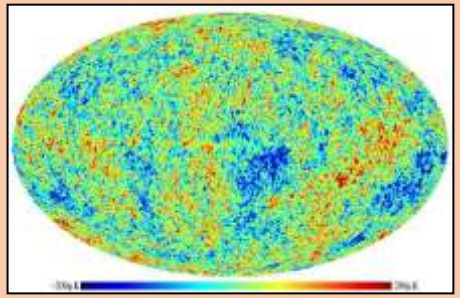
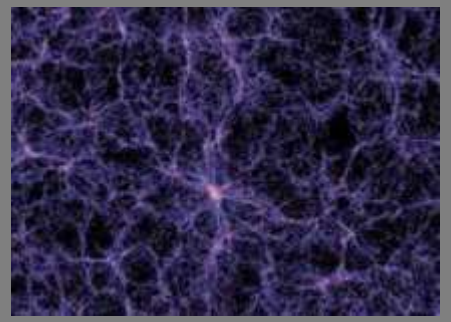
$$N_{\rm eff} = 2.889 \pm 0.229 \ (1\,\sigma)$$

- 如果再加上Planck宇宙微波背景辐射的观测结果，可以得到对于 N_{eff} 很强的限制

$$N_{\rm eff} = 2.898 \pm 0.141 \ (1\,\sigma)$$

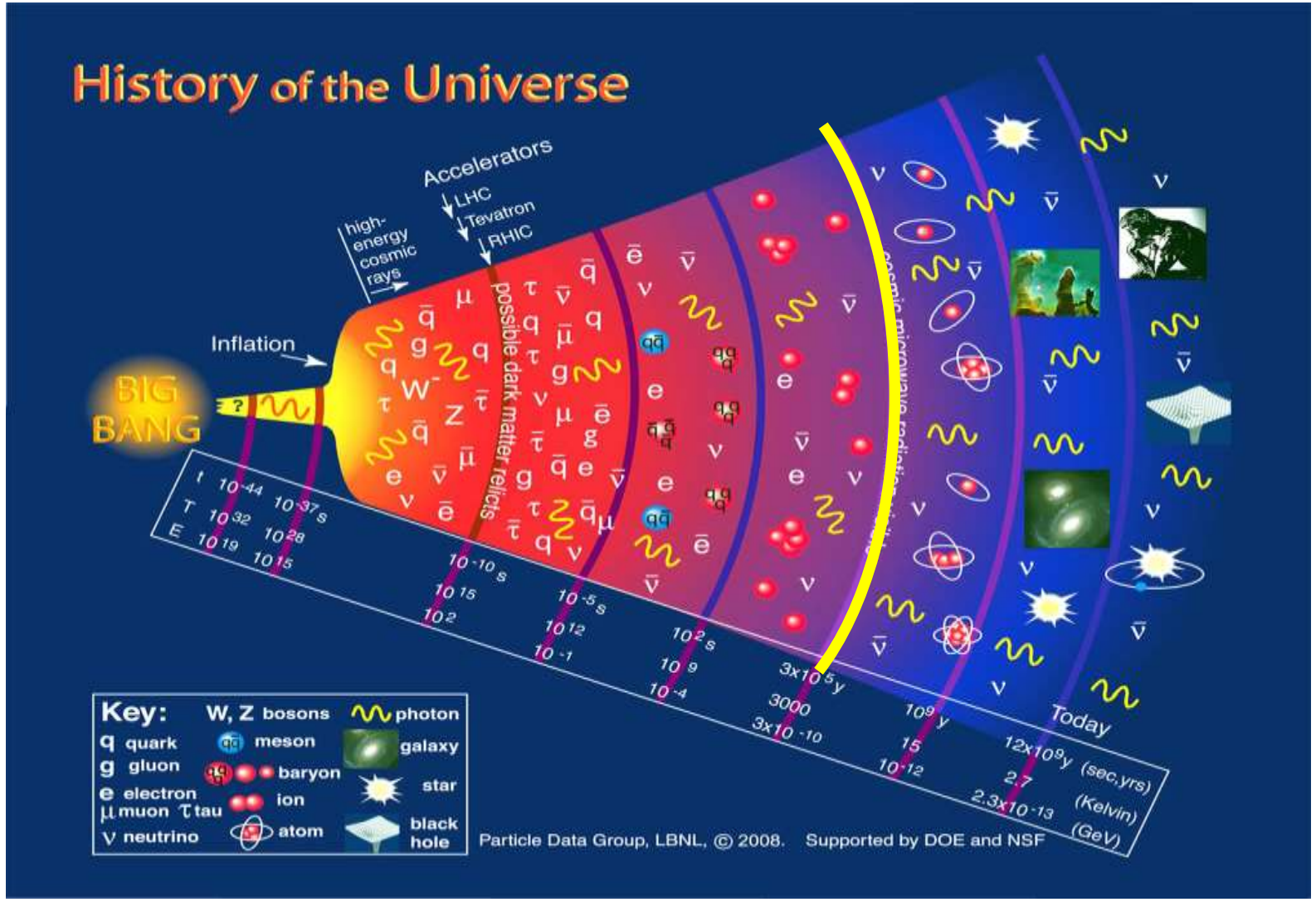


中微子在三个演化阶段中的影响

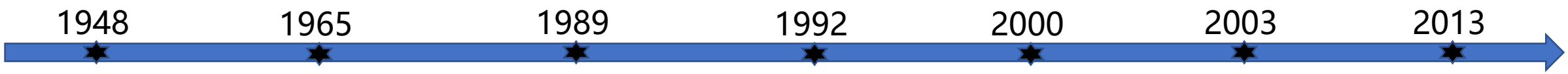
		
原初核合成 BBN	宇宙微波背景辐射 CMB	宇宙大尺度结构 LSS
$T \sim$ MeV	$T <$ eV	
N_{eff}	N_{eff} & m_ν	

CMB的产生

- $T > \mathrm{eV}$ 时，宇宙中的自由电子、质子和光子处于热平衡系统中
- $T \sim 0.1\mathrm{eV}$ 时，由于温度降低，自由电子无法抵抗质子的结合能，形成中性氢原子
- 光子由于无法继续与自由电子发生汤姆逊散射，开始退出热平衡系统，自由传播，形成宇宙微波背景辐射



CMB的观测历史



CMB的观测历史

1948 1965 1989 1992 2000 2003 2013

- 前苏联宇宙学家 George Gamov 提出热大爆炸理论，并且以此预言了来自宇宙极早期的热大爆炸余辉，探测宇宙微波背景辐射是检验热大爆炸理论的重要手段
- 之后，美国普林斯顿大学的 R. Dicke、P. J. E. Peebles 和 D. T. Wilkinson等人尝试利用微波辐射计来测量宇宙微波背景辐射

CMB的观测历史

1948 1965 1989 1992 2000 2003 2013

- 贝尔实验室的A. Penzias和R. W. Wilson在调试20英尺的三角形反射天线时，在射电波段发现约为3.5K的过剩天线温度
- 非常微弱，但是始终存在，在排除了来自天线内部或临近环境的可能性后，他们肯定这一各向同性、非极化的、与地点和季节无关的辐射是来自宇宙远处
- 射电天文学“四大发现”之一，获得1978年的诺贝尔物理学奖

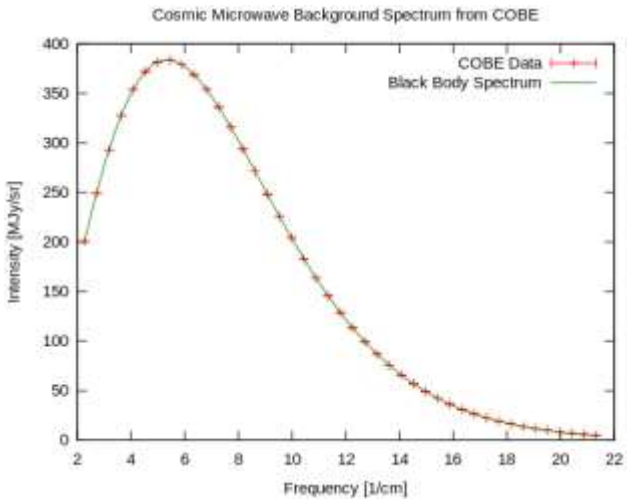
CMB的观测历史

1948 1965 1989 1992 2000 2003 2013

- 1976年，NASA计划将三个实验仪器：探测CMB温度涨落各向异性的探测器DMR，测量CMB 能谱的分光光度计FIRAS和探测星际尘埃辐射的红外多波段探测器DIRBE合并到一起，建造宇宙背景探测者卫星（COBE），并于1989年发射升空。

- 很快，FIRAS仪器便在30多个频率波段上得到的CMB能谱的测量结果，完美符合普朗克黑体辐射谱理论曲线。

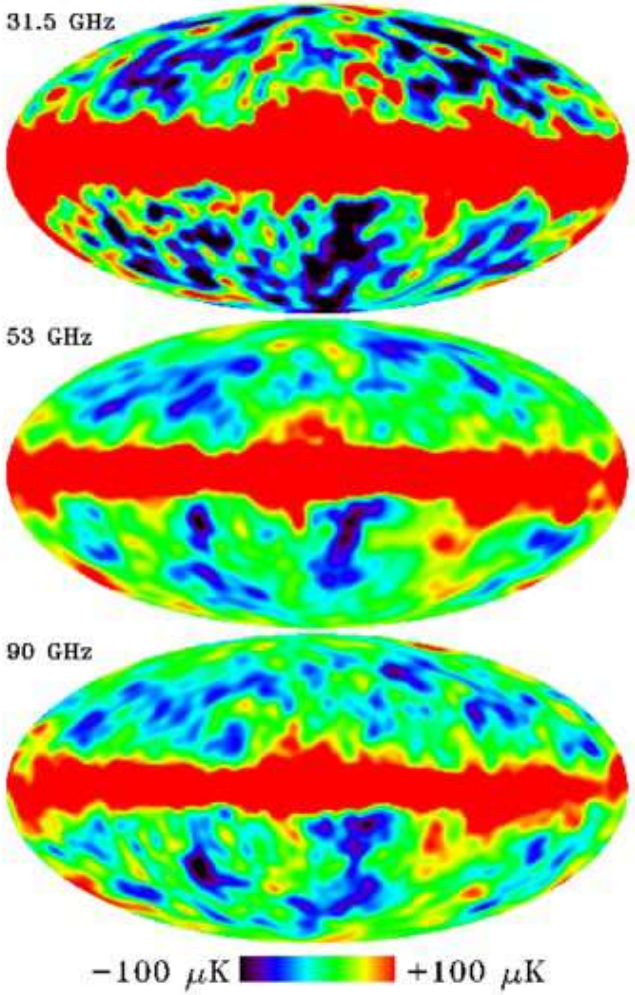
- 具有黑体谱的CMB能谱则是其高度热平衡的直接证据，充分肯定热大爆炸宇宙理论的正确性



CMB的观测历史

1948 1965 1989 1992 2000 2003 2013

- 为了形成今天的宇宙大尺度结构，极早期均匀宇宙的背景上必须有原初密度扰动，这种扰动反映在CMB上的温度不均匀性。
- 经过三年多数据的积累，DMR仪器首次在均匀各向同性的微波背景上，探测到了CMB温度涨落的各向异性。在三个频率波段测量不同方向相隔10度的两点温度差的平均：$\delta T/T \sim 5 \times 10^{-5}$
- FIRAS和DMR的PI，John Mather和George Smoot获得2006年诺贝尔物理学奖



CMB的观测历史

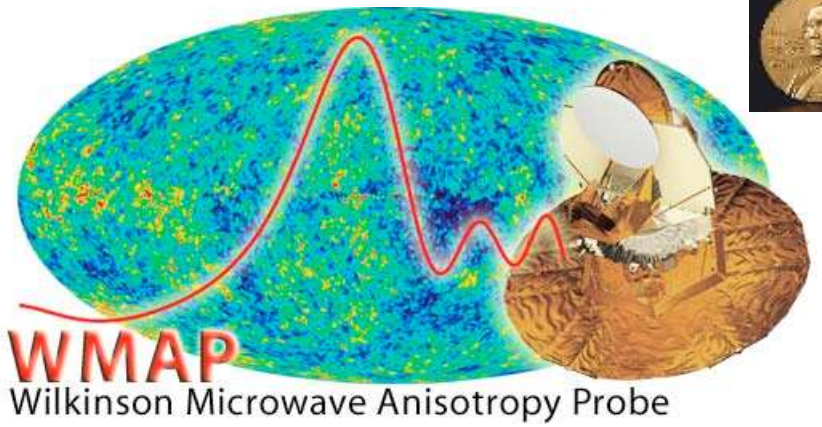
1948 1965 1989 1992 2000 2003 2013

- CMB功率谱第一峰的位置就是Toco实验首次探测到，并由MAXIMA和BOOMERanG给予证实，这一结果显示宇宙是非常平坦的。同时，结合当时的超新星观测数据，证实了宇宙中暗能量的存在。
- 位于南极的DASI实验经过三年多的观测，在2002年首次探测到了CMB的极化E模式信息

CMB的观测历史

1948 1965 1989 1992 2000 2003 2013

- 第二代空间CMB卫星，WMAP，于2001年发射升空，WMAP卫星探测器在精度上提高了45倍，在角分辨率上提高了33倍，并且在五个频率波段上对CMB进行观测，其目标是探测CMB温度之间的微小差异，精确测量CMB的温度涨落各向异性功率谱，以帮助检验各类宇宙学模型。

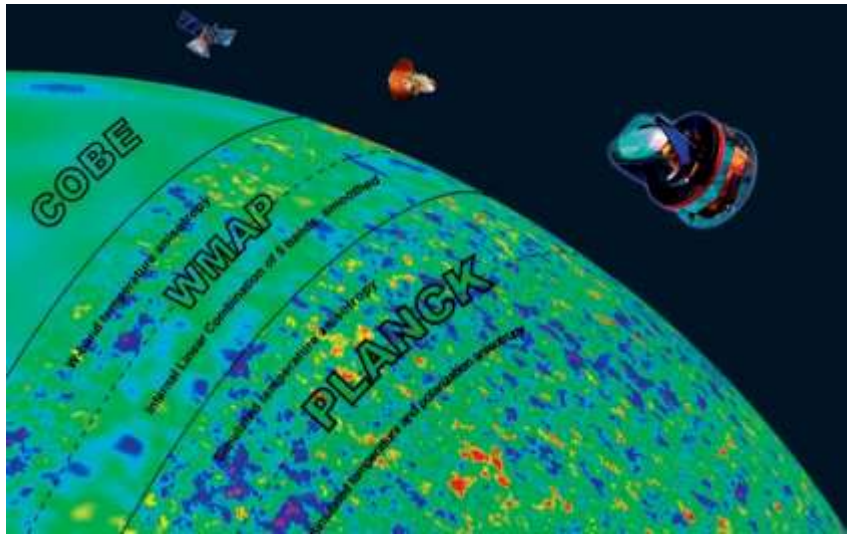


- 2003年，WMAP实验组公布第一批观测结果。CMB功率谱中丰富的宇宙学信息对于众多宇宙学参数给出精确的限制，如宇宙年龄、宇宙各组分等，在当年底被美国《科学》杂志评为“世界十大科技进展”之一。WMAP实验是近二十来年里最重要的宇宙学观测，其高质量的观测结果极大地推动了宇宙学的发展，建立了“精确宇宙学”的时代。

CMB的观测历史

1948 1965 1989 1992 2000 2003 2013

- 欧洲空间局的Planck卫星项目是继COBE和WMAP之后的第三代CMB空间探测器，以目前最高的灵敏度和角分辨率，在9个频段上对全天空的CMB进行测量。
- 其主要科学目标是在WMAP卫星的基础上，进一步对CMB的极化信号进行精确测量，并对CMB的众多次级效应进行观测。Planck卫星是目前最重要的宇宙学观测。



CMB功率谱

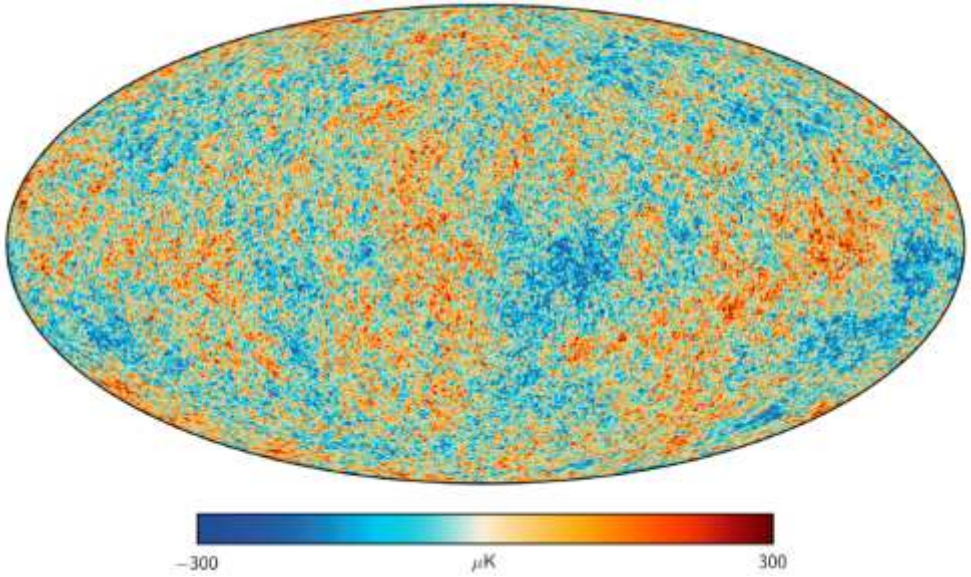
- CMB光子的温度不均匀性可以看成一个高度高斯性的随机变量，可以完全利用其两点关联函数来进行描述

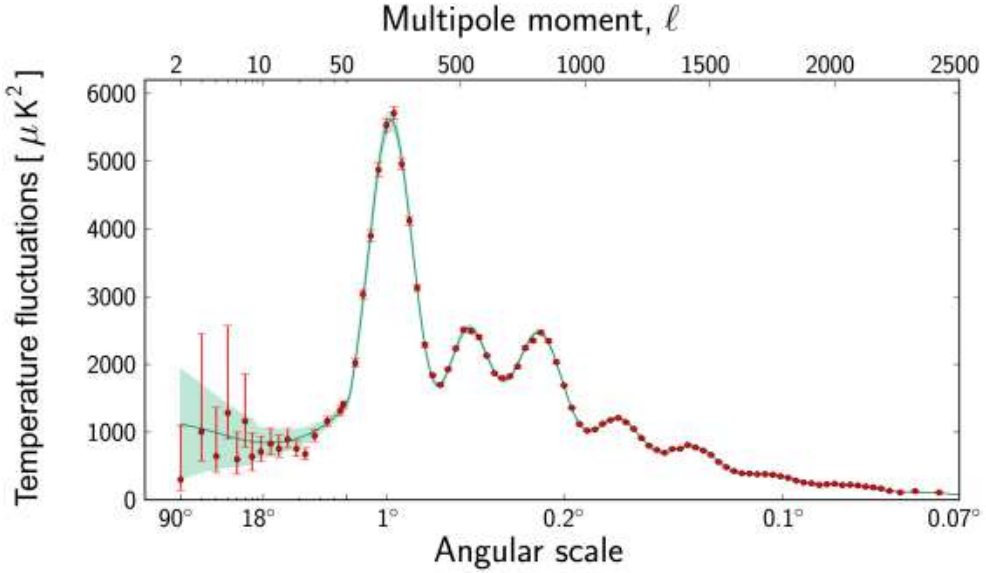
$$\Theta(\vec{\mathbf{n}}) = \frac{T(\vec{\mathbf{n}}) - \bar{T}}{\bar{T}} = \frac{\Delta T}{\bar{T}}(\vec{\mathbf{n}})$$

$$\frac{\Delta T}{\bar{T}}(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi)$$

$$a_{\ell m} = \int d\Omega Y^*_{\ell m}(\theta, \phi) \frac{\Delta T}{\bar{T}}(\theta, \phi)$$

$$\langle a_{\ell m} a^*_{\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} C_\ell$$





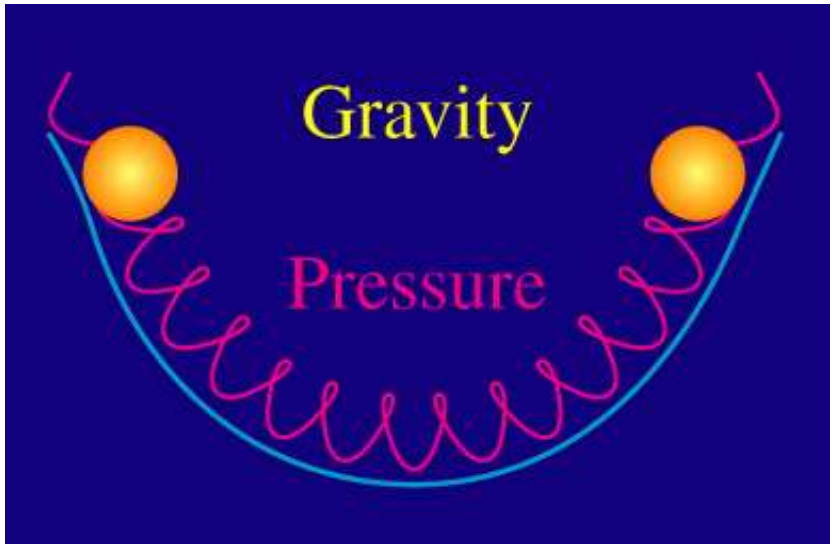
CMB声学振荡

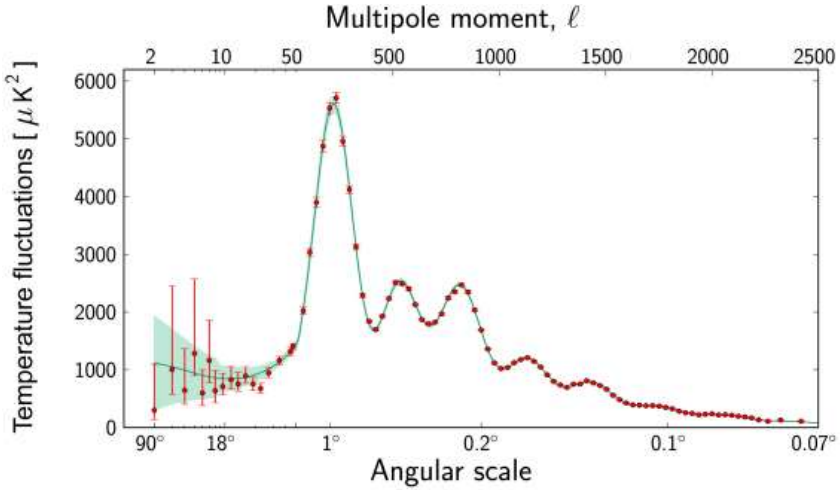
- 光子-重子理想流体会处在引力势井当中，当引力作用压缩理想流体时，光子的辐射压强就会阻止该过程，形成声学震荡
- CMB温度涨落的最基本振荡公式

$$\ddot{\Theta} + c_s^2 k^2 \Theta = 0$$

$$\Theta(\eta_*) = \Theta(0)\cos(ks_*)$$

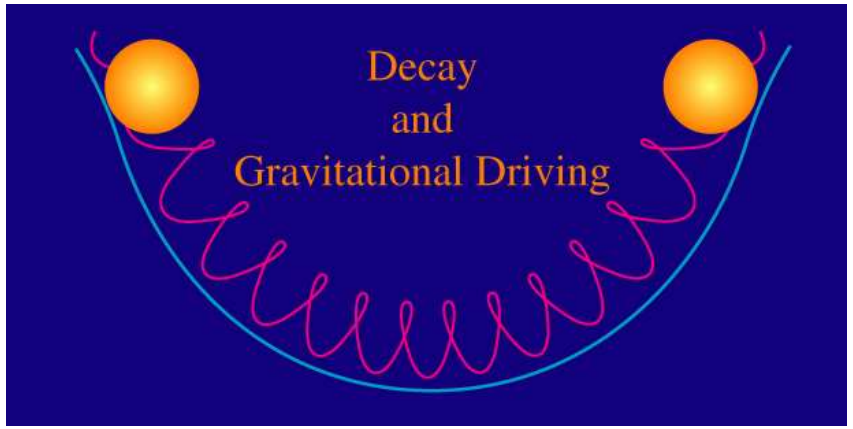
- 第一峰位置对应宇宙曲率，第一峰幅度对应重子物质比例，第二、第三峰幅度对应暗物质的比例，尾部振荡对应CMB光子弥散信息等等

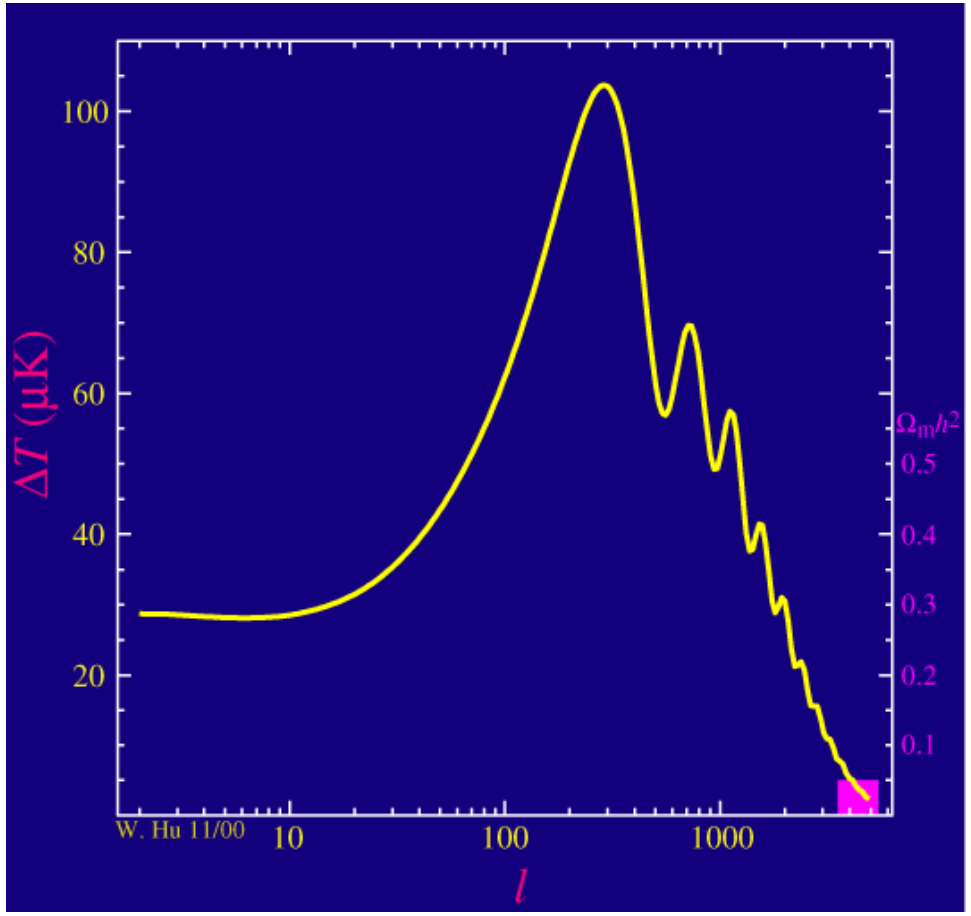




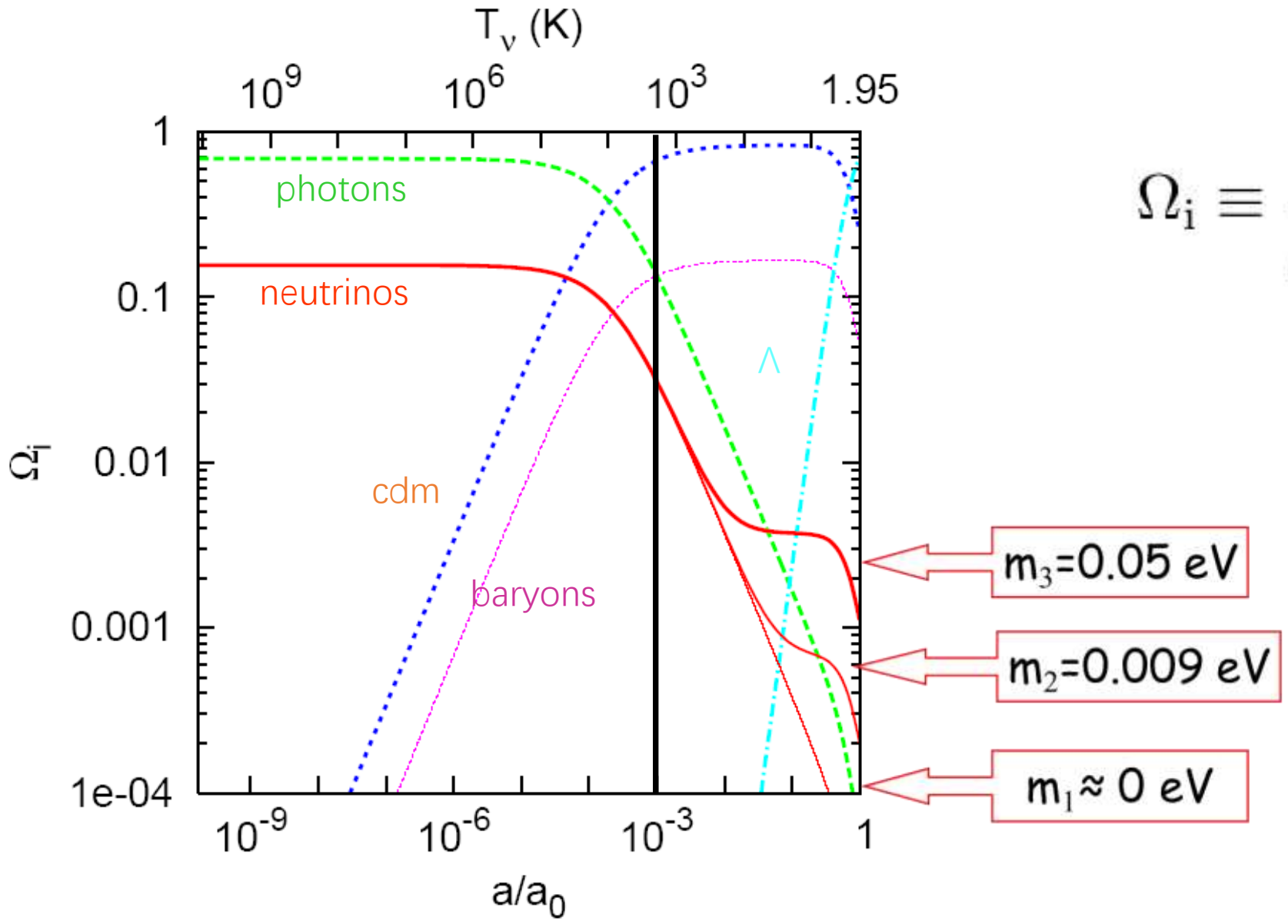
早期积分Sachs-Wolfe效应

- 在宇宙早期，特别是辐射物质依然是宇宙主要成分之一时，辐射物质会导致宇宙中的引力势井随着宇宙演化而衰变
- 光子-重子理想流体在引力势井中受到压缩，随后光子压强阻止该过程，此时由于引力势井衰变，等离子体反弹时发现引力势井没那么深了，导致反弹震荡的幅度变大





能量密度的演化

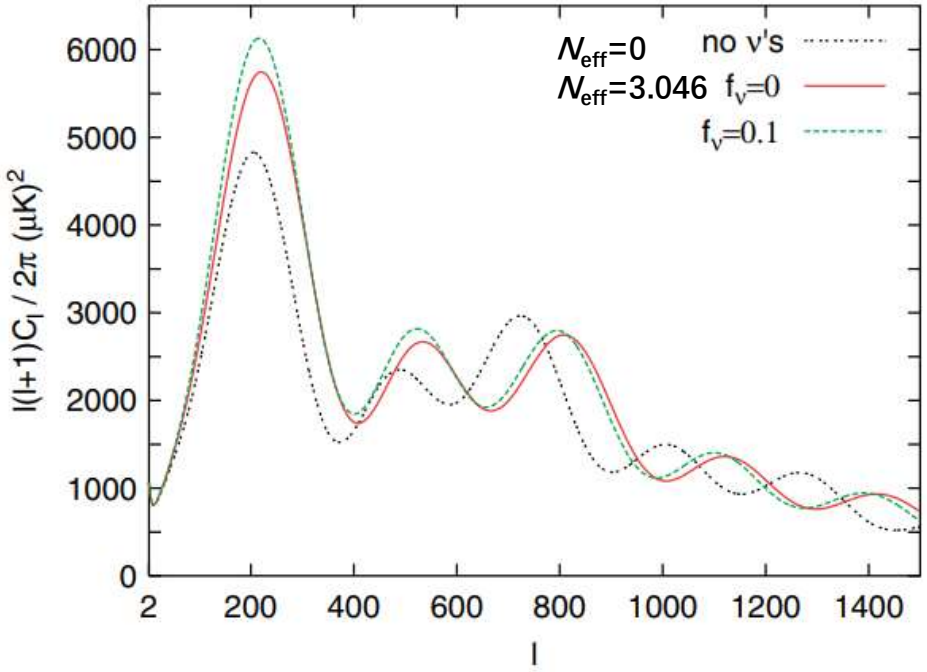


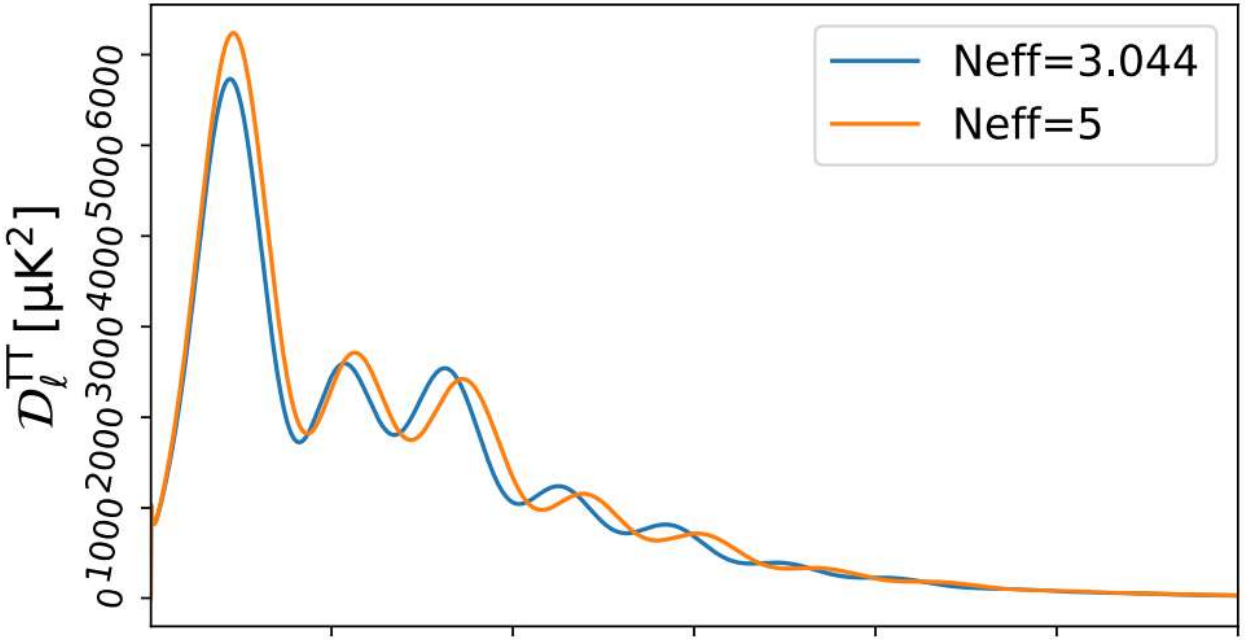
$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_{crit}}$$

N_{eff}对CMB功率谱的影响

$$\rho_r = \rho_\gamma + \rho_\nu = \left[1 + \frac{7}{8}\left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} N_{eff}\right]\rho_\gamma$$

- 中微子有效代数增大会导致：在CMB产生初期，宇宙中的辐射物质比例升高，从而增强早期ISW效应，显著提高CMB功率谱的幅度。

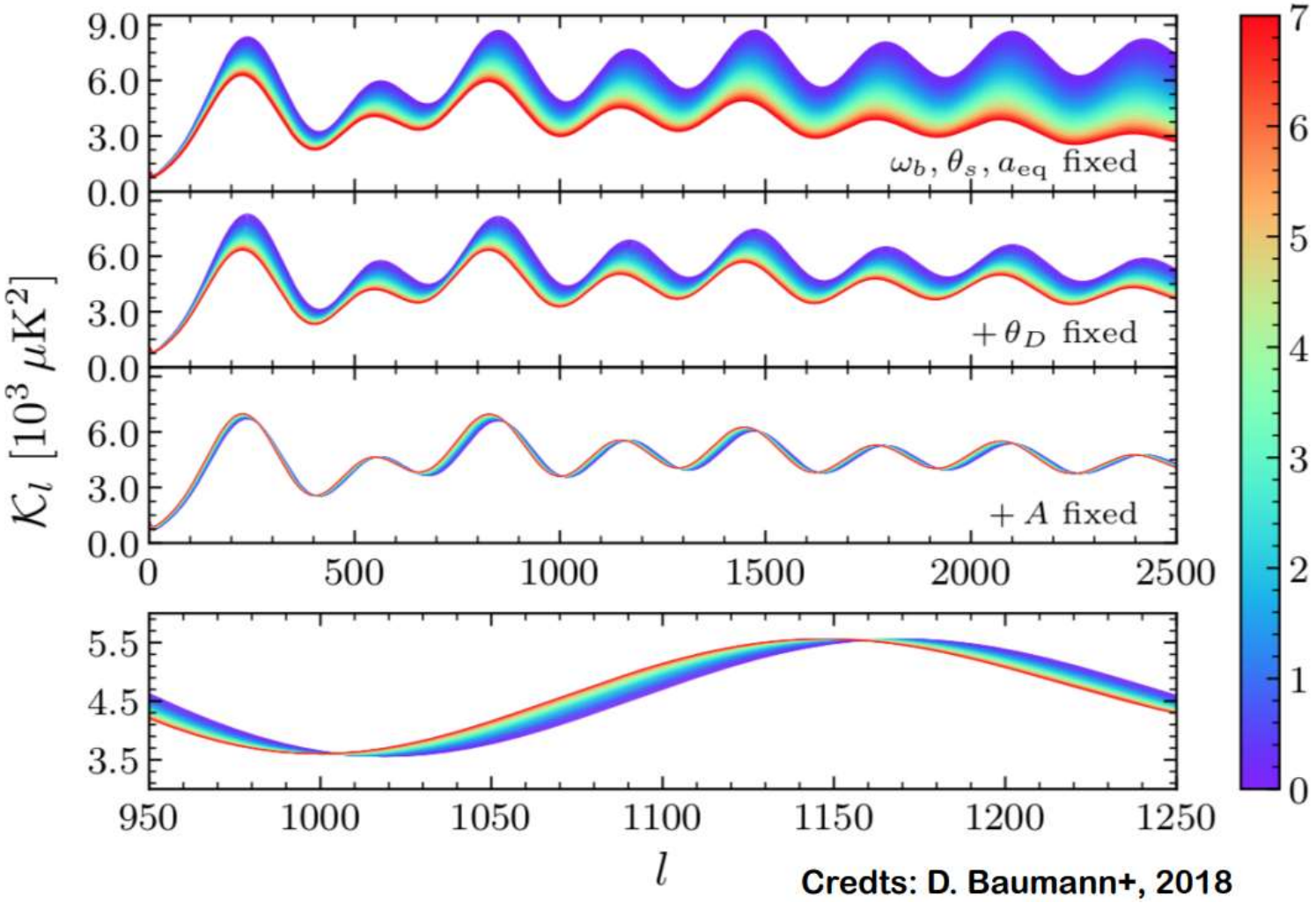




声学振荡相位移动

- 由于中微子的传播速度接近光速，远大于CMB光子和重子所组成的等离子体的传播速度，会在CMB功率谱上产生一个额外的相位移动

$$\delta_\gamma(\mathbf{k}) \approx A(\mathbf{k}) \cos(kr_s + \phi)$$



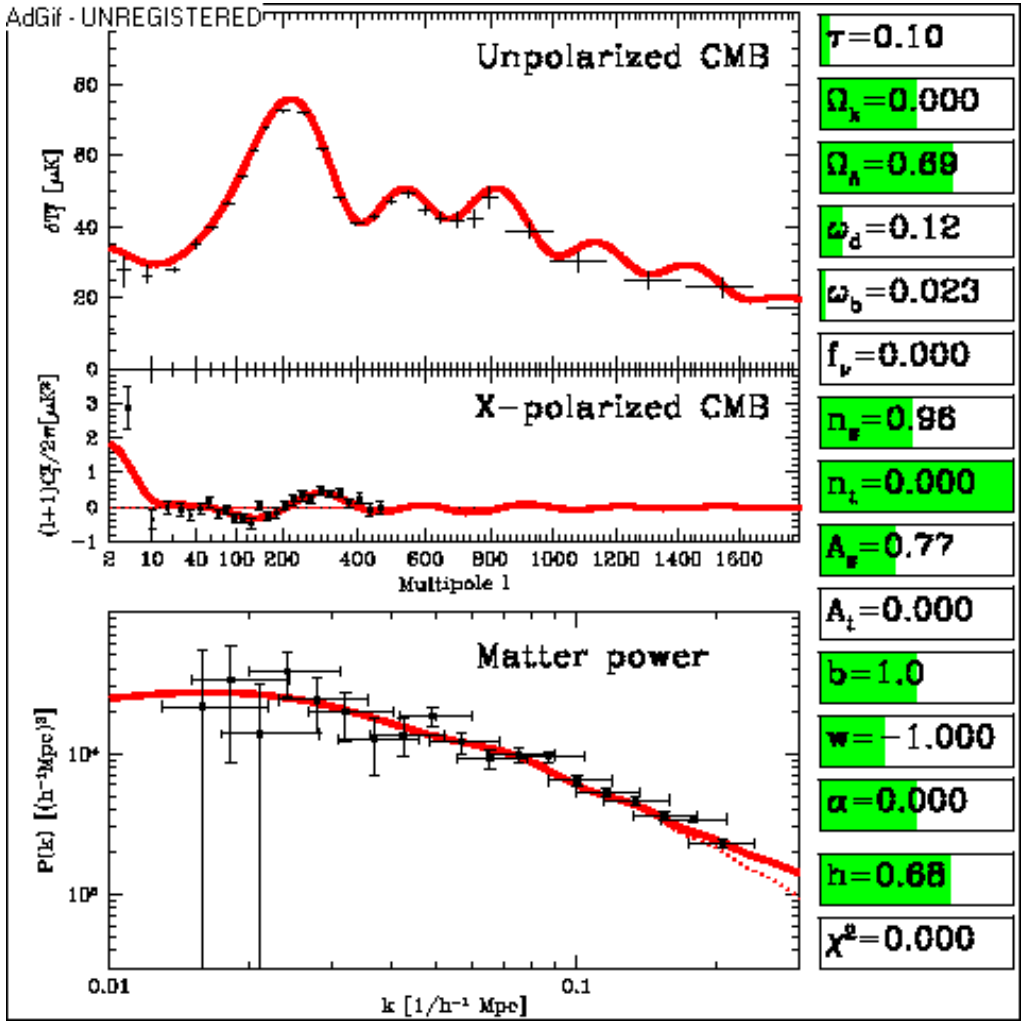
Credts: D. Baumann+, 2018

中微子质量对CMB功率谱的影响

- 有质量的中微子，在宇宙晚期可以看成是普通物质的一部分，所占比例用 f_ν 来表示

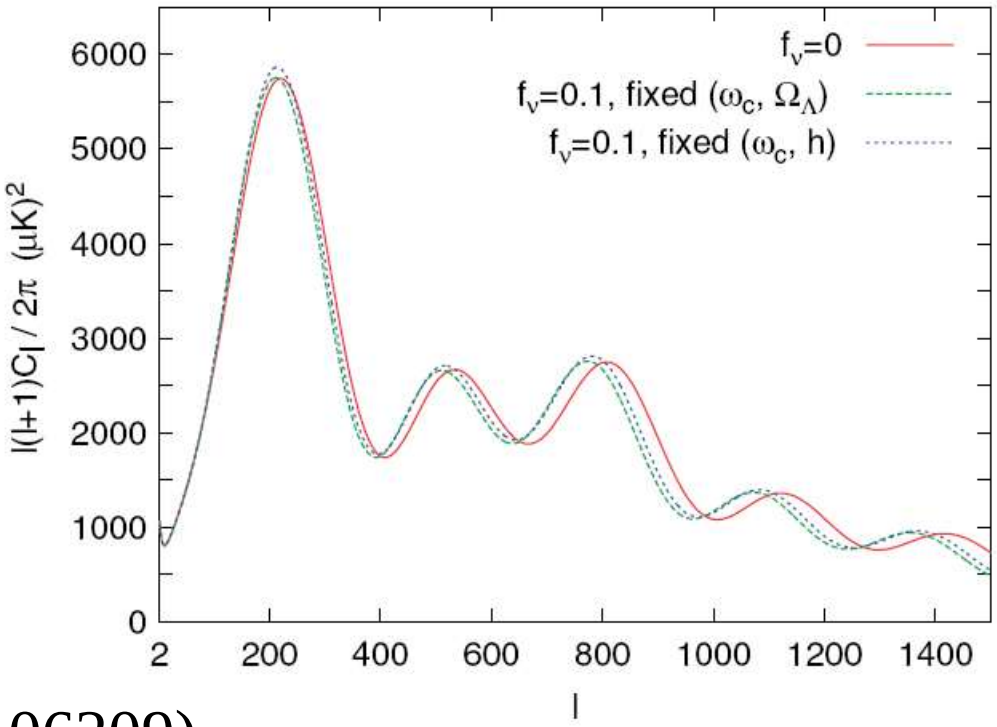
$$f_\nu \equiv \frac{\rho_\nu}{(\rho_{\rm cdm} + \rho_{\rm b} + \rho_\nu)} = \frac{\Omega_\nu}{\Omega_{\rm m}}$$

- f_ν 越大，中微子越多，其他普通物质越少
- 但是，这些中微子在宇宙早期依然以辐射形式存在，这就导致普通物质和辐射物质之间的比例进一步拉大，辐射物质变得更多，进一步加强了早期ISW效应，使得CMB功率谱的幅度进一步提升。



CMB对于中微子的限制

- 虽然从这些效应上可以看出，CMB功率谱对于中微子的有效代数和质量比较敏感，理论上应该可以利用CMB进行严格限制。但是由于CMB功率谱与众多宇宙学参数相关，中微子在CMB功率谱上的效应可以利用其他参数的变化来消除，从而使得只利用CMB功率谱很难对中微子给出非常严格下限制。

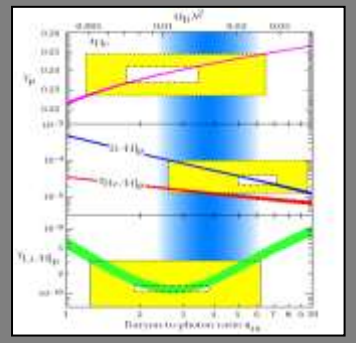
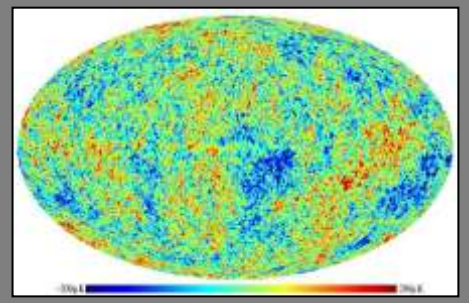
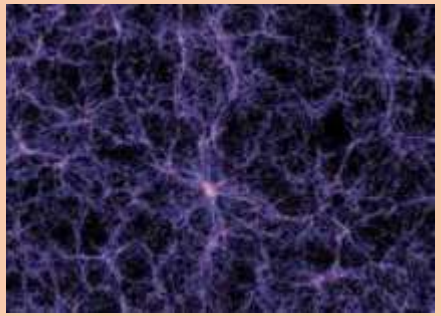


- 目前，Planck数据对于中微子的限制 (1807.06209)

$$\sum m_\nu < 0.26 \text{ eV} \quad (95\,\%, \textit{Planck} \text{ TT,TE,EE+lowE}).$$

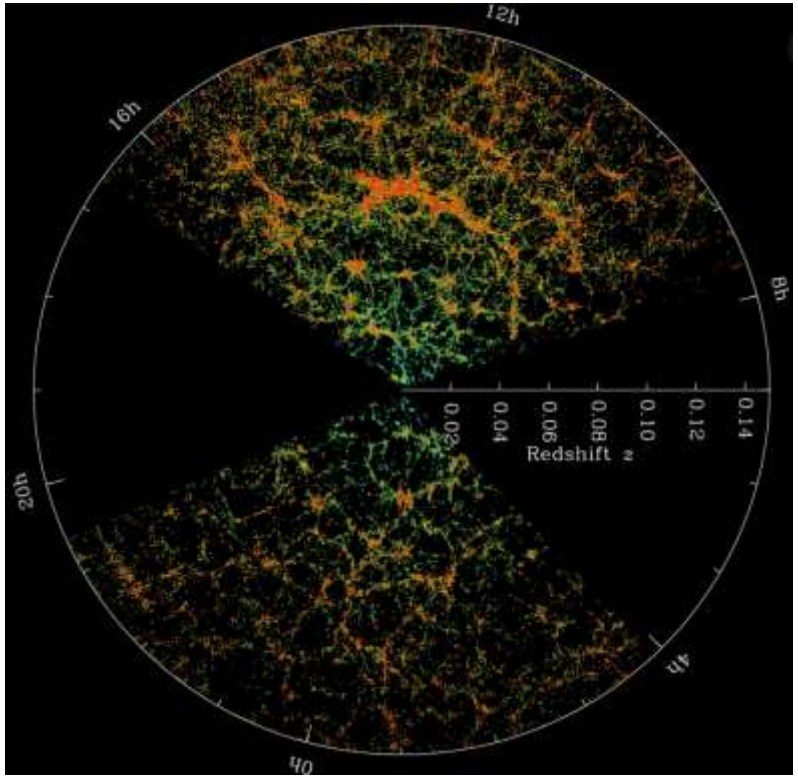
$$N_{\rm eff} = 2.92^{+0.36}_{-0.37} \quad (95\,\%, \textit{Planck} \text{ TT,TE,EE+lowE})$$

中微子在三个演化阶段中的影响

		
原初核合成 BBN	宇宙微波背景辐射 CMB	宇宙大尺度结构 LSS
$T \sim$ MeV	$T <$ eV	
N_{eff}	N_{eff} & m_ν	

宇宙大尺度结构

- 到了宇宙晚期，在引力不稳定性的作用下，宇宙早期的密度不均匀性会迅速增长，最终形成今天观测到的宇宙大尺度结构。



$$\delta(\vec{\mathbf{x}}) = \frac{\rho(\vec{\mathbf{x}}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}$$

$$\xi(\vec{\mathbf{r}}) = \langle \delta(\vec{\mathbf{x}})\delta(\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{r}}) \rangle$$

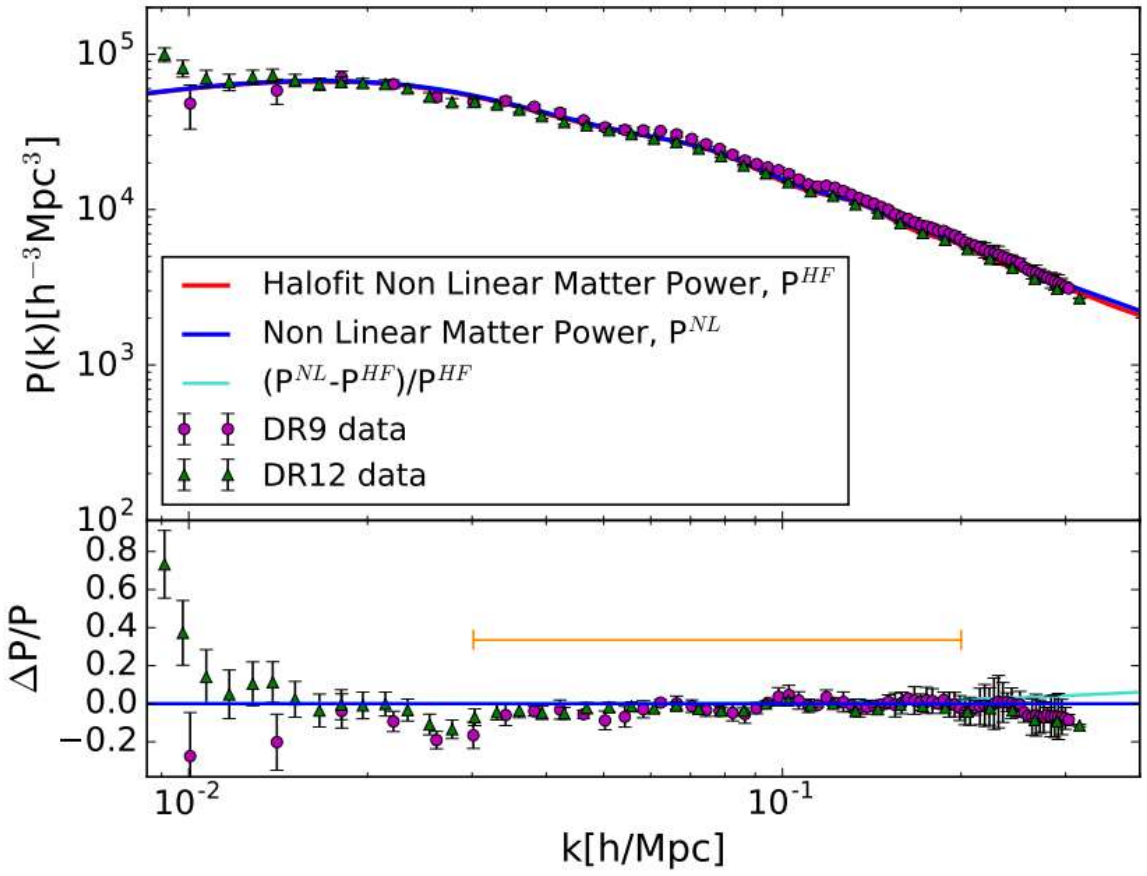
$$\xi(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int |\delta(\vec{\mathbf{k}})|^2 e^{-i\vec{\mathbf{k}}\cdot\vec{\mathbf{r}}} d^3k$$

$$\langle \delta(\vec{\mathbf{k}})\delta(\vec{\mathbf{k}}') = P(k)\delta^3(\vec{\mathbf{k}} - \vec{\mathbf{k}}')$$

星系功率谱

- 由于暗物质无法直接观测，无法直接得到关键的物质功率谱信息。能观测到的是发光的普通重子物质，所以通常观测星系的成团性，分析星系的空间分布不均匀性，计算星系功率谱的信息
- 假设物质功率谱和星系功率谱之间满足一定比例关系

Bias $b^2(k)=P_g(k)/P_m(k)$

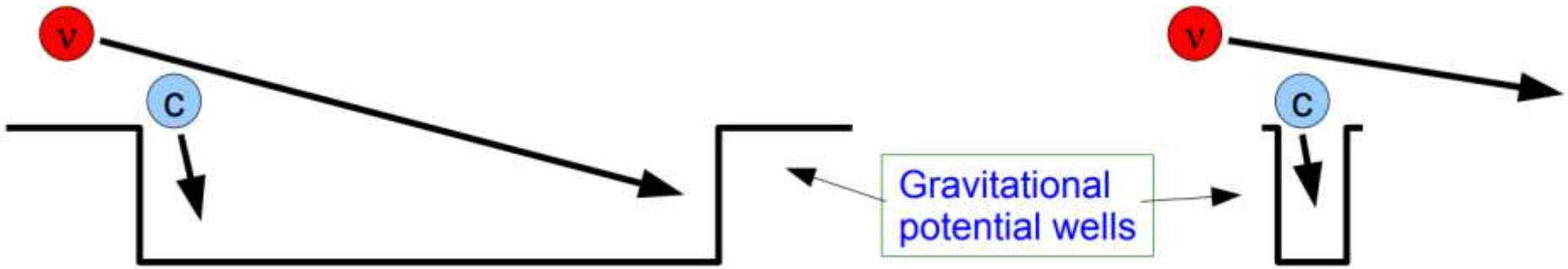


中微子Free Streaming

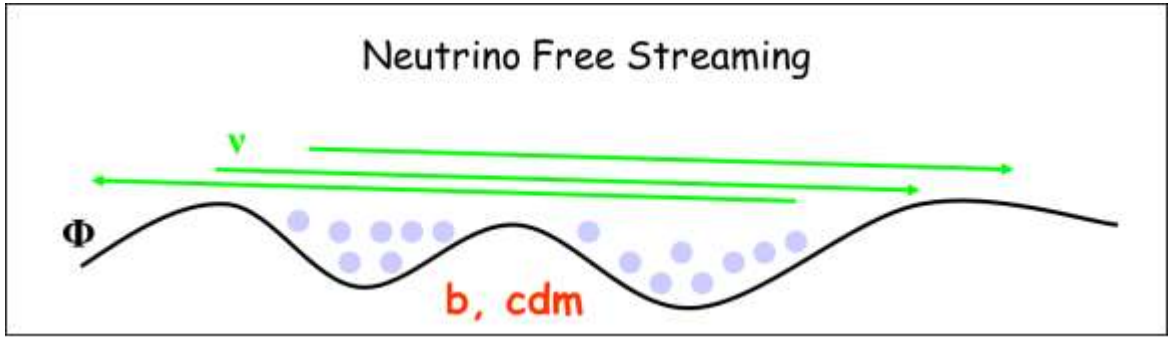
- 在宇宙晚期，有质量中微子变成非相对论性粒子，但是依然保持着很大的热运动速度

$$c_\nu \simeq 81(1+z)\left(\frac{\mathrm{eV}}{m_\nu}\right)\ \mathrm{km\ s^{-1}}$$

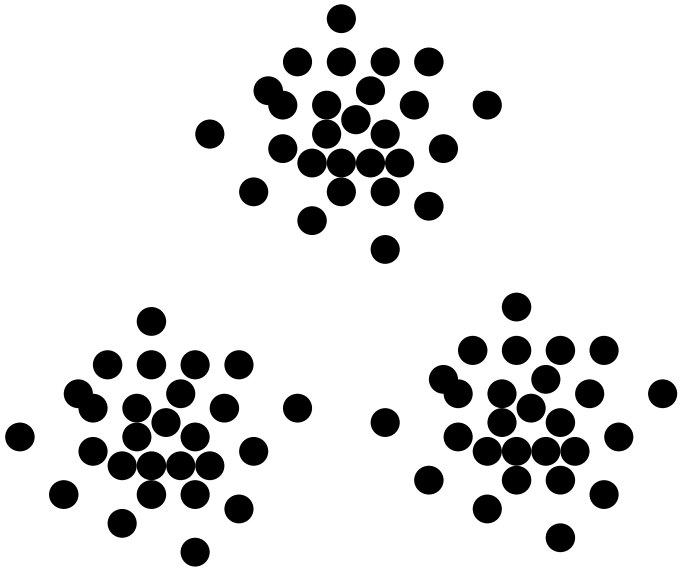
- 在遇到引力势井时，较大尺度上，有质量中微子会和普通物质一样落入势井中表现出成团性；而在较小尺度上，由于中微子的速度，使得其无法落入势井，从而逃脱引力势井的束缚，自由传播，表现出弥散性。

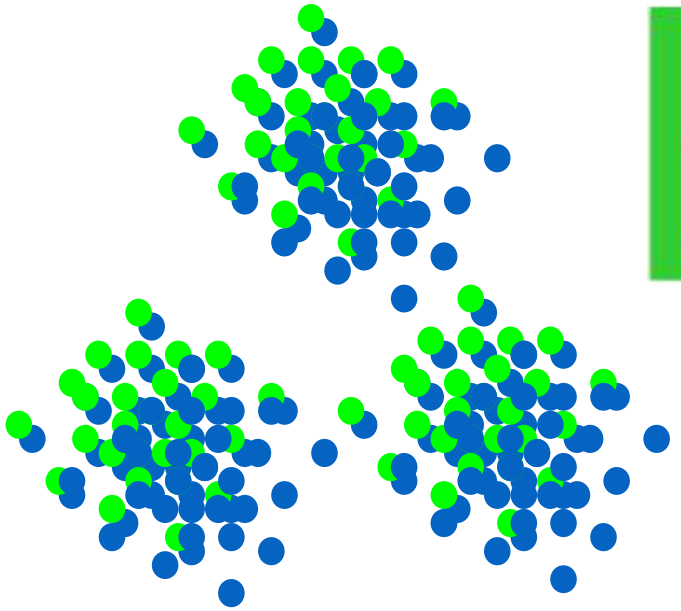


中微子Free Streaming



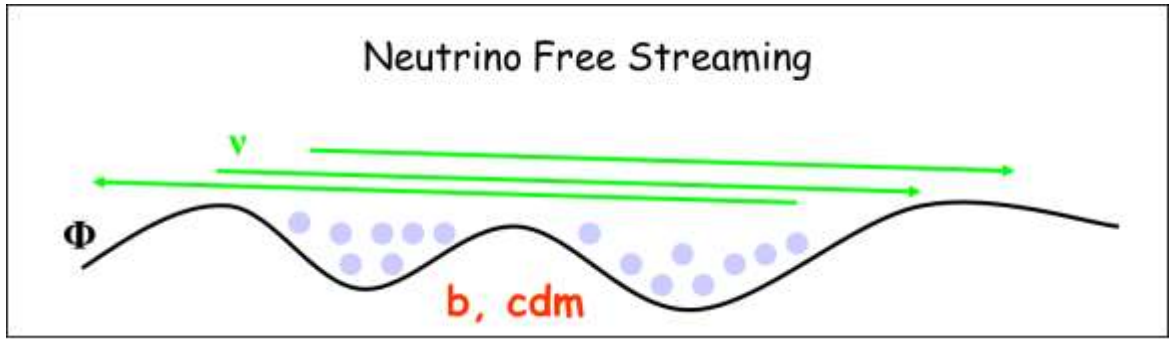
baryons and CDM experience gravitational clustering

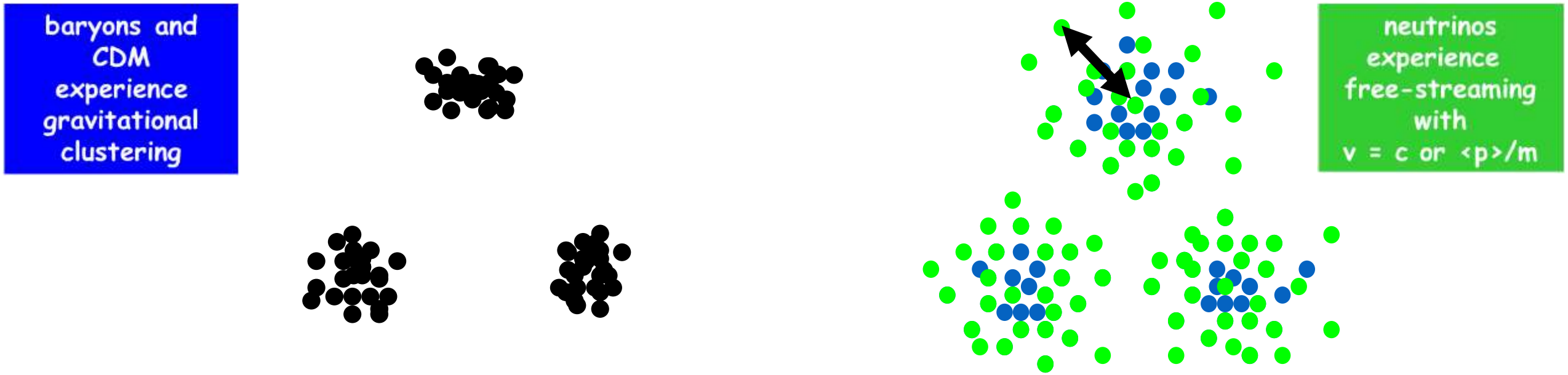




neutrinos experience free-streaming with v = c or <p>/m

中微子Free Streaming



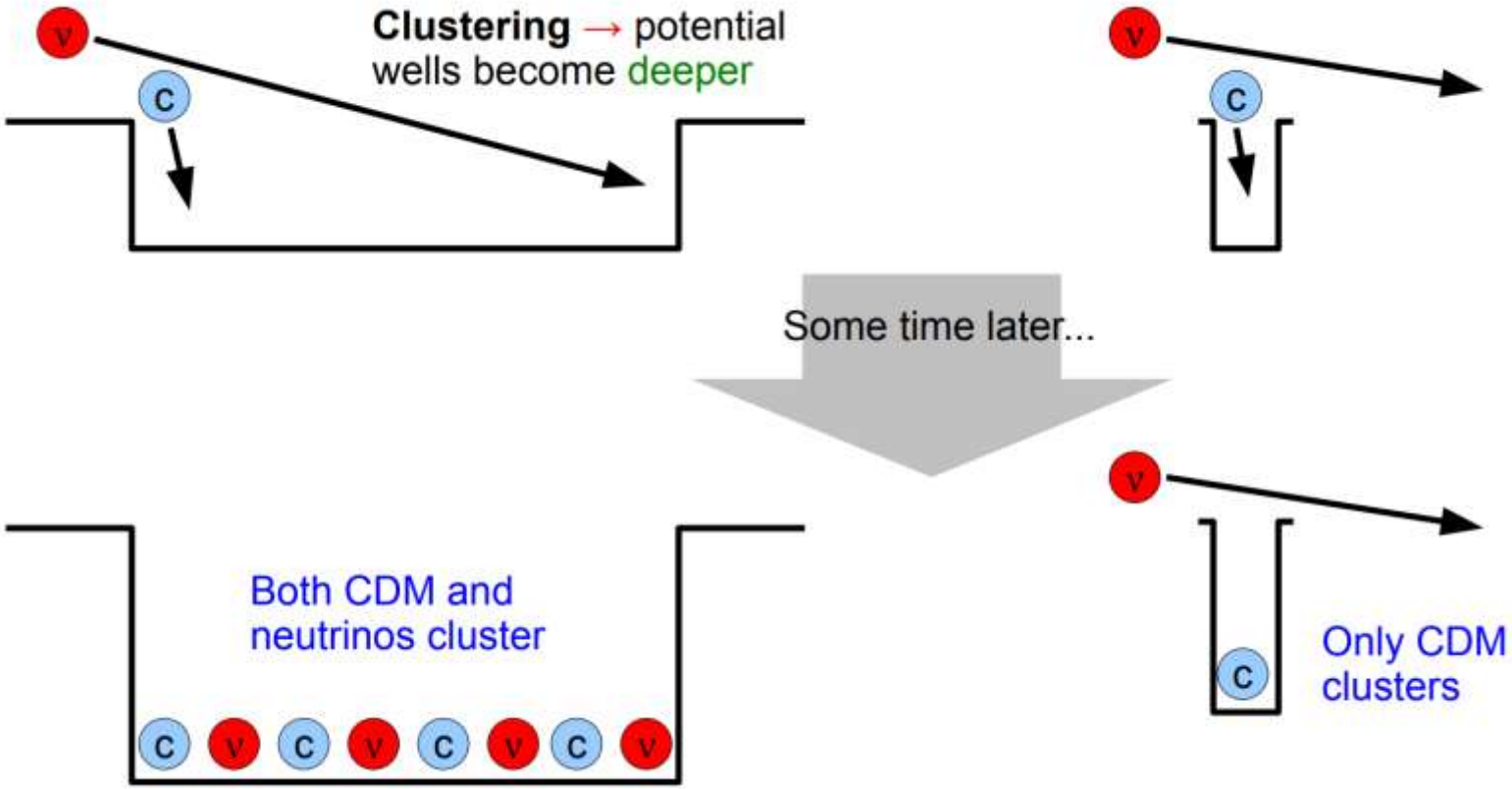


中微子Free Streaming

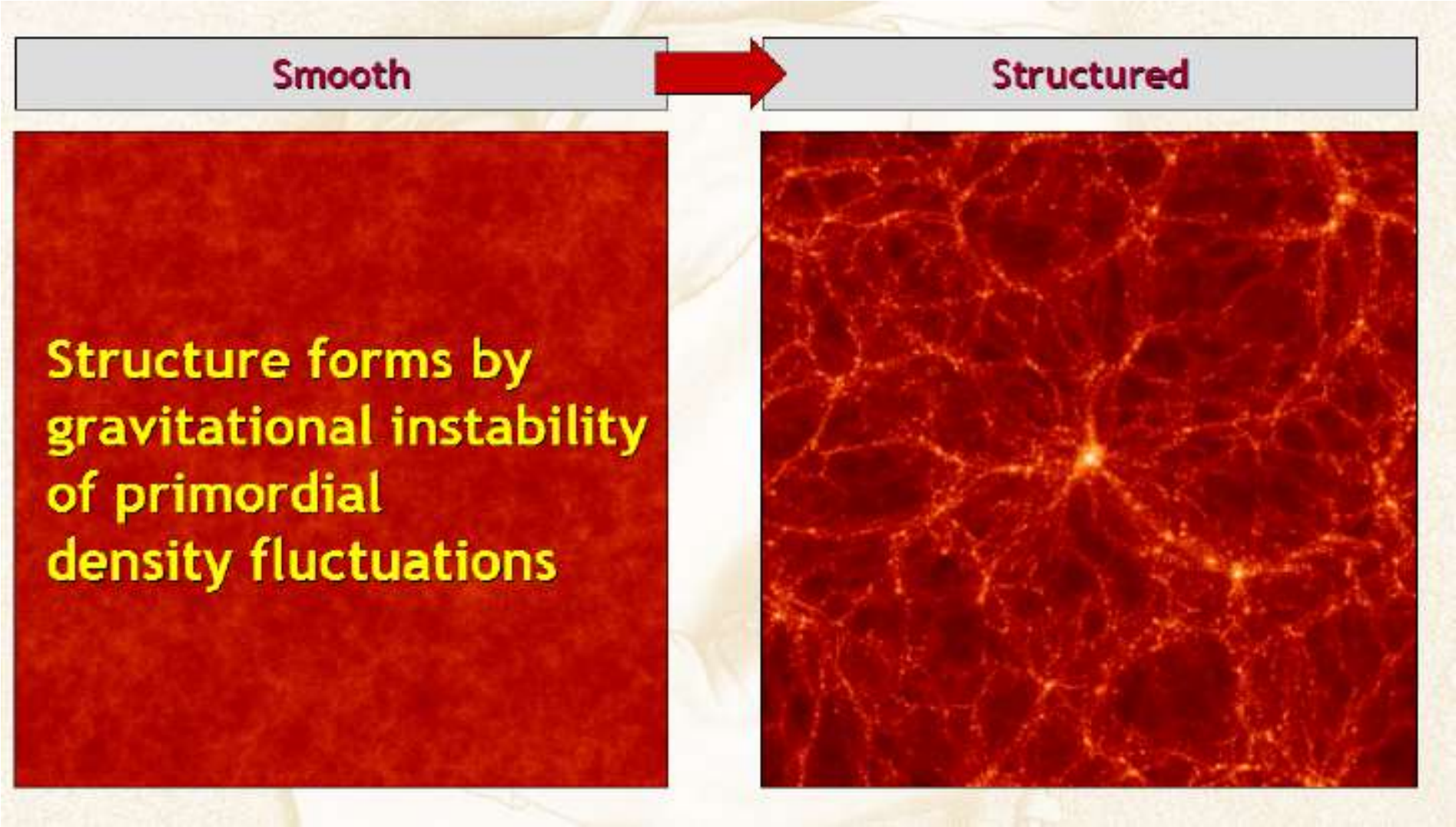
- 由于中微子的速度，中微子的成团性只会体现在中微子FS效应的尺度以上

$$k_{\rm fs} \simeq 0.018\ \Omega_m^{1/2} \left(\frac{M_\nu}{1{\rm eV}}\right)^{1/2}\ h\ {\rm Mpc}^{-1}$$

- 反过来，没有成团的中微子在FS效应尺度以下也会延缓宇宙引力势井的增长



中微子是热暗物质


Smooth
Structured
Structure forms by gravitational instability of primordial density fluctuations

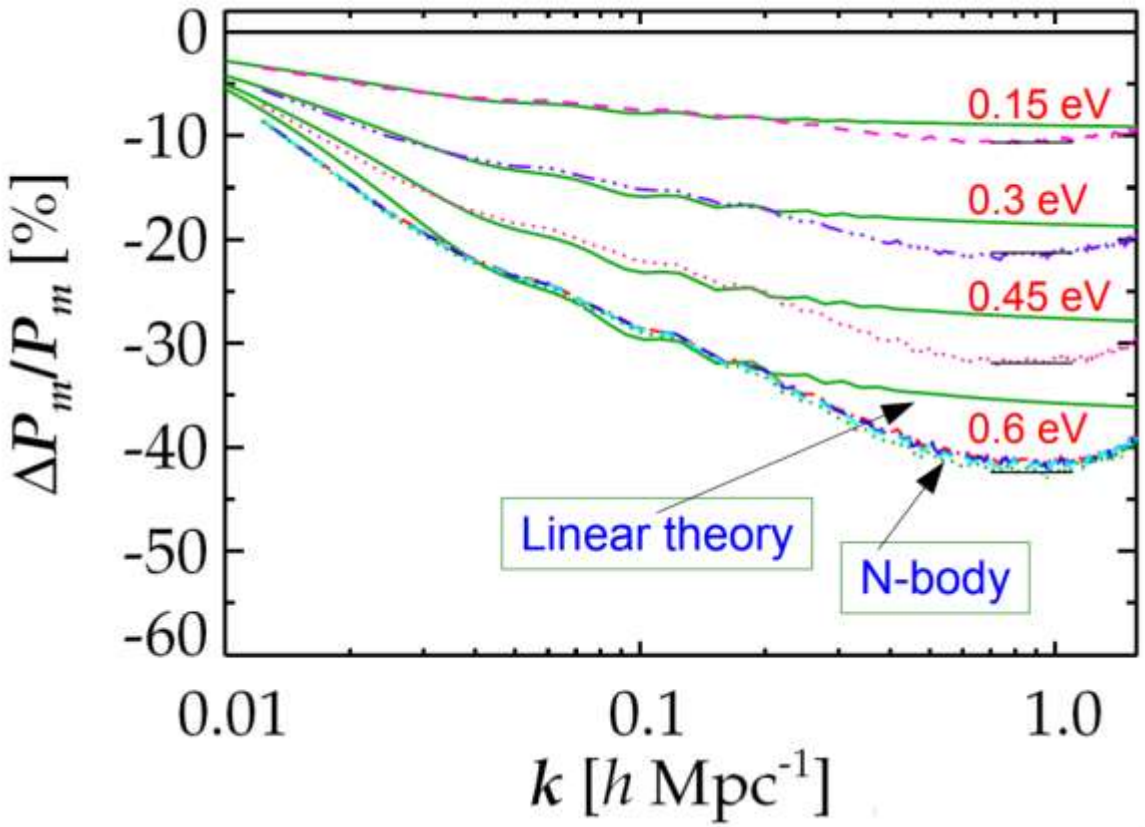
小尺度功率谱压低

- 在中微子FS效应的尺度以下，由于中微子难以成团，使得对应的功率谱幅度出现明显的压低

$$\frac{P(k)^{f_\nu} - P(k)^{f_\nu=0}}{P(k)^{f_\nu=0}} \simeq -8 f_\nu$$

- 而到了非线性尺度以下，这种压低的幅度会进一步加大，根据N-body模拟

$$\frac{P(k)^{f_\nu} - P(k)^{f_\nu=0}}{P(k)^{f_\nu=0}} \simeq -9.8 f_\nu$$

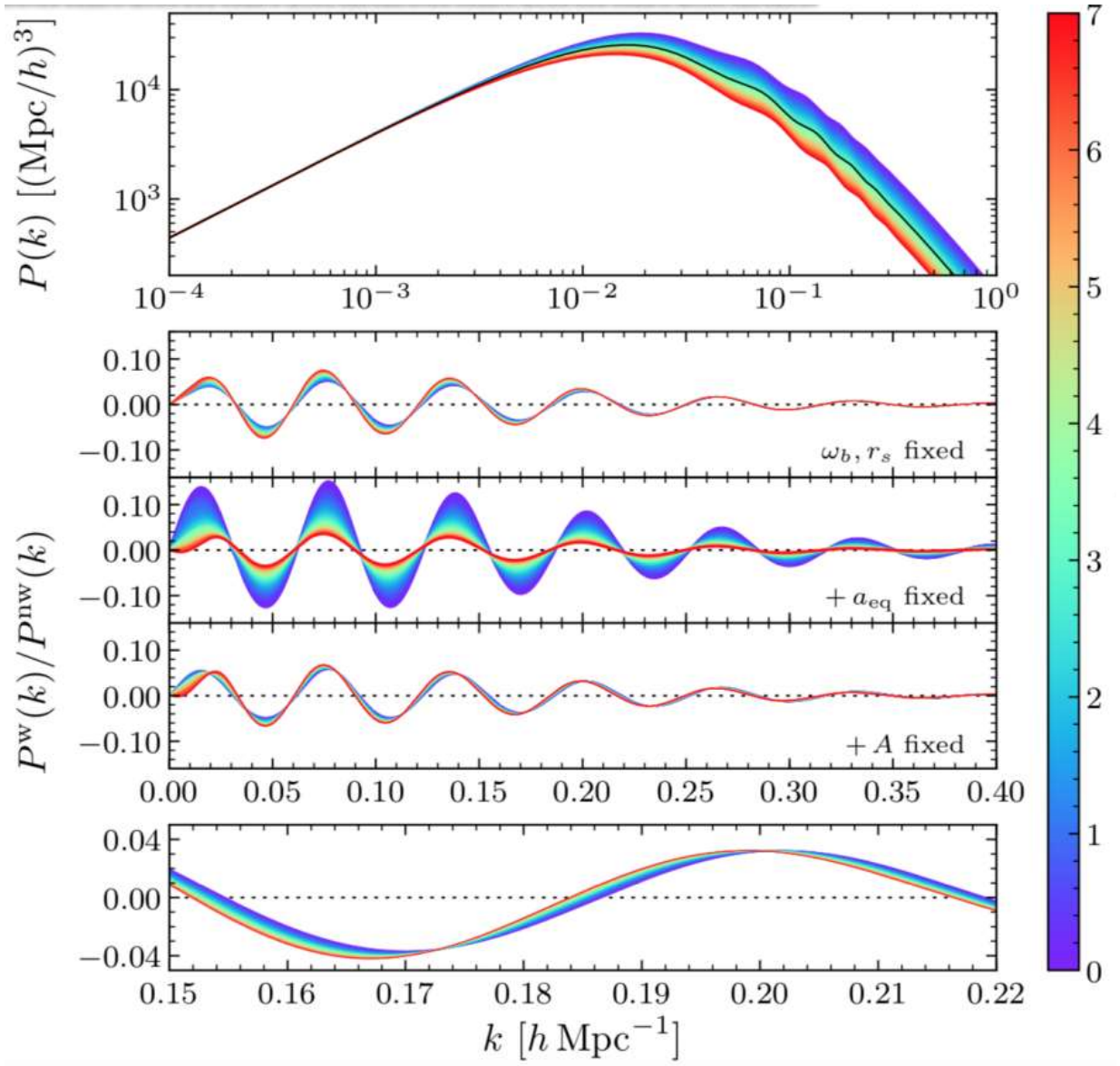


声学振荡相位移动

- 由于中微子的传播速度远大于CMB光子和重子所组成的等离子体的传播速度，在CMB功率谱上产生的额外相位移动现象，也会出现在星系功率谱上

$$P_g(k) \equiv P^{nw}(k)[1+O(k)]$$

$$O(k) \approx A_w(k)\sin(kr_d+\phi(k))$$



课程提纲

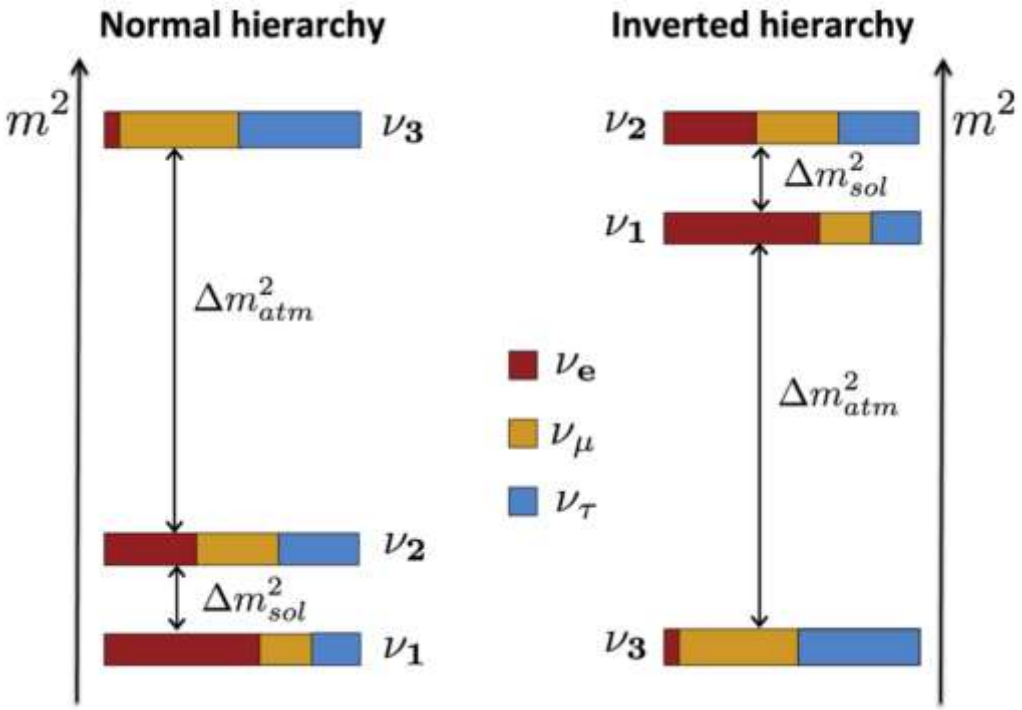
- 宇宙学基础知识
- 中微子遗迹的产生和退耦
- 中微子在三个演化阶段中的影响
- 中微子质量的宇宙学限制

中微子质量顺序

- 中微子振荡实验可以给出三代中微子之间的质量平方差

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = \sin^2(2\theta)\sin^2(1.27\frac{\Delta m^2(eV^2)}{4E(GeV)}L(km)))$$

$$\Delta m^2_{21} \approx 7.49^{+0.19}_{-0.17} \times 10^{-5} eV^2 \qquad |\Delta m^2_{31}| \approx 2.484^{+0.045}_{-0.048} \times 10^{-3} eV^2$$



- 正序：$m_1 < m_2 < m_3$

$$\sum m_\nu > 0.06 \text{ eV}$$

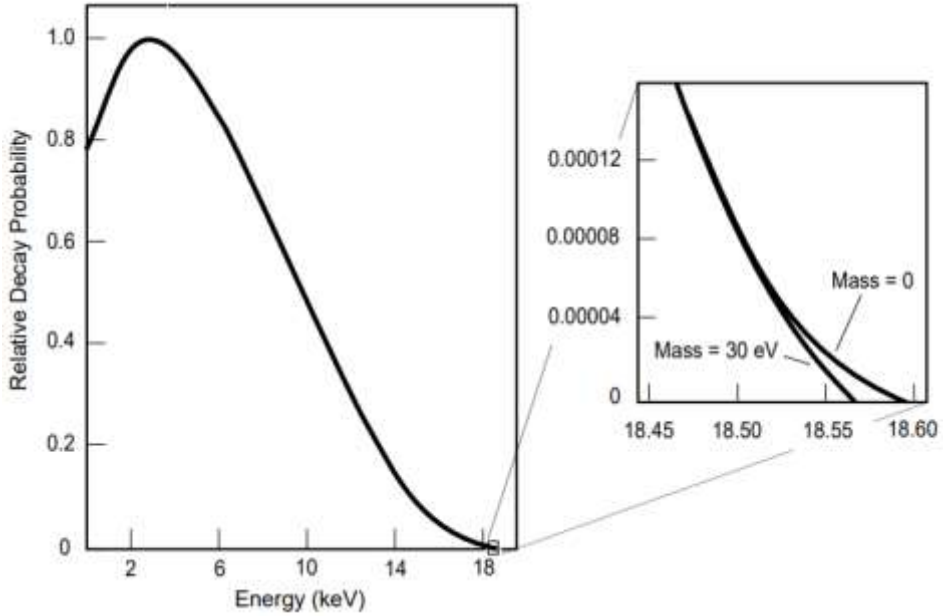
- 反序：$m_3 < m_1 < m_2$

$$\sum m_\nu > 0.1 \text{ eV}$$

粒子物理实验限制中微子质量

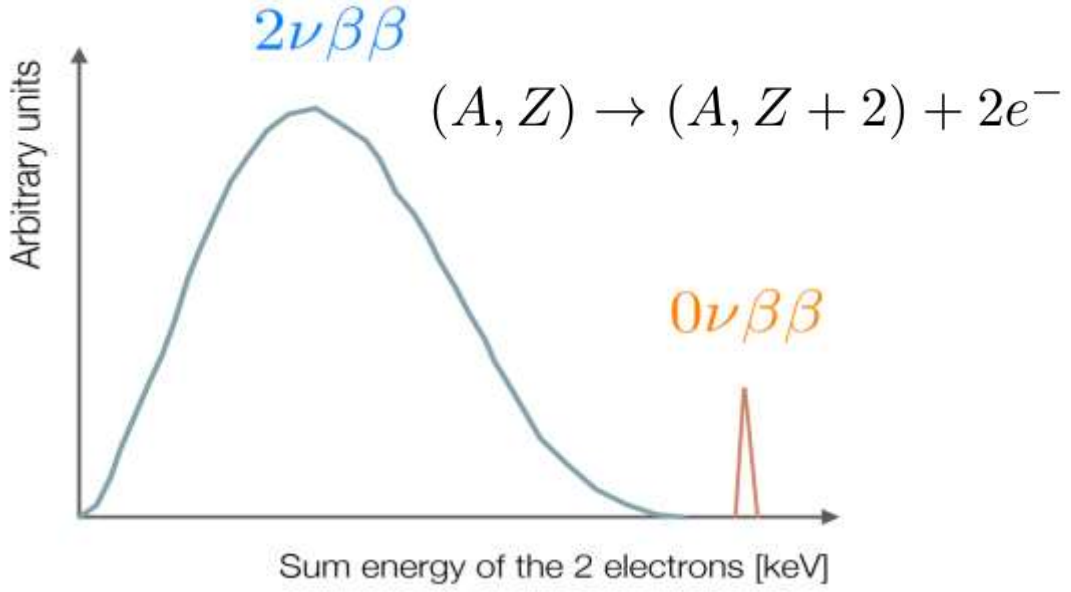
- 氚核 β 衰变，测量能谱的终点处

$$^3\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He}^+ + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_e$$



$$m_{\nu_e} = \left(\sum_i |U_{ei}|^2 m_i^2\right)^{1/2} < 0.8\,\mathrm{eV}$$
$$= \left(c_{13}^2 c_{12}^2 m_1^2 + c_{13}^2 s_{12}^2 m_2^2 + s_{13}^2 m_3^2\right)^{1/2}$$

- 无中微子双 β 衰变：如果中微子是Majorana粒子，会发生破坏轻子数守恒的 $0\nu\beta\beta$ 衰变



$$m_{\mathrm{eff}} = \left|\sum_i U_{ei}^2 m_i\right| < (0.11 \sim 0.26)\,\mathrm{eV}$$
$$= \left|c_{13}^2 c_{12}^2 m_1 + c_{13}^2 s_{12}^2 m_2 e^{i\phi_2} + s_{13}^2 m_3 e^{i\phi_3}\right|$$

宇宙学观测限制中微子质量

- 在整个宇宙演化过程中，中微子绝大部分时间都是以统一的形象出现，不同味道之间的区别只发生在宇宙早期，而且影响非常小，因此通过宇宙学观测主要是对中微子的总质量进行限制。
- 宇宙微波背景辐射：主要通过早期ISW效应修改CMB温度功率谱
- 宇宙大尺度结构：主要通过中微子FS效应修改LSS星系功率谱
- 关于晚期宇宙膨胀历史的测量：重子声波振荡、Ia型超新星、哈勃参数

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K}{a^2}$$

目前的限制

- 利用目前的CMB和LSS观测数据给出的对于中微子参数的限制 (1807.06209):

$$\sum m_\nu < 0.12 \text{ eV}$$ (95 %, *Planck* TT,TE,EE+lowE +lensing+BAO).

$$N_{\rm eff} = 2.99^{+0.34}_{-0.33}$$ (95 %, TT,TE,EE+lowE+lensing +BAO).

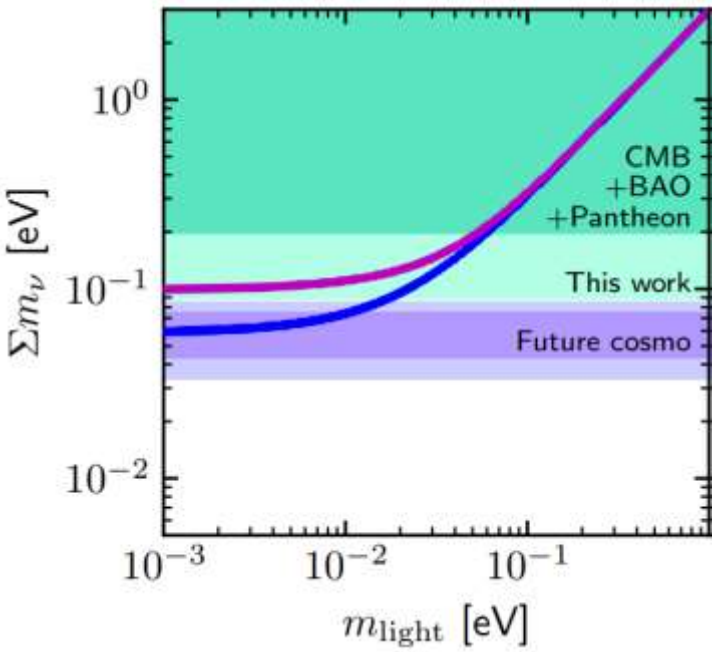
- 目前对于中微子质量给出的最强限制 Planck+BAO+SNIa+RSD (2106.15267):

$$\sum m_\nu < 0.09 \text{ eV at } 95\% \text{ CL.}$$

结合粒子物理实验结果

- 引入最轻中微子质量 $m_{\nu 0}$，对于正序和反序有 $m_{\nu 0} = m_1$ 和 $m_{\nu 0} = m_3$
- 进而可以给出三代中微子的质量和的表达式：

$$m_{\text{light}} < 0.03\,\text{eV}$$



$$\sum \mathrm{m}_\nu \equiv \sum_{i=1}^{3} m_i = m_{\nu_0} + \sqrt{\Delta m_{21}^2 + m_{\nu_0}^2} + \sqrt{\Delta m_{31}^2 + m_{\nu_0}^2}$$

$$\sum \mathrm{m}_\nu \equiv \sum_{i=1}^{3} m_i = m_{\nu_0} + \sqrt{|\Delta m_{31}^2| + m_{\nu_0}^2} + \sqrt{|\Delta m_{31}^2| + \Delta m_{21}^2 + m_{\nu_0}^2}$$

未来对于中微子的限制 (1803.07561)

- 除了未来的 CMB 和 LSS 巡天项目，如 CMB-S4、DESI 和 LSST，还有一些其他的宇宙学观测可以限制中微子性质：
  - CMB Lensing, Weak Lensing, Lyman-alpha Forests, 21cm emission
  - Cosmic Voids: 特殊的环境，在空洞中，中微子在普通物质中所占的比重可能会有所增加，从而增加中微子各类效应的强度。

Setup	$\sigma(\Sigma m_\nu)$ [meV]	$\sigma(\Sigma m_\nu)$ [meV]	$\sigma(\Omega_k)$ [$\times 10^{-3}$]	$\sigma(w_0)$	$\sigma(w_a)$
S4	73	111	0.79	1.14	2.46
(+ DESI BAO)	29	76	0.48	0.13	0.41
LSST-clustering	69	91	3.33	0.42	1.22
LSST-shear	41	120	2.99	0.19	0.57
LSST-shear + clust	32	72	2.06	0.11	0.33
S4 + LSST	23	28	0.49	0.10	0.26
	...	24	0.49	...	...

谢谢！

xiajq@bnu.edu.cn