

$$V(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} [\beta^t \ln(1 - \alpha\beta) + \beta^t \alpha \ln k_t]$$

Lecture Notes of Summer School

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta)$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k_0 + \frac{\ln(1 - \alpha\beta)}{1 - \beta} + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta)$$

$$\text{左边} = V(k) = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + \frac{\ln(1 - \alpha\beta)}{1 - \beta} + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta)$$

$$\text{右边} = \max_{y \in (0, k)} \{u(f(k) - y) + \beta V(y)\}$$

利用 FOC 和包络条件求解得到 $y = \alpha\beta k^\alpha$ ，代入，求右边。

$$\text{右边} = \max_{y \in (0, k)} \{u(f(k) - y) + \beta V(y)\}$$

$$= u(f(k) - g(k)) + \beta \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln g(k) + A \right]$$

$$= \ln(k - \alpha\beta k^\alpha) + \beta \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta k^\alpha + A \right]$$

$$= \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \ln k + \beta \left[\frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} [\ln \alpha\beta + \alpha \ln k] + k \right]$$

$$= \alpha \ln k + \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \alpha \ln k + \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \beta A$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \beta A$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + (1 - \beta)A + \beta A$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + A$$

整理：曹庆宏

整理时间：July 30, 2018

Email: qinghongcao@pku.edu.cn

所以，左边 = 右边，证毕。

第 1 章 对撞机唯象学



进入原子时代后，我们对自然界的认识已经进入到费米（ 10^{-15} 米）尺度。探索更小尺度上的物理现象可以帮助我们进一步了解自然界的基本粒子间的相互作用规律和宇宙演化形成等等问题。虽然众多粒子遍布早期宇宙中，但时至今日，它们都衰变殆尽了。这些粒子的质量非常大，对应的时空尺度非常小。海森堡的测不准关系（ $\Delta x \Delta p \geq \hbar$ ）告诉我们：“如果要探测更小尺度的物理，那么我们必须用到更高能量的探针”。目前这些重粒子的踪迹仅能在高能加速器上观测到。二十世纪中粒子物理的理论研究发生几次革命——相对论和量子力学的建立，量子场论和规范场论的发展，以及标准模型的建立等。所有这些成果都是建立在加速器和探测技术的突破。物理是一门实验学科。不管一个理论模型构造地多么完美自洽，如果与实验不符，那么它只是空中楼阁而已。粒子物理的标准模型是异常优美但又不完美，它被大量的高精度实验所支持，但理论本身尚存不自洽之处。本讲义不讨论标准模型不自洽之处（参见其他老师讲义），受课时所限，我们仅仅简单地介绍对撞机唯象学和建立标准模型的核心实验。非常遗憾，事实证明这个简单的任务也是超出我的能力之外了。我只能讲解计划中的部分内容。

对撞机实验的目的在于探索能量前沿的物理规律。在不同的能量标度上，存在不同的动力学自由度，所谓的物理规律就是描述这些动力学自由度之间的相互作用形式。例如，在 10^{-15} 米（200 MeV）尺度上，动力学自由度是核子（质子和中子），物理规律是核物理；在 10^{-18} 米 ~ 100 GeV 尺度（也即大家熟悉的弱电能标），物理规律是标准模型的弱电理论；目前正在运行的大型强子对撞机旨在探测 10^{-20} 米 ~ 10^3 GeV 处的物理规律，这就是 TeV 新物理。

对撞机唯象学诞生于上个世纪 60 年代中期。当时粒子物理对撞机实验日趋复杂，实验家和理论家无法有效地沟通。实验家谈论的是探测器探测的粒子们的动量、能量和空间分布，理论家则高谈阔论场论、对称性和规范统一等。为了解决这一困难，对撞机唯象学应运而生，其任务是在理论模型构造和实验测量之间建立起桥梁。一方面，唯象学家分析心仪的理论模型，讨论探测器上寻找检验该理论模型的可能过程，为实验家设计优化实验判选方案；另一方面，当实验学家发现某种反常现象时，唯象学家还要构造理论模型去解释这些反常现象。本课程有两个目的：1）让同学们初步理解 ATLAS 和 CMS 实验组的实验文章，了解实验家采用的实验变量和实验方案；2）为具体的新物理模型中某个散射过程设计实验方案。课程内容包括：

1. 基本粒子定义和属性
2. 现代探测器
3. 对撞机唯象学的相对论变量

4. 散射截面
5. 散射过程中自旋关联和微分分布
6. Drell-Yan 过程唯象学—— W 玻色子示例

本讲义主要是基于我在北京大学讲解《粒子物理简介》课程（共计 64 学时）的部分内容。因为暑期学校授课仅有 6 学时，我只能选择我认为最重要的也是最基本的对撞机相关的课程内容。但对撞机物理涵盖的内容非常多，有志于从事对撞机唯象学研究的同学可以系统地学习下面列出的参考书或参考文献。

- V. Barger, Phillips, 《Collider Physics》
- D. Green, 《High p_T physics》
- T. Han, 《TASI Lecture: Introduction to collider physics》
- Q.-H. Cao, 《对撞机物理简介》，to be published in 2050 :)...

1.1 基本粒子属性

我们首先看一下基本粒子的定义，即基本粒子的属性。所谓“基本”是指，在目前已有的实验技术水平上，人们还没有发现该粒子内部存在复杂结构，因此可以将该粒子视作为“点”粒子。“粒子”的定义就比较复杂了，因为这是一个不同领域都采用的术语，例如凝聚态物理学家也经常将他们在实验中观测到激发模式也称为“准粒子”。粒子物理领域中“粒子”是场的激发态，它们处于彭加莱群的不可约表示，具有确切的质量和自旋。

彭加莱对称性包含了洛伦兹对称性和平移对称性，包含如下所示的 10 个生成元，

$$M^{\mu\nu}, P_\mu = i\partial_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

每个李群的不可约表示都可以用一组 Casimir 算符的本征值描述。因为一个李群的 Casimir 算符和该李群中每个生成元都对易，所以由舒尔引理可知，Casimir 算符的本征值是正比于单位矩阵的常数。每个不可约表示都可以用该李群的一组 Casimir 算符的本征值独一无二地描述。例如，我们熟悉的轨道角动量遵从 $SO(3)$ 群对称性，生成元为 $\hat{L}_{x,y,z}$ ，满足对易关系 $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\epsilon_{iji}\hat{L}_k$ ($i = x, y, z$)。 $SO(3)$ 群的 Casimir 算符是 $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$ ，满足 $[\hat{L}^2, \hat{L}_{x,y,z}] = 0$ ，其本征值 $\ell(\ell+1)$ 刻画了 $SO(3)$ 群的不可约表示。

彭加莱群具有两个 Casimir 算符。第一个算符是 \hat{P}^2 。容易验证

$$[\hat{P}^2, M^{\mu\nu}] = [\hat{P}^2, \hat{P}_\mu] = 0. \quad (1.2)$$

将此算符作用于单粒子态上可得

$$\hat{P}^2 |p\rangle = p^2 |p\rangle = m^2 |p\rangle, \quad (1.3)$$



因此我们可以用质量来描述彭加勒群的某个不可约表示。两个质量不同的粒子位于彭加勒群的不同不可约表示中。

第二个 Casimir 算符是由 Pauli-Lubanski 矢量构成的。PL 矢量是赝矢量，定义为

$$W_\sigma = -\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\mu\nu}P^\rho = \widetilde{W}_{\sigma\rho}P^\rho. \quad (1.4)$$

容易验证

$$[W^2, P^\alpha] = [W^2, M^{\mu\nu}] = 0, \quad W_\mu P^\mu = 0. \quad (1.5)$$

可以看出, W^2 是 Casimir 算符, 同时 W^μ 和 P^μ 彼此对易。这建议我们选取力学量完备集 $\{\hat{P}^2, \hat{W}^2, \hat{P}^\mu, \hat{W}^\mu\}$ 。但我们需要检查一下 \hat{W}^μ 四个分量彼此是否对易。容易验证

$$[\hat{W}_\mu, \hat{W}_\nu] = -i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\rho W^\sigma. \quad (1.6)$$

\hat{W}_μ 彼此不对易, 也不封闭, 因此无法形成力学量完备集。但这并不陌生, 因为我们在量子力学中遇到过同样的例子——自旋。自旋算符彼此不对易, 但构成一个封闭的代数。

下面我们看看 \hat{W}_μ 什么条件下也可以构成一个封闭的代数。首先考虑有质量粒子 ($m \neq 0$)。在其静止系中, 粒子动量为 $p_\mu^* = (m, \vec{0})$ 。因为 $W_\mu P^\mu = 0$, 所以 $W_0 = 0$, 从而有

$$\hat{W}_i = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta i}M^{\alpha\beta}m \equiv mJ_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.7)$$

而且 \hat{W}_i 满足如下封闭的对易关系

$$\left[\frac{\hat{W}_i}{m}, \frac{\hat{W}_j}{m}\right] = i\epsilon_{ijk}\frac{\hat{W}_k}{m}. \quad (1.8)$$

大家应该非常熟悉这个代数结构, 它就是 $SU(2)$ 描述的自旋。

其次考虑无质量的粒子 ($m = 0$), 满足 $\hat{P}_\mu|p_\mu\rangle = p_\mu|p_\mu\rangle$ 且 $p^2 = 0$ 。不妨设无质量粒子沿着 z 轴运动, $p_\mu^* = (E, 0, 0, E)$ 。由 $\hat{W}_\mu P^\mu|p^*\rangle = 0$ 可得 $\hat{W}_\mu = (W^3, W^1, W^2, W^3)$ 。有 Pauli-Lubanski 矢量的对易关系可知

$$\begin{aligned} [W_1, W_2]|p^*\rangle &= 0, \\ [W_3, W_1]|p^*\rangle &= iEW_2|p^*\rangle, \\ [W_3, W_2]|p^*\rangle &= -iEW_1|p^*\rangle. \end{aligned} \quad (1.9)$$

这构成了一个小群 (Little Group)——2 维欧氏空间的旋转平移群 $E(2)$ 。可以证明:

$$\hat{W}_\mu|p^*\rangle = \lambda\hat{P}_\mu|p^*\rangle, \quad (1.10)$$

其中 λ 就是我们熟悉的螺旋度 (Helicity)。容易看出螺旋度是赝标量, 因为它联系赝矢量 W_μ 和矢量 P_μ 。因为小群代数结构, 我们可以用螺旋度描述无质量粒子, 而且可以进一步证明无质量粒子有且仅有两种螺旋度状态。详见张昊老师讲义。



1.1.1 粒子的其他属性

粒子还具有内部属性（或内部的希尔伯特空间），这些内部属性和粒子的相互作用性质是紧密相关的。

- “荷”（charge）。粒子物理中规范相互作用遵从连续的规范对称性，而规范对称变换是由对称群中的生成元通过指数参数化方式得到。在量子场论中每个生成元都对应于一个守恒荷，而这些守恒荷的李乘积满足规范对称群的乘法规则。不同的守恒荷对应于不同的相互作用，例如电荷对应于电磁相互作用，弱荷对应于弱相互作用，色荷对应于量子色动力学，同位旋荷对应于核子之间的强相互作用等。基本粒子所携带的守恒荷标记着粒子在相互作用中的属性，可以区分粒子。
- 寿命（lifetime）。标准模型中基本粒子可以通过相互作用进行转化，例如 $W^+ \rightarrow e^+ \nu_e$, $t \rightarrow b W^+$, $\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu$ 等。在这些转换过程中存在质量最轻的粒子，因为能量守恒，这些最轻的粒子无法继续衰变从而得以稳定存在于宇宙中。自然界中仅有三种稳定粒子：

$$\text{电子和正电子: } e^+ / e^-, \text{ 质子和反质子: } p / \bar{p}, \text{ 光子: } \gamma. \quad (1.11)$$

这三种稳定粒子对应于自然界中已知的三种微观相互作用：量子电动力学给出光子（质量为零），弱相互作用给出电子和正电子，强相互作用给出质子和反质子。其他的诸多粒子都通过相互作用衰变到这些稳定粒子，但每个粒子的衰变快慢取决于该粒子的相互作用形式，满足指数衰减定律。粒子寿命（通常记作为 τ ）定义为：“ N 个全同粒子的系统的粒子数衰变减少为初始时刻粒子数的 $1/e$ 的时间间隔”。

- 衰变宽度（ Γ ）。它等价于粒子寿命，自然单位制中两者之间转换关系是 $\Gamma = 1/\tau$ 。
- 轻子数和重子数。
- 磁矩。
- ...

1.2 现代探测器

对撞机任务是碰撞出新物理共振态，并且尽可能精确地测量新共振态粒子的属性。下面我们看一下在对撞机上如何测量粒子不同的属性，由此可理解现代的探测器的设计方案，并初步了解探测器相关的运动学变量。

1.2.1 质量测量

如何测量质量？我们已经知道许多测量质量的方法。例如，每一天我们都使用“秤”来借助重力测量质量；已知粒子电荷，我们就可通过荷质比（ q/m ）来测量粒子质量。



高能对撞实验会产生大量的粒子（电中性或荷电的），因此这些经验都无法直接应用于对撞机上。我们需要采用新方法测量粒子质量。从基本粒子定义可知，质量标记粒子的量子数，同时满足爱因斯坦质壳条件 $p^2 = m^2$ 。因此我们可以在对撞机上测量末态粒子的能量（ E ）和动量（ \vec{p} ），在利用

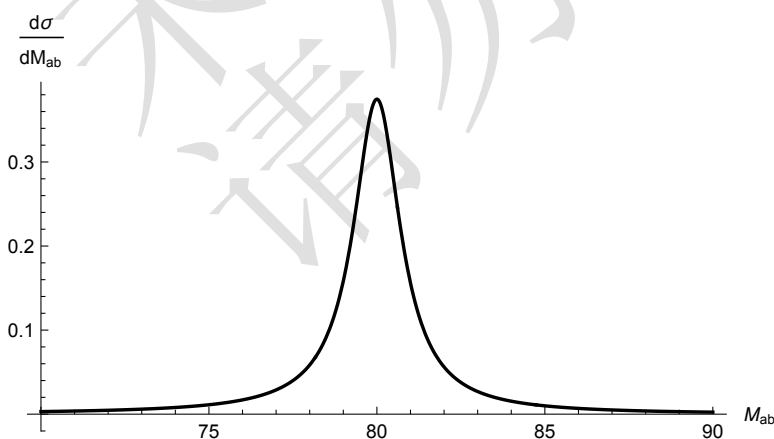
$$p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = E^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m^2 \quad (1.12)$$

得到粒子质量 m 。当然这种方法要求待测粒子在探测过程中是稳定粒子或“准稳定”粒子。“准稳定”是指该粒子在探测之前不会衰变到其他粒子。这意味着在已知的对撞机上，寿命要超过 10^{-10} 秒的快速运动的不稳定粒子是准稳定的。这些准稳定粒子包含 π^\pm 介子（ $\tau_{\pi^\pm} = 10^{-8}$ 秒），中子（neutron, $\tau_n = 10^{-8}$ 秒）， K_L^0 介子（ $\tau_{K_L} = 10^{-8}$ 秒）和 μ^\pm 。

如果粒子寿命非常短，它们在到达探测器之前就衰变成为稳定粒子或准稳定粒子。例如 W 玻色子产生后会瞬间衰变成一对夸克或轻子。考虑一个不稳定粒子 A 衰变到两个末态粒子 a 和 b （ $A \rightarrow a + b$ ），并假设末态粒子 a 和 b 是稳定或准稳定的。我们可以测量 a 和 b 的动量，通过能动量守恒公式得到不稳定粒子 A 的四动量（ $p_A^\mu = p_a^\mu + p_b^\mu$ ），再进一步得到不稳定粒子 A 的质量谱（或称之为 A 粒子衰变产物们的不变质量谱），即 $m_A^2 = m_{ab}^2 = (p_a + p_b)^2$ 。因为不稳定粒子的寿命是有限的，能量-时间不确定关系告诉我们它质量没有明确的定义。不稳定粒子的不变质量谱满足 Breit-Wigner 分布

$$\frac{d\sigma}{dm_{ab}} \propto \frac{1}{(p_a + p_b)^2 - m_A^2)^2 + m_A^2 \Gamma_A^2}. \quad (1.13)$$

其中 Γ_A 是 A 粒子的衰变总宽度。下图显示了 W 玻色子衰变产物的归一化的不变质量谱。



1.2.2 自旋测量

斯特恩-盖拉赫（Stern-Gerlach）实验直接验证了基态银原子具有自旋，并且具有两个分量。实验是让银原子束通过不均匀分布的磁场，银原子磁矩和磁场之间相互作用从



而导致通过磁场后的银原子劈裂成两束。但非常遗憾地是，对撞后末态粒子数目巨大且方向各异，完全不可控制，因此我们无法在对撞机探测器上安装 SG 装置，从而无法测量粒子的自旋。注意：实验上无法直接测量末态粒子自旋的这一事实要求我们在散射振幅级别上对末态粒子自旋求和。同理，我们也无法精确控制实验初态入射粒子的自旋状态，也即初态粒子处于混态，因此我们也需要对初态入射粒子的自旋求和求平均。我们在对撞机上是如何测量粒子自旋？我们已经确定弱相互作用的媒介粒子 W 玻色子和 Z 玻色子都是矢量玻色子，即自旋为 1。我们又是如何确定它们自旋的？

对撞机上末态粒子和初态粒子之间存在自旋关联效应。此关联效应导致末态粒子具有特殊的出射方向，表现为在空间某个方位上末态粒子出现较多或不会出现等，此即为末态粒子的微分分布 $d\sigma/d\Omega$ 。因为相空间仅仅依赖于末态粒子数目和质量，但不包含任何物理信息，所以末态粒子空间分布完全取决于散射振幅，而散射振幅知道中间态和初末态粒子的全部信息。通过测量末态粒子空间分布，我们就可以检验粒子的自旋属性了。

1.2.3 电荷和动量

对撞机上测量粒子电荷和动量是同时完成的，可谓“一石双鸟”。测量粒子电荷包含两个内容：一是电荷大小，二是电荷符号。测量粒子电荷符号的方法非常简单，这是我们初中必考的内容。运动的带电粒子在磁场中发生偏转，其运动方程满足

$$qvB = m \frac{v^2}{R}, \quad (1.14)$$

其中 q , m 和 v 分别是粒子电荷大小，质量和速度，而 B 为外磁场强， R 则是粒子运动轨迹的圆周半径。因为速度 v 的方向垂直于磁场方向，所以我们可以将上面的运动方程改写为

$$p_T = mv = qBR. \quad (1.15)$$

这里 p_T (T 表示 Transverse) 代表粒子在垂直于磁场方向上的动量，即 $\vec{p}_T \perp \vec{B}$ 。如果知道粒子沿轨迹运动的先后顺序，我们就可以知道粒子的偏转方向，从而可以判断粒子的电荷符号了。对撞机上末态粒子们从碰撞点产生后向外部出射，其运动轨迹的时间方向非常容易判定，因此测量电荷大小和符号的问题就转化为对粒子轨迹半径的测量。采用自然单位制 $\hbar = c = 1$ ，粒子运动方程可写为

$$p_T(\text{GeV}) \sim 0.3 \times B(\text{tesla}) \times R(\text{meter}). \quad (1.16)$$

大型强子对撞机上 CMS 实验组的探测器的强磁场是 3.8 T，我们可以估算一下



CMS 实验环境中探测不同横动量所需的半径大小。

| $p_T(\text{GeV})$ | $R(\text{meter})$ |
|-------------------|-------------------|
| 1000 | 877.2 |
| 100 | 87.72 |
| 10 | 8.77 |
| 1 | 0.88 |

显而易见，如果通过完整轨道半径测量粒子动量，我们需要制作非常庞大的硅径迹探测器。但这明显不现实，那么如何用同一个装置测量不同的动量？实验学家采用“弧高方法”测量粒子径迹及其动量。

弧高法假设粒子的轨迹是一个圆周轨道，这样就可通过轨迹上三点就可以定出轨道半径。如下图所示：我们探测到粒子轨迹中的三个点（图中用 1, 2, 3 标出）。我们设 1-3 连线间距为 a ，第 2 点到 1-3 连线的距离为 h ，轨道半径为 R 且 $R \gg a$ 。从勾股定理可知

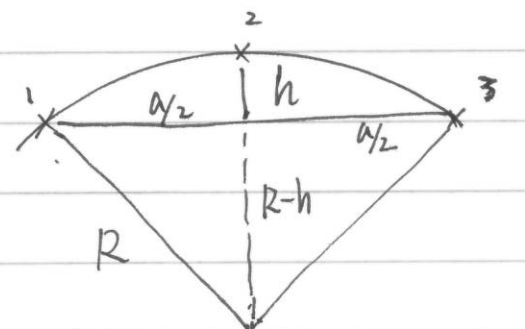
$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (R-h)^2 \quad (1.17)$$

从而有

$$R-h = R\sqrt{1 - \frac{a^2}{4R^2}} \approx R - \frac{a^2}{8R}, \quad (1.18)$$

并进一步给出

$$p_T = qBR = \frac{qBa^2}{8h}. \quad (1.19)$$



可以看到，我们通过轨迹上三个点确定 a 和 h 后就可以推出轨道半径和粒子横向动量。如果粒子 p_T 非常小而导致 $R < 2a$ ，那么该粒子无法在探测器中注册足够的信息，也就无法被探测了。

任何实验测量都是有误差的，弧高方法也不例外。它的误差来自于轨迹点位置的测量。设轨迹点位置测量的平均值和误差为 $x_i \pm \sigma_{x_i}$ 。考虑上图中的三个点测量弧高，弧高 h 为

$$h = x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2}. \quad (1.20)$$

误差传递公式给出

$$\sigma_h^2 = \sigma_2^2 + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_3^2}{4} = \sqrt{\frac{3}{2}} \sigma_x. \quad (1.21)$$

最后一步我们假设所有轨迹点位置测量的误差相同。粒子动量测量的误差是

$$\frac{\sigma_{p_T}}{p_T} = \frac{\sigma_h}{h} = \sqrt{96} \frac{\sigma_x p_T}{qBa^2}. \quad (1.22)$$

首先，带电粒子横向动量测量的误差正比于 p_T ，因此 p_T 越大则测量越不准确。可以想象， $p_T \rightarrow \infty$ 时，带电粒子的轨迹就是一条直线。我们无法确定它的电荷符号和动



量大小。其次，为提高 p_T 测量精度，我们可以改进硬件。例如，增强磁场场强，建造更大的径迹探测器，和提高每个轨迹点测量精度。但这些硬件方面的改进都需要更多的资金和更好的技术。

如果我们能够测量到带电粒子运动的全部轨迹，那么即便每个轨迹点的位置测量都有误差，但综合考虑整个轨迹之后我们就可以大大减少实验误差。1964 年 Gluckstern 给出了测量了 N 个等间距轨迹点来确定粒子 p_T 的误差公式

$$\frac{\sigma_{p_T}}{p_T} = \sqrt{\frac{720}{N+4}} \frac{\sigma_x p_T}{qBa^2}. \quad (1.23)$$

增加等间距的经济探测器层的层数也可以降低 p_T 测量误差。

1.2.4 能量测量

如何测量能量？非常简单，能量守恒定律告诉我们：只要用探测器将入射粒子完全停下来，通过仪器在探测前后的能量变化就可以得到入射粒子的能量。这要求入射粒子和探测器材料物质之间存在相互作用（电磁相互作用或强相互作用），而且要求作用时间足够长。强相互作用表现为入射粒子和探测物质的原子核之间的核反应。探测物质将入射粒子能量全部吸收后将之转化为可被定量观测的电信号、光信号和热信号等。如果在散射顶点产生的粒子寿命非常短，它产生后会进一步衰变，最终会转化为一系列的准稳定粒子或稳定粒子。带电粒子和物质之间的相互作用大致可以分为如下几种：

- 非弹核反应——粒子和探测器材料的原子核之间发生非弹性散射，将原子核完全打碎从而产生一系列的核子；
- 离子化——带电粒子和探测器物质的原子核周围的束缚电子发生电磁相互作用，将束缚电子释放出来；
- 激发原子——带电粒子将探测器物质中原子激发到更高的能级；
- 韧致辐射——带电粒子在原子核周围的强电磁场中加速从而辐射出能量。

1.2.5 带电粒子在物质中的能量损耗

量能器的任务是将入射粒子留下并将之转化为物理可观测信号，因此需要入射粒子和量能器物质之间发生充分的相互作用，这对量能器物质材料和厚度提出要求。我们用来描述物质吸收带电粒子速度快慢的物理变量是入射粒子穿行单位长度的平均能量损耗—— $\Delta E/\Delta x$ 。当带电粒子质量大于电子质量时，它的电场和量能器物质的束缚电子发生相互作用并将之释放出来，这样就留下了离子-电子的轨迹。1930 年 Bethe 和 Bloch 给出了可以很好地描述物质中带电粒子因为离子化而导致的能量损耗方程 (Bethe-Bloch 方程)：

$$-\frac{dE}{dx} = K \frac{\rho Z}{M_A} \frac{Q^2}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} \right) - \beta^2 \right], \quad (1.24)$$

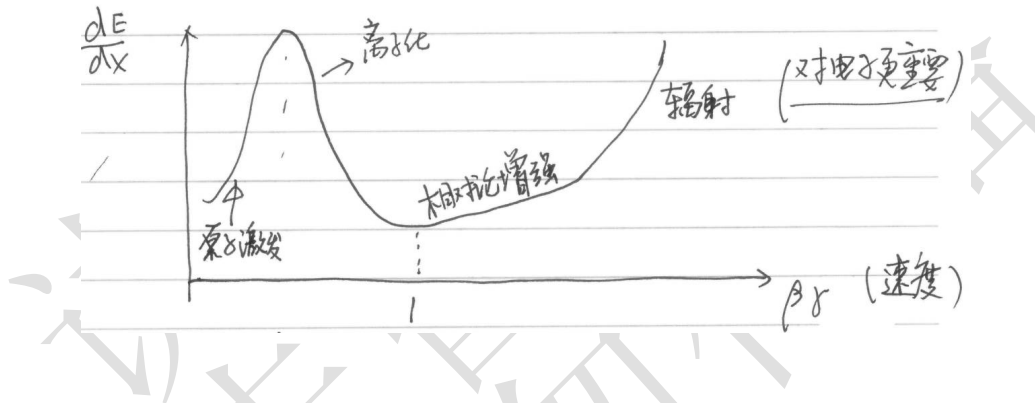


其中 $x \equiv \rho L$ (L 为入射粒子在物质中穿行距离, ρ 是物质材料的密度), Z 和 M_A 是量器物质的原子数和原子质量, Q 是入射粒子电荷, I 是平均离子化势能 (当 $Z > 20$ 时, $I = 12Z \text{ eV}$), 而 K 依赖于入射粒子质量 (m)

$$K = \frac{4\pi\alpha^2(\hbar c)^2 N_A (10^3 \text{ kg})}{mc^2}. \quad (1.25)$$

注意: 变量 x 的计量单位 g(克)/cm^2 , 因此 Bethe-Bloch 公式左方的能量损耗的计量单位是 MeVcm^2/g 。为了将其转化为更加直观的 MeV/cm (即带电粒子行走单位距离 1cm 后损失能量的数额), 我们通常要乘以探测物质密度。Bethe-Bloch 方程是归一化到单位密度的, 因此我们可以用一种材料做实验测量能损公式后给出一般性公式, 再乘以具体选定的某种探测材料的密度就可以得到该材料的能损曲线了。PDG 综述给出了缪子在铜材料中穿行时的能损曲线。

下图显示了物质中带电粒子能量损耗对其速度 ($\beta\gamma$) 的依赖关系¹ 当带电粒子



速度非常低时, 它和探测物质原子中的电子相互作用非常微弱, 因此只能将探测物质原子从基态激发到更高能级。当带电粒子速度增加到一定程度后, 它就可以将探测物质原子束缚的电子“轰出”从而离子化物质原子。Bethe-Block 方程指出, 带电粒子能量损耗反比于粒子速度平方 ($\Delta E \propto \beta^{-2}$), 因此带电粒子速度越慢时能量损耗越大, 也即慢粒子比快粒子更快地离子化。这也容易理解, 因为慢粒子和物质原子作用的时间更长。当带电粒子 $\beta\gamma \sim 1-3$ 时, 粒子离子化损失能量最慢, 大概是 $1.5-2.0 \text{ MeVcm}^2/\text{g}$ 。能量为 10 GeV 的缪子可以在铁材料中能损约为 13 MeV/cm , 因此它可以跑大约 1000 米, 基本上穿行无阻。

随着粒子速度进一步增加, 由于相对论效应, 在实验室参考系中带电粒子的横向电场场强增加, 这样带电粒子可以看到更远处的原子附近的束缚电子。这导致带电粒子能量损耗增加, 具体表现为 Bethe-Bloch 方程中的对数项可以近似为

$$\ln \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \sim \ln \frac{2m_e c^2}{I} + \ln(\beta^2 \gamma^2) \sim \ln \frac{P}{m}. \quad (1.26)$$

1. 详细图形请参加 Particle Data Group 的综述。



1.2.6 电子和光子在物质中能量损耗行为

电子质量非常轻，因此对撞机上产生的电子都是极端相对论性运动的。带电粒子通过辐射消耗能量，辐射几率正比于加速度，反比于粒子质量²，

$$\text{Prob} \propto \frac{\dot{\omega}^2}{m^2}. \quad (1.27)$$

大原子数的原子核周围存在非常强的电场，其电场强度远大于原子核周围束缚电子的电场场强，因此入射电子在原子核周围电场中做剧烈的加速运动从而通过韧致辐射来消耗能量，而不是通过离子化。入射电子和原子核的反应如下

$$e^- + N \rightarrow e^- + N + \gamma. \quad (1.28)$$

因为缪子质量是电子的 206 倍， $m_\mu = 206m_e$ ，因此在相同的外场中缪子通过韧致辐射损耗的能量是电子的万分之一，即

$$\frac{\text{Prob}(\mu^\pm)}{\text{Prob}(e^\pm)} \sim 10^{-4}. \quad (1.29)$$

这表明：能够将电子完全停下来的材料无法困住缪子；要测量相同能量的电子和缪子，测缪子的材料要比测电子的材料厚一万倍。这是不现实的，因此我们电磁量能器只能测量电子或光子，无法测量缪子的能量。

1.2.7 光子能量损耗

光子损失能量的方式和光子的能量大小相关。如果光子能量在 eV 级别，入射光子可以将原子核外围的束缚电子轰出，发生光电效应；如果光子能量在 keV 级别，入射光子可以发生康普顿散射；如果光子能量大约 1.022 MeV，光子和核子发生反应后可以衰变为一对正负电子，

$$\gamma + N \rightarrow N + e^+ + e^-. \quad (1.30)$$

注意：光子的对产生过程一旦发生，就会产生雪崩效应。入射光子产生的次级电子还可以继续和原子核之间发生反应产生电子和光子（ $e^\pm + N \rightarrow e^\pm + N + \gamma$ ），这个过程会一直持续下去直至末端电子或光子无法进行对产生过程了。这种过程被称之为级联簇射（cascade decay），所产生的大量正负电子和光子们都分布在某个空间立体角内，被称为“电子喷注”。

1.2.8 强子能量损耗

高能入射强子主要是和原子核发生非弹散射，产生一系列的核子

$$X_h + N \rightarrow N' + N'' + N''' + \dots, \quad (1.31)$$

2. 详见刘川《电动力学》讲义。



我们常见的强子和核子之间散射截面非常大，例如

$$\begin{aligned}\sigma(\pi^\pm P) &\sim \sigma(\pi^\pm n) \approx 25 \text{ mb}, \\ \sigma(pp) &\sim \sigma(pn) \approx 40 \text{ mb}.\end{aligned}\quad (1.32)$$

入射强子能量的 30% 会用于打碎原子核或激发原子核，这些效应无法提供可观测的实验信号，因此强子能量的测量具有很大的不确定性。末态强子还可以通过离子化探测器物质来损失能量。最小可以进行离子化反应的强子是 π^\pm 。

1.2.9 强子和电子能损比较

下面我们比较一下强子和电子通过物质时能量损耗行为。带电粒子在物质中穿行时能量损耗遵从如下的指数衰减关系

$$E = E_0 e^{-x/X_0}, \quad (1.33)$$

其中 X_0 是能损平均距离，和具体的探测器物质材料有关。带电粒子在物质中传播 X_0 距离后能量变为初始能量的 $1/e$ 。下表列出电子和强子在几种常见物质中的平均能损距离。可以看出，强子需要在物质中穿行更长的距离才可将能量损耗掉，而电子则很快地就可在铅块或铁块中耗尽能量，这要求强子量能器要比电磁量能器大很多。这一性质决定了现代探测器的设计。

| X_0 (米) | 电子 | 强子 |
|-----------|--------|------|
| 空气 | 300 | 750 |
| 水 | 0.36 | 0.86 |
| 碳 | 0.2 | 0.38 |
| 铁 | 0.02 | 0.17 |
| 铅 | 0.0056 | 0.17 |

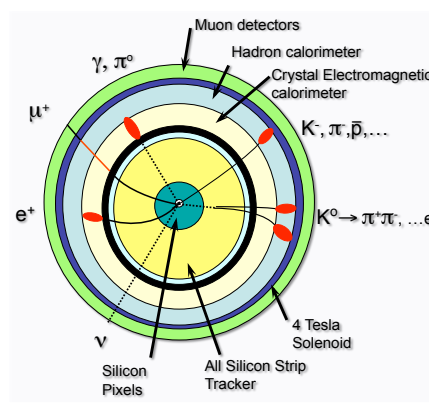
表 1.1: 电子和强子在不同物质中平均能损距离（米）。

1.2.10 现代探测器——洋葱圈结构

了解带电粒子的动量、能量和电荷等物理量的探测方法后，我们就可以进一步裂解现代探测器的结构了。首先探测器是围绕入射粒子对撞轴的圆筒形结构，旨在尽可能的探测粒子的不同属性。因为每次散射过程都是不可重复的，所以我们要尽可能地测量每一个出射粒子的能量和动量（动量包含空间角分布）。在每次测量过程中探测器和出射粒子之间必然要发生相互作用，否则就无法产生实验可测信号。这意味着测量过程不可避免地会改变待测粒子的属性。为了精确测量粒子的动量和能量，我们要合理



地设计探测器，安排正确的探测顺序。从上面讨论可知，测量粒子能量是一个不可逆的过程，要求将入射粒子转化为其他能量更低的粒子，因此动量测量必须在能量测量之前完成。从电子（光子）和强子平均能损距离可知，强子量能器的尺寸要比电磁量能器的尺寸大许多。这意味着电磁量能器要嵌套在强子量能器内部。下图显示了现代探测器的剖面示意图——呈现出洋葱圈结构。

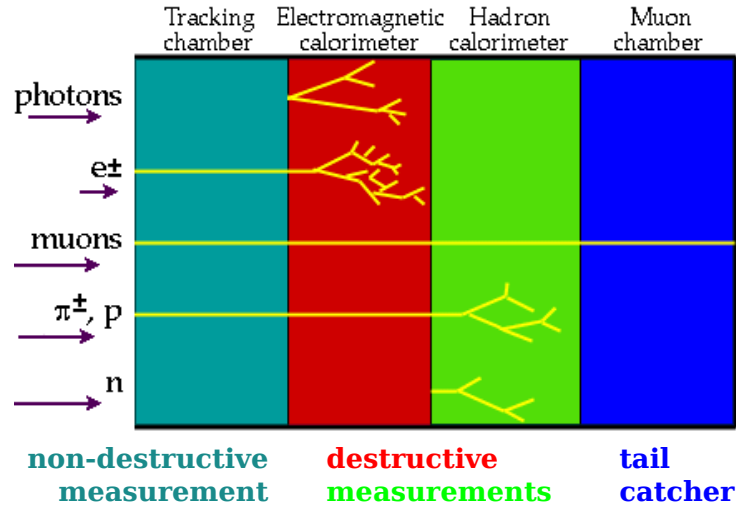


最内部核心区域是硅像素顶点探测器，检验硬散射过程发生的主顶点位置。顶点探测器外围是硅条径迹探测器，检验带电粒子的径迹。带电粒子在径迹探测器中和探测硅条发生微弱相互作用产生可观测电信号，之后继续向外飞行进入电磁量能器。电磁量能器包围径迹探测器，旨在测量电子和光子信号。带电强子虽然也会在电磁量能器中辐射能量，但强子质量远大于电子质量，强子因辐射而损失的能量非常微弱，因此带电强子穿透电磁量能器继续向外飞行进入外面的强子量能器。强子量能器可以有效地停留下入射强子并将其转化为级联簇射的强子喷注。缪子的探测是非常特殊的。在电磁量能器中，缪子辐射很少，仅为电子辐射的万分之一；在强子量能器中，缪子和核子之间仅有非常微弱的弱相互作用和电子相互作用，也无法释放能量。在强子量能器外部人们建立所谓的缪子探测室（muon chamber），其内部充满了强磁场。缪子穿行时会发生偏转，从而可以测量缪子的动量和电荷符号。

下图显示常见稳定粒子或准稳定粒子在探测器不同部分留下的痕迹。通过沿途的这些信号，人们就可以判断粒子的属性。首先，光子在径迹探测器中不留下任何痕迹，在电磁量能器中发生级联衰变和辐射，形成一簇电子喷注。正负电子在径迹探测器中留下偏转痕迹后再电磁量能器中级联衰变也形成一簇电子喷注。其次，缪子几乎毫发无损地通过电磁量能器和强子量能器，一直向外飞并在缪子探测器中发生偏转留下信号。实际上，我们无法判定每个缪子探测器中的粒子是否确为缪子，但既然它到了缪子探测器，我们就认为它是缪子。再次，带电强子 π^\pm 和质子会在径迹探测器中留下痕迹，又因为带电，所以也可以在电磁量能器中微弱地释放能量。最终强子量能器毁灭性地测量入射 π^\pm 和质子，产生一簇强子喷注。最后，电中性的中子不会在径迹探测器和电磁量能器中留下痕迹，但会在强子量能器中形成一簇强子喷注。

上述讨论中没有包含中微子信号，因为中微子的实验信号是非常特殊的。中微子只参与弱相互作用，在探测器中不会留下任何痕迹（完全不可见）。它的存在需要通





过动量守恒来判断。初态的两个对撞粒子的动量沿着对撞轴，因此初态在垂直于对撞轴方向的横向方向上总动量为零。能动量守恒关系要求，末态所有粒子动量的矢量和在横向方向上的分量也必为零。如果散射末态存在中微子，那么它必然将携带有沿横向方向的动量。如果将末态所有可见粒子的动量求和后发现横向分量不为零，那就意味着必然有中微子存在（虽然我们不知道有几个中微子）。因此中微子的实验信号变现为横向方向的动量丢失——通常叫做大横动量丢失信号（missing transverse momentum，记作为 \cancel{E}_T ）。其定义如下：

$$\cancel{E}_T^x = -\sum_i p_i^x, \quad \cancel{E}_T^y = -\sum_i p_i^y, \quad (1.34)$$

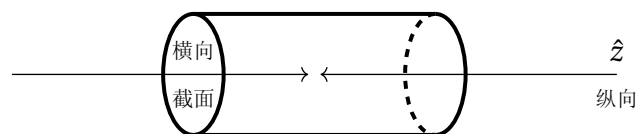
其中 $p_i^{x,y}$ 表示可见粒子 i 的动量 x 和 y 分量。

注意：大横动量丢失并不一定完全来自于中微子。初态强子或电子的 QCD 或 QED 辐射也会给硬散射过程产生非零的固有横动量。我们只有将这些初态辐射效应计算精确后才可以确定丢失的横动量和中微子之间的关系。这一效应对精确检验标准模型和测量模型参数异常重要。

1.3 对撞机的相对论运动学

粒子物理学家生活在不同的空间维度中：实验学家生活在 2 维空间，唯象学家在 3 维世界，而理论学家则生活在 10 维空间:）。本次暑期学校没有安排“额外维空间物理”的讲座，下次暑期学校会在《TeV 物理》课程讲解。

实验物理学家生活在 2 维空间是因为探测器围绕对撞轴是对称的。设入射粒子束流方向为 z 方向，探测器在 x - y 平面上是对称的，如下图所示：



因为具有绕入射轴的旋转对称性，所以我们可将粒子动量分解为沿着入射粒子束流方向（称之为纵向）和垂直入射粒子束流方向（即 x - y 平面，称之为横向），例如

$$p^\mu \equiv (E, \vec{p}_T, p_z), \quad \vec{p}_T = (p_x, p_y). \quad (1.35)$$

具体的某个单独散射事例中末态粒子的横动量分量 p_x 和 p_y 的数值是没有意义的，真正有物理意义的是不同粒子之间的相对方位，即两个粒子之间方位角（azimuthal angle）的夹角。实验家重点关心的是每个粒子在横向平面内的动量分量大小，即

$$p_T \equiv |\vec{p}_T| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = |\vec{p}| \sin \theta, \quad (1.36)$$

其中 θ 是出射粒子和入射粒子束流方向之间的夹角（也即极化角）。最重要的是，横向动量 p_T 在沿着对撞轴方向的洛伦兹 boost 操作下保持不变。强子对撞机上实验室系和硬散射过程的质心系之间是由沿着对撞轴的 boost 变换联系的，因此实验室参考系中测得的粒子横向动量也就是粒子在硬散射的质心系中的横向动量。这正是我们戏称实验物理学家生活在 2 维空间的原因。

1.3.1 快度 (Rapidity)

实际上实验学家还需要观测末态粒子沿着对撞轴（ z 轴）的动量分量。但因为硬散射质心系和实验室系之间相差一个洛伦兹 boost 变换，因此我们需要把质心系中理论计算的末态粒子的空间分布转化为实验室系中的空间分布。这需要对末态每个粒子都做洛伦兹变换。为了方便处理不同参照系中的洛伦兹变换，人们引入了“快度”的概念。

快度 y 描述粒子沿着某一方向的运动快慢（通常我们用粒子速度的投影 v_L 来描述）。纵向（Longitudinal）是对撞机的特殊方向，因此我们定义快度如下：

$$\tanh y = v_L, \quad (1.37)$$

从而有

$$\sinh y = \frac{v_L}{\sqrt{1-v_L^2}}, \quad \cosh y = \frac{1}{\sqrt{1-v_L^2}}. \quad (1.38)$$

显然，粒子的快度是速度投影的单调函数，见上图。粗看起来，快度的物理图像并不直观，但它在洛伦兹变换下的优势是巨大的：

- 首先，在洛伦兹变换下

$$y = y' + \Delta, \quad (1.39)$$

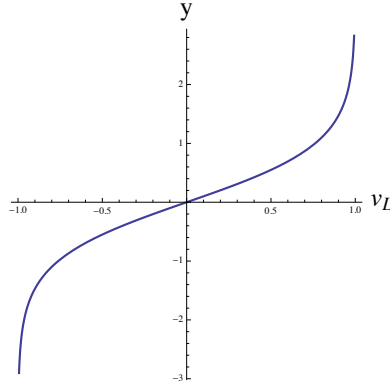
其中 Δ 描述两个坐标系之间的相对快度。比较不同参考系中粒子的运动时，快度比速度要便利很多。

- 其次，不同粒子之间的快度差异是洛伦兹 boost 不变的，即

$$y_1 - y_2 = y'_1 - y'_2. \quad (1.40)$$

这在讨论不同粒子之间关系时非常便利。





下面我们验证快度的洛伦兹变换公式 $y = y' + \Delta$ 。不妨取特殊情况 $\cos \theta = 1$ ，即粒子运动方向和参考系相对运动方向相同。设 β 是粒子在参考系 O 中速度， β' 是粒子在参考系 O' 中的速度， β^* 是参考系 O^* 相对于参考系 O 的运动速度。由速度变换公式可知

$$\beta = \frac{\beta^* + \beta'}{1 + \beta^* \beta'} \quad (1.41)$$

将 β 代入到快度定义式中

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \quad (1.42)$$

可得

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \frac{\beta' + \beta^*}{1 + \beta' \beta^*}}{1 - \frac{\beta' + \beta^*}{1 + \beta' \beta^*}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta' \beta^* + \beta' + \beta^*}{1 + \beta' \beta^* - (\beta' + \beta^*)} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \beta')(1 + \beta^*)}{(1 - \beta')(1 - \beta^*)} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta'}{1 - \beta'} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta^*}{1 - \beta^*} \\ &= y' + y^*. \end{aligned} \quad (1.43)$$

上面给出的快度定义依赖于粒子速度，但我们更关心的是粒子动量，因此我们常常使用下面的快度定义：

$$y \equiv \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z} = \tanh^{-1} \left(\frac{p_z}{E} \right) = \tanh^{-1} (\beta \cos \theta). \quad (1.44)$$

通过上式我们可以反解出能量 (E) 和动量 (p_z) 对于快度的依赖关系：

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{m^2 + p_T^2} \cosh y \equiv m_T \cosh y, \\ p_z &= \sqrt{m^2 + p_T^2} \sinh y \equiv m_T \sinh y. \end{aligned}$$

其中 m_T 被称为横向质量 (transverse mass)。如果已知粒子质量，那么我们测量 \vec{p}_T 和 y 后就可以得到粒子的四动量矢量

$$p^\mu = (m_T \cosh y, \vec{p}_T, m_T \sinh y). \quad (1.45)$$



1.3.2 赝快度

实验分析中我们常用“赝快度”(η)来替代“快度”。赝快度定义为:

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = \ln \cot \frac{\theta}{2} \quad (1.46)$$

其中 θ 角是和入射粒子束方向的夹角, 也常被称为极化角 (polar angle)。末态粒子最终会在探测器的某个器件中注册信息, 因此一旦确定了散射过程发生的对撞点 (由顶点探测器触发给出), 我们就可以通过探测器件和对撞点之间的极化角夹角给出粒子的赝快度。当粒子能量很高使得其质量效应可以忽略时, 赝快度就等于快度。和快度定义相比,

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \beta \cos \theta}{1 - \beta \cos \theta} \xrightarrow{\beta=1} \eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \quad (1.47)$$

快度和赝快度的转换关系:

$$y = \tanh^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + m^2/|p|^2}} \tanh \eta \quad (1.48)$$

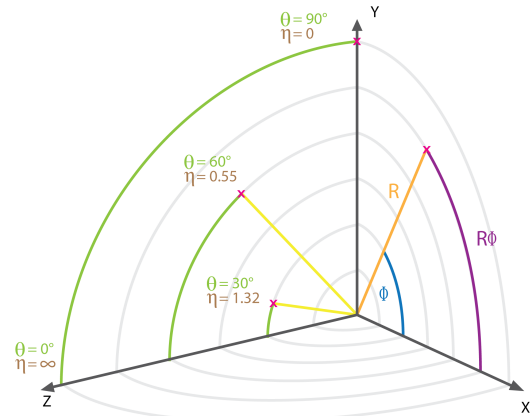
当粒子质量远小于其能量时,

$$y \sim \eta - \frac{m^2 \cos \theta}{2|\vec{p}|^2 \sin^2 \theta} = \eta - \frac{m^2}{2p_T^2} \cos \theta \quad (1.49)$$

在大型强子对撞机的实验环境中, 电子、缪子和强子喷注的横向动量都远大于其质量, 因此赝快度完全适用。除非特殊说明, 我们通常也将赝快度称作为快度。

在高能极限下, 极化角的测量可以转化为快度, 但这种转化是非线性的:

$$\begin{aligned} \theta \rightarrow 0^\circ &: \eta \rightarrow +\infty, \\ \theta \rightarrow 180^\circ &: \eta \rightarrow -\infty, \\ \theta \rightarrow 90^\circ &: \eta = 0, \\ \theta \rightarrow 60^\circ &: \eta = 0.55, \\ \theta \rightarrow 40^\circ &: \eta = 1, \\ \theta \rightarrow 15^\circ &: \eta = 2, \\ \theta \rightarrow 6^\circ &: \eta = 3. \end{aligned}$$



1.4 散射截面和积分亮度

粒子物理实验目的是从巨大的背景中抽取微弱的信号，这要求

- 在理论上精确计算信号和背景的产生事例数和微分分布；
- 在实验装置设计上提高碰撞发生的几率，增加事例数；
- 在实验分析上优化实验判选方案，提高信噪比。

第一点要求我们提高理论计算精度，增加圈图修正的圈数，即

$$\text{LO} \rightarrow \text{NLO} \rightarrow \text{NNLO}(\text{N}^2\text{LO}) \rightarrow \text{NNNLO}(\text{N}^3\text{LO}) \cdots \text{N}^\infty\text{LO}. \quad (1.50)$$

这不仅可以计算高阶修正时新的散射图形的贡献，而且可以帮助我们减少对于重整化能标和因子化能标的依赖行为。第二点要求我们提升硬件，增加质子碰撞几率。第三点则要求，我们通过微分分布寻找信号过程和背景过程的差异，从而得到优化的实验判选方案。本小节主要讨论第 2 点，帮助大家初步了解我们理论学家关心的对撞机参数——瞬时亮度和积分亮度。

1.4.1 自然单位制和散射截面

我们使用散射截面标记散射过程发生的概率。顾名思义，散射截面具有面积量纲，即 $[\sigma] = \text{米}^2$ 。

1.4.2 散射截面和亮度

在对撞机上产生的事例数取决于具体的碰撞过程，也依赖于机器本身的参数。从量纲分析可知，在自然单位制中，散射截面的量纲是 GeV^{-2} 。考虑 $2 \rightarrow 2$ 的无质量粒子的散射过程 $a + b \rightarrow c + d$ 。当研究 TeV 能量区间的新物理散射过程时，这个假设通常是合理的。因为对于 TeV 能量标度而言，标准模型粒子的质量近似可以忽略（我们先不考虑顶夸克、希格斯粒子和 W/Z 玻色子）。此时整个过程就只有一个带有量纲的物理量——散射过程的质心系能量平方（记作为 $s = Q^2 = E_{\text{cm}}^2$ ），因此散射截面一定反比于 s ，

$$\sigma \propto \frac{1}{s} = \frac{1}{E_{\text{cm}}^2}. \quad (1.51)$$

非常遗憾地是，这个公式告诉我们，散射截面随着对撞能量的提升而急剧减少（如下图所示）。

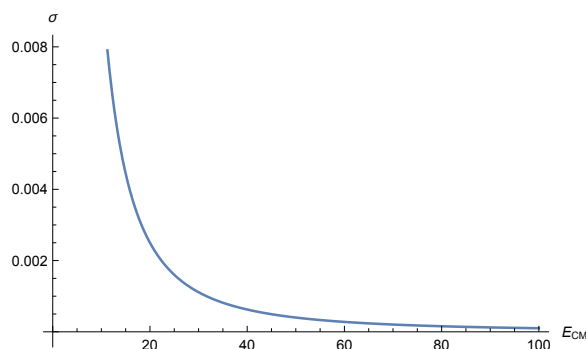
人们构建大型对撞机的目的在于探索空间更小尺度或更高能量处的未知物理。电弱物理的能量标度是 100 GeV，由自然单位制可知，

$$200 \text{ MeV} = 0.2 \text{ GeV} = \frac{1}{\text{fm}}, \quad (1.52)$$

因此电弱能标物理的特征产生截面大小是

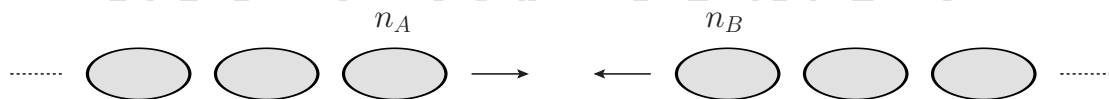
$$\sigma_{\text{EW}} \sim G_F \sim \frac{g^2}{m_W^2} \sim \frac{1}{(100 \text{ GeV})^2} = 10^{-6} \text{ mb}. \quad (1.53)$$





质子-质子碰撞的特征产生截面是 $\sigma \sim r_p^2 = \text{fm}^2 = \text{mb}$ ，因此我们期望每一百万个质子对撞实验中有一个产生电弱粒子——例如 W 玻色子。毫无疑问，这个几率非常小。为了提高产生 W 玻色子的事例数，我们需要增加质子-质子碰撞的次数。

现代的粒子加速器采用我们熟悉的“春运火车”的模式来提高质子-质子碰撞的次数。每年地球上最大的动物迁徙活动并不是发生在非洲，而是在亚洲、在中国。每年春节前后大约近 10 亿中国人会在极短时间之内在祖国大地上痛并快乐地奔波。为了提升输运效率，我们的铁路部门增发车次，增挂车厢，增加每节车厢的乘坐人数（站票也一票难求）。这种日常生活中提高迁徙效率的方法也同样适用于粒子对撞机——我们增加每一束粒子团中的质子数目，增加单位时间内粒子团绕行加速环一周的次数。如下图所示，实验学家将亿万个质子压缩装载在一个束流（bunch）中，在单位之间内将多个束流对撞。



设 $n_{A,B}$ 是单束流质子团中粒子数密度， A 是束流的横向分布面积， f 是两束质子团碰撞的频率，则质子之间发生散射的事例数是

$$N = \frac{\sigma \cdot n_A \cdot n_B}{A} f(\text{Hz}) = \sigma \frac{n_A n_B f}{A}. \quad (1.54)$$

定义瞬时亮度 L 为

$$L \equiv \frac{n_A n_B f}{A}, \quad (1.55)$$

它仅仅依赖于对撞机的硬件设计，刻画了单位时间内通过碰撞点的单位面积的粒子数。我们通常用到的是积分亮度，即对撞机运行一段时间 T 后积累的总量度，

$$\mathcal{L} = \int_0^T dt L, \quad (1.56)$$

其量纲为 cm^{-2} 或 pb^{-1} 。综上所述，我们关心的对撞机运行一段时间后收集到的质子硬散射的碰撞次数为

$$\underbrace{N(\text{事例数})}_{\text{实验学家}} = \underbrace{\sigma(\text{散射截面})}_{\text{理论学家}} \times \underbrace{\mathcal{L}(\text{积分亮度})}_{\text{加速器专家}}. \quad (1.57)$$



1.4.3 微分散射截面

微分散射截面描述了某个散射过程末态粒子在空间中的分布情况，它取决于硬散射过程初末态粒子之间的相互作用形式。考虑两个粒子 a 和 b 碰撞后产生 n 个末态粒子的 $2 \rightarrow n$ 散射过程。设粒子 $a(b)$ 的质量和动量分别为 $m_{a(b)}$ 和 $p_{a(b)}$ ，末态粒子的质量和动量分别为 m_i 和 p_i 。采用 Particle Data Group 综述的约定，微分散射截面是

$$d\sigma_{a+b \rightarrow n} = \frac{(2\pi)^4}{4\sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2}} |\overline{\mathcal{M}_{a+b \rightarrow n}}|^2 d\Phi_n. \quad (1.58)$$

上式的分母是所谓的“flux”因子（描述单位时间单位面积内的入射粒子数目）， \mathcal{M} 是散射振幅（其上的划线表示了对初末态粒子自旋求和、对初态粒子自旋求平均），而 $d\Phi_n$ 是 n 体相空间微元，定义为

$$d\Phi_n = \delta^4\left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^n p_i\right) \prod_{j=1}^n \frac{d^3 \mathbf{p}_j}{(2\pi)^3 2E_j}. \quad (1.59)$$

其中的 δ 函数保证散射过程的初末态能量和动量守恒，提供了运动学的 4 个约束条件。如果已知两个入射粒子的质心系能量和所有末态粒子的质量，那么 n 个末态粒子的独立运动学变量的数目是 $3n - 4$ 。

例如，两体末态的独立运动学变量数目是 $3 \times 2 - 4 = 2$ 。我们通常定义入射粒子的运动方向为 z 轴，那么末态粒子的运动学信息就可以用末态粒子出射方向和 z 轴之间的极化夹角 θ 和在 x - y 平面上的方位角 ϕ 来描述，即有

$$\begin{aligned} p_a &= (E, 0, 0, E), \\ p_b &= (E, 0, 0, -E), \\ p_1 &= (E_1, p \sin \theta \cos \phi, p \sin \theta \sin \phi, p \cos \theta), \\ p_2 &= (E_2, -p \sin \theta \cos \phi, -p \sin \theta \sin \phi, -p \cos \theta), \end{aligned} \quad (1.60)$$

其中

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{4E^2 - m_2^2 + m_1^2}{4E}, \\ E_2 &= \frac{4E^2 - m_1^2 + m_2^2}{4E}, \\ p &= \frac{1}{4E} \sqrt{(4E^2 - (m_1 + m_2)^2)^2 (4E^2 - (m_1 - m_2)^2)}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

因为 θ 和 ϕ 角依赖于参考系，我们通常选择洛伦兹标量来刻画散射振幅模方，例如任何 $2 \rightarrow 2$ 散射过程都可以用 Mandelstam 变量描述。其定义如下：

$$\begin{aligned} s &= (p_a + p_b)^2, \\ t &= (p_a - p_1)^2, \\ u &= (p_a - p_2)^2, \\ s + t + u &= m_a^2 + m_b^2 + m_1^2 + m_2^2. \end{aligned} \quad (1.62)$$



对于 $2 \rightarrow n$ 散射过程，初末态涉及了 $(n+2)$ 个粒子，不妨设其动量为

$$p_i^\mu, i = 1, 2, \dots, (n+2). \quad (1.63)$$

能能量守恒要求仅有 $(n+1)$ 个动量是独立的，可构成的洛伦兹标量的数目是

$$\underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{p_i \cdot p_j, i \neq j} + \underbrace{(n+1)}_{p_i \cdot p_i} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (1.64)$$

再考虑到初末态粒子的质壳条件 $p_i^2 = m_i^2$ ，因此独立的洛伦兹不变量的数目是

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - (n+1) = \frac{(n+2)(n-1)}{2}. \quad (1.65)$$

毫无疑问，相空间只依赖于散射过程中碰撞能量和末态粒子的质量，它仅仅提供了平庸的运动学信息。末态粒子质量给定时，我们可以完全确定相空间的边界，例如我们熟悉的达利兹图。散射矩阵元包含了所有的动力学信息——相互作用的形式、强弱和自旋关联等，所以人们常说：“相空间没有物理，只有散射振幅才是物理的”。

下面对两体散射过程的散射振幅和相空间进行量纲分析，这可以帮助我们定性地了解散射过程的性质。采用自然单位制后，所有物理量的量纲都可以用能量表示，下面我们采用符号“ E ”来表示能量。首先分析 n 体相空间的量纲。 δ 函数描述散射过程中的能能量守恒，其量纲为 $[E]^{-4}$ 。 n 个末态粒子的体积微元的量纲是 $[E]^{2n}$ ，因此 $[d\Phi_n] = [E]^{2n-4}$ 。散射截面的量纲为 $[\sigma] = [E]^{-2}$ ，又因为散射截面中的 flux 因子的量纲为 $[Flux] = [E]^2$ ，所以 $2 \rightarrow n$ 过程的散射振幅的量纲为 $[\mathcal{M}] = [E]^{2-n}$ 。总结如下：

$$[\mathcal{M}_{2 \rightarrow n}] = [E]^{2-n}, \quad [\Phi_n] = [E]^{2n-4}. \quad (1.66)$$

常见的 $2 \rightarrow 2$ 散射过程的散射振幅和相空间都是无量纲的，即

$$[\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}] = [\Phi_2] = [E]^0. \quad (1.67)$$

一般的 $2 \rightarrow 2$ 散射过程是通过 s 道， t 道或 u 道进行的，如下图所示。设耦合常数为无量纲参数 g （可重整理论）。



因为 $[\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2}] = 0$ ，所以散射振幅一定可写作为无量纲变量的函数，即

$$\mathcal{M}_{2 \rightarrow 2} = gg'F(\theta, \phi) = gg'G\left(\frac{t}{s}, \frac{s}{m^2}, \frac{t}{m^2}, \dots\right). \quad (1.68)$$

函数 F 和 G 的形式依赖于相互作用形式——例如标量型或矢量型相互作用等等。以 $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 为例，设碰撞能量远大于电子和缪子质量（ $\sqrt{s} \gg m_\mu > m_e$ ），散射振幅模方为

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 \propto e^4 \frac{u^2 + t^2}{s^2}. \quad (1.69)$$



我们可通过简单的量纲分析就得到上式，而不需要做严格计算。这个过程是通过一个 s 道传播的虚光子诱导的，因此散射振幅一定反比于 $q^2 = s$ ，也即振幅模方的分母含有 s^2 。又因为振幅模方量纲为零，为了补齐量纲，振幅模方的分子项必定要包含 $[E]^4$ 的物理量。忽略电子和缪子质量时，我们只有 Madelstem 变量。但因为初末态中存在自旋关联，因此分子项中不含有 s 变量（否则振幅模方正比于一个常数，意味着无自旋关联效应）。再考虑到 QED 是宇称守恒的理论，因此 t 和 u 应该同时出现并且具有对称性，这样我们就自然地得到上面的表达式。我们在课程后期会学习螺旋度振幅计算，到时上述振幅公式的物理含义就更加清晰了。

1.4.4 衰变宽度 Γ

自然界中稳定粒子的数目是有限的，绝大多数粒子（基本粒子或复合粒子）都是不稳定的。这些不稳定粒子曾经大量出现在宇宙早期，但时至今日已难觅其踪。我们可以在对撞机中制造这些不稳定粒子，但他们存活一定时间后会衰变成其他粒子。为此我们引入不稳定粒子寿命（ τ ）的概念来描述其存活的平均时间。考虑 N 个全同粒子组成的体系，其粒子数 N 随时间变化的行为遵从指数衰减定律

$$N(t) = N(0)e^{-t/\tau}. \quad (1.70)$$

粒子寿命和粒子衰变宽度（ Γ ）之间满足

$$\Gamma = \frac{1}{\tau}. \quad (1.71)$$

可以看到，宽度越大，粒子寿命越短。宽度大小取决于粒子的质量、衰变产物的相空间和相互作用的性质。一个粒子可以衰变到多种衰变末态，其寿命由总衰变宽度决定。总衰变宽度定义为不同衰变到的分宽度之和，即

$$\Gamma_{\text{total}} = \sum_n \Gamma_{a \rightarrow n} \quad (1.72)$$

粒子 a 衰变到 n 末态的微分衰变分宽度为

$$d\Gamma_{a \rightarrow n} = \frac{1}{2m_a} \delta^4 \left(m_a \rightarrow \sum_i p_i \right) \overline{|\mathcal{M}(a \rightarrow n)|^2} d\Phi_n. \quad (1.73)$$

为了描述粒子 a 衰变到具体某个末态的几率，我们引入分支比（branching ratio），定义如下：

$$\text{Br}(a \rightarrow i) = \frac{\Gamma_{a \rightarrow i}}{\Gamma_{\text{total}}} \quad (1.74)$$

注意：分宽度仅仅是理论计算的物理量，并不是实验测量值。在实验上我们无法直接测量不稳定粒子的分宽度，只能测量总宽度。能够直接测量的物理量是不同衰变道之间的比例关系——即衰变分支比。



在不稳定粒子衰变过程中，两体衰变是最主要的衰变过程。如果两体衰变被禁戒了，那么三体衰变就成为主要衰变道。下面对两体衰变做简单量纲分析。考虑粒子 a 衰变过程 $a \rightarrow 1 + 2$ ，设衰变相互作用顶点是无量纲参数 g 。衰变宽度反比于时间，因此其量纲为 $[E]$ 。从两体衰变微分散射截面

$$\underbrace{d\Gamma_{a \rightarrow 1+2}}_{[E]} = \underbrace{\frac{(2\pi)^4}{2m_a} |\mathcal{M}|^2}_{[E]^{-1}} \underbrace{d\Phi_2}_{[E]^0} \quad (1.75)$$

可知两体衰变振幅的量纲为

$$[\mathcal{M}_{a \rightarrow 1+2}] = [E]^1. \quad (1.76)$$

设末态粒子 1 和 2 为无质量粒子，因此衰变过程中仅有一个带有能量量纲的物理量 m_a ，故而衰变振幅一定正比于 m_a ，即有

$$\mathcal{M}_{a \rightarrow 1+2} \propto g m_a F(\theta). \quad (1.77)$$

对两体相空间积分后可以得到 $a \rightarrow 1 + 2$ 衰变分宽度为

$$\Gamma_{a \rightarrow 1+2} \propto g^2 m_a. \quad (1.78)$$

此定性估算可以帮助我们估计一下两体衰变过程的相互作用强度。例如质量为 1 GeV 的强子，其寿命为 10^{-10} 秒（或宽度 $\Gamma \sim 10^{-14}$ GeV，则从上述定性公式可知

$$g \sim \sqrt{\frac{\Gamma}{m}} \sim 10^{-7}. \quad (1.79)$$

因此这个衰变过程设计的相互作用强度比较小。注意 g 包含了可能的全同因子、耦合顶点、 (2π) 因子和相空间积分因子等。

1.4.5 相空间定性分析

我们经常遇到的散射过程涉及的相空间是 1 体、2 体或 3 体相空间。相空间的大小对于散射过程发生的几率至关重要。相空间越大，则散射发生几率越大。最直观的例子就是停车场泊车。开过车的人都知道，相对于从停车位将车开出而言，泊车入位的难度要高一点。原因在于泊车入位是将车从较大的空间向小空间进行转移，难度由停车位的面积决定，停车位面积越小（相空间约小），则泊车难度越高；反之，从停车位将车开出来，是从小空间向大空间进行转移，因为相空间大，故难度小。下面具体讨论一下相空间的性质。

首先考虑 1 体相空间。我们通常会计算在对撞过程中参数某个不稳定粒子的散射过程 $(a + b \rightarrow 1)$ 的截面，这常被称之为单体产生过程。令 $s = (p_a + p_b)^2$ ，则有单



体相空间为

$$\begin{aligned}
 d\Phi_1 &= \frac{d^3\mathbf{p}_1}{(2\pi)^3 2E} \delta^4(p_a + p_b - p_1) \\
 &= (2\pi)^{-3} d^4 p_1 \delta^+(p_1^2 - m_1^2) \delta^4(p_a + p_b - p_1) \\
 &= (2\pi)^{-3} \delta(s - m_1^2) \\
 &= \frac{1}{s(2\pi)^3} \delta(1 - m_1^2/s)
 \end{aligned} \tag{1.80}$$

其量纲为

$$[d\Phi_1] = [E]^{-2}. \tag{1.81}$$

其次考虑两体相空间。考虑两体散射过程 $a + b \rightarrow 1 + 2$ 。简单起见，考虑末态粒子无质量情况。设 $s = (p_a + p_b)^2$ ，记粒子 1 和粒子 2 的能量为 E_1 和 E_2 ， $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2| = p$ ，则有

$$\begin{aligned}
 \Phi_2 &= \int \delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2) \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \frac{|p_1|^2 d|p_1| d\Omega_1 d^3\mathbf{p}_2}{(2\pi)^6 4E_1 E_2} \\
 &= \int \delta(\sqrt{s} - 2p) \frac{dp d\Omega}{4(2\pi)^6} = \frac{4\pi}{(2\pi)^6 8} = \frac{1}{128\pi^5}.
 \end{aligned} \tag{1.82}$$

我们验证了两体相空间是无量纲的。

最后，我们比较一下无质量粒子的多体相空间。 n 体相空间的一般表达式是

$$\Phi_n = \frac{1}{4(2\pi)^5 (n-1)!(n-2)!} \left(\frac{s}{16\pi^2} \right)^{n-2}. \tag{1.83}$$

n 体和 $n+1$ 体相空间的比值为

$$\frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = \frac{s}{16\pi^2 n(n-1)}. \tag{1.84}$$

这个比值带有量纲，因此没有物理意义。为了比较不同粒子数的相空间大小，通常定义如下的无量纲化的相空间：

$$\Phi'_n = \frac{\Phi_n}{s^{n-2}}, \tag{1.85}$$

它可以帮助我们比较不同粒子数的相空间大小。例如，

$$\frac{\Phi'_3}{\Phi'_2} \sim \frac{1}{316}. \tag{1.86}$$

一般而言，末态粒子每增加 1 个，无量纲化的相空间将减少 2 个数量级。当然除此之外还有耦合常数的压低。故而，末态产生粒子的数目越多，概率就越小。此结论不依赖于具体的散射矩阵元，具有普适性。

最简单的几个相空间体积如下所示：

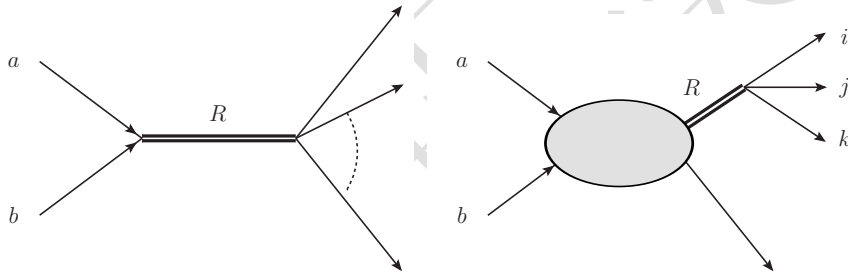
$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \frac{1}{s(2\pi)^3}, & \Phi_2 &= \frac{s}{4(2\pi)^5}, & \frac{\Phi'_2}{\Phi'_1} &= \frac{1}{16\pi^2}, \\
 \Phi_3 &= \frac{s}{32(2\pi)^7}, & \frac{\Phi_3}{\Phi_2} &= \frac{s}{32\pi^2}, & \frac{\Phi'_3}{\Phi'_2} &= \frac{1}{32\pi^2}.
 \end{aligned} \tag{1.87}$$



1.5 共振态和窄宽度近似

下面我们讨论一下粒子物理中极其重要的概念——共振态。除已知的稳定粒子之外，所有的粒子都是以共振态的形式存在于自然界之中。共振是我们耳熟能详的物理现象，在力学和声学中我们已经接触过很多共振现象，例如音叉的固有频率和外界音频相符时发生共振现象。高能物理中我们也遇到相同的情况，当不稳定粒子的动量平方接近该粒子的中心质量时，该粒子的产生几率得到大幅度增加。

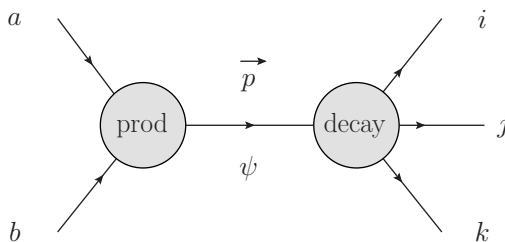
粒子物理中的共振态粒子相关的过程大致可分为两类。一类是形成过程，是指两个或多个粒子形成一个不稳定粒子，例如 Drell-Yan 过程 $a + b \rightarrow R$ 。形成过程的共振态效应表现为 a 粒子和 b 粒子散射过程的散射截面在某个能量处 ($\sim m_R$) 达到局域最大值。另一类是产生过程，通常指多体末态中某个不稳定粒子 R 。设此不稳定粒子衰变成三个粒子 (i, j 和 k)，则 i, j, k 三粒子的不变质量微分分布在 m_R 处具有极大值。下面我们看一下散射截面增大或微分分布出现极大值的原因是什么。



以 $a + b \rightarrow R \rightarrow c + d + \dots$ 过程为例 (R 是共振态粒子)。设 R 粒子的质量为 m_R 和宽度为 Γ_R ，则此过程的散射截面是

$$\sigma(ab \rightarrow R \rightarrow cd \dots) = \frac{4\pi s}{k^2} \left[\frac{(2s_R + 1)c_R}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)C_a C_b} \right] \frac{\Gamma(R \rightarrow ab)\Gamma(R \rightarrow cd)}{(s - m_R^2)^2 + m_R^2 \Gamma_R^2}, \quad (1.88)$$

其中 s_i 是粒子 i 的自旋， C_i 是粒子 i 的色因子， $s = (p_a + p_b)^2$ 是质心系能量平方， k 为入射粒子 a 的 3 动量大小。这里我们对初态入射粒子的自旋和色空间进行求和求平均。前面提及末态数目增加将减少散射几率，但对于共振态粒子而言，更重要的衰变分支比。下面我们看一下在共振态粒子宽度远小于其质量时可以给出什么好的性质。



以费米子共振态 (ψ) 为例，考虑散射过程 $a + b \rightarrow \psi \rightarrow i + j + k$ ，如上图所示。



我们将其分解为 ψ 产生和 ψ 衰变两个过程。其散射振幅为

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(ab \rightarrow ijk) &= \mathcal{M}_{\text{prod}}(\cdots) \frac{i(\not{p} + m_\psi)}{p^2 - m_\psi^2 + im_\psi\Gamma_\psi} \mathcal{M}_{\text{decay}}(\cdots) \\ &= \sum_s \mathcal{M}_{\text{prod}}(\cdots \psi_s) \frac{1}{p^2 - m_\psi^2 + im_\psi\Gamma_\psi} \mathcal{M}_{\text{decay}}(\bar{\psi}_s \cdots). \quad (1.89)\end{aligned}$$

其中我们利用到了中间态费米子求和公式

$$\sum_s \psi(p, m) \bar{\psi}(p, m) = \not{p} + m. \quad (1.90)$$

散射振幅模方是

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \sum_{s, s'} \mathcal{M}_{\text{prod}}^\dagger(\cdots \psi_s) \mathcal{M}_{\text{prod}}(\cdots \psi_{s'}) \frac{1}{(p^2 - m^2)^2 + m^2\Gamma^2} \mathcal{M}_{\text{decay}}^\dagger(\bar{\psi}_s \cdots) \mathcal{M}_{\text{decay}}(\bar{\psi}_{s'} \cdots). \quad (1.91)$$

忽略中间态费米子自旋关联效应（共振态的产生过程和衰变过程之间的自旋关联），上述的散射振幅模方可以近似为

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = |\overline{\mathcal{M}_{\text{prod}}(\cdots \psi)}|^2 \frac{1}{(p^2 - m^2)^2 + m^2\Gamma^2} |\overline{\mathcal{M}_{\text{decay}}(\bar{\psi} \cdots)}|^2. \quad (1.92)$$

下面考虑相空间。相空间只依赖于末态粒子质量和质心系能量，因此我们可以选择不同的分解方式计算相空间。以 $a + b \rightarrow \psi \rightarrow i + j + k$ 为例，末态 3 粒子相空间是

$$d\Phi_3 = \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \frac{d^3\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3 2E_j} \frac{d^3\mathbf{p}_k}{(2\pi)^3 2E_k} \delta^4(p_a + p_b - p_i - p_j - p_k). \quad (1.93)$$

因为 ψ 费米子是不稳定粒子，其贡献主要集中于质壳附近，所以在 3 体相空间表达式中插入如下全等式

$$1 = \int ds \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_3} \delta^4(p - p_i - p_j - p_k), \quad \text{其中 } s = p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2, \quad (1.94)$$

可得

$$\begin{aligned}\int d\Phi_3 &= \iiint \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \frac{d^3\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3 2E_j} \frac{d^3\mathbf{p}_k}{(2\pi)^3 2E_k} \\ &\quad \int ds \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_3} \delta^4(p - p_i - p_j - p_k) \delta^4(p_a + p_b - p_i - p_j - p_k) \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_3} \delta^4(p_a + p_b - p) \frac{dp^2}{2\pi} \int \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i} \frac{d^3\mathbf{p}_j}{(2\pi)^3 2E_j} \frac{d^3\mathbf{p}_k}{(2\pi)^3 2E_k} \delta^4(p - p_i - p_j - p_k) \\ &= \int d\Phi_1(p) \frac{ds}{2\pi} d\Phi_3(p \rightarrow p_i + p_j + p_k). \quad (1.95)\end{aligned}$$

利用

$$\int dp^2 \frac{1}{(p^2 - m^2) + m^2\Gamma^2} \xrightarrow{\Gamma/m \rightarrow 0} \frac{\pi}{m\Gamma} \delta(p^2 - m^2), \quad (1.96)$$



代入到散射截面中可得

$$\begin{aligned}
 \sigma(AB \rightarrow \psi \rightarrow ijk) &= \int |\mathcal{M}|^2 d\Phi_3 \\
 &\doteq \int |\mathcal{M}_{\text{prod}}(AB \rightarrow \psi)|^2 d\Phi_1 \delta(p^2 - m^2) \times \frac{\pi}{2\pi m \Gamma} \int |\mathcal{M}|^2 d\Phi_3 \\
 &= \sigma_{\text{prod}}(AB \rightarrow \psi) \frac{1}{\Gamma} \frac{1}{2m} \int |\mathcal{M}_{\text{decay}}|^2 d\Phi_3 \\
 &= \sigma_{\text{prod}}(AB \rightarrow \psi) \times \frac{\Gamma(\psi \rightarrow ijk)}{\Gamma} \\
 &= \sigma_{\text{prod}}(AB \rightarrow \psi) \times \text{Br}(\psi \rightarrow ijk). \tag{1.97}
 \end{aligned}$$

利用窄宽度近似 ($\Gamma/m \rightarrow 0$), 我们就可将此散射过程分解为“产生”和“衰变”两个过程。

窄宽度近似 ($\Gamma \ll m$) 的物理图像非常清晰。在产生过程中, ψ 粒子的质量提供了特征的能量标度 $Q^2 = m^2$ 。从不确定关系可知, 产生过程的特征时间尺度是 $\tau_{\text{prod}} \sim 1/m$ 。衰变过程的特征时间尺度由 ψ 粒子的衰变宽度决定, $\tau_{\text{decay}} \sim 1/\Gamma$ 。两特征时间的比值是

$$\frac{\tau_{\text{prod}}}{\tau_{\text{decay}}} = \frac{1/m}{1/\Gamma} = \frac{\Gamma}{m}. \tag{1.98}$$

窄宽度近似成立就意味着 $\tau_{\text{prod}} \ll \tau_{\text{decay}}$, 即不稳定粒子 ψ 在很短时间内产生后再经过很长时间后衰变。当忽略散射振幅中自旋关联效应后, 我们可以近似认为产生过程和衰变过程是没有关联的, 反映为产生末态粒子 i, j, k 的事例数仅仅依赖于 ψ 粒子的产生截面和 ψ 粒子的衰变分支比, 与 ψ 粒子衰变宽度 Γ 无关。这可以帮助我们非常快速地估算射过程的截面大小, 如下所示:

$$\sigma(pp \rightarrow X \rightarrow ij) = \sigma(pp \rightarrow X) \times \text{Br}(X \rightarrow ij). \tag{1.99}$$

注意: 对全部相空间积分后, 上述近似才成立。为了压低背景过程, 实验家要施加各种实验判选条件来挑选信号空间敏感的相空间区域, 此时窄宽度近似就有可能失效。

1.6 螺旋度振幅

粒子物理实验大致可以分为两种: 1) 粒子计数实验 (Event Counting), 2) 末态粒子在空间中出现几率分布 (简称为微分分布)。虽然所有实验都是数事例数实验, 但微分分布可以告诉我们具体散射过程对于某个或某几个物理变量的依赖行为, 提供更丰富的信息。散射实验的主要目的就是通过测量末态粒子的几率分布来探测微观世界的相互作用形式和性质。微分分布可以提供中间态不稳定粒子自旋、末态粒子自旋以及初末态粒子之间的相互作用形式等信息。不严格地讲, 只有微分分布才会提供更有用的物理信息。下面我们将粗略地介绍一下螺旋度振幅以及其应用。

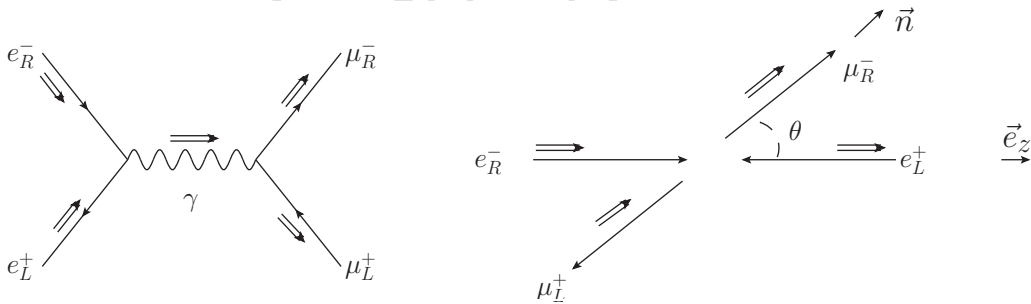


首先看一下我们熟悉的 QED 散射过程 $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+\mu^-$ 。其微分散射截面是

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{cm}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E_{\text{cm}}^2}} \left[\left(1 + \frac{m_\mu^2}{E_{\text{cm}}^2}\right) + \left(1 - \frac{m_\mu^2}{E_{\text{cm}}^2}\right) \cos^2 \theta \right] \\
 &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{cm}}^2} \underbrace{\sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E_{\text{cm}}^2}}}_{\equiv \beta} \left[1 + \cos^2 \theta + \frac{m_\mu^2}{E_{\text{cm}}^2} \sin^2 \theta \right] \\
 &= \frac{\alpha^2}{4E_{\text{cm}}^2} \beta \left[1 + \cos^2 \theta + \frac{m_\mu^2}{E_{\text{cm}}^2} \sin^2 \theta \right] \\
 &\xrightarrow{E_{\text{cm}}^2 \gg m_\mu^2} \frac{\alpha^2}{4E_{\text{cm}}^2} (1 + \cos^2 \theta). \tag{1.100}
 \end{aligned}$$

这个过程是所有量子场论课程必选的例题。我们应该如何理解上式中的角度依赖？这就需要用到螺旋度振幅了。

首先考虑高能极限 ($E_{\text{cm}}^2 \gg m_\mu^2$)，此时电子和缪子均可视为无质量费米子。因为 QED 相互作用是满足手征性守恒的，因此只有左手手征的电子和正电子才能和光子相互作用（注意：我们现在不考虑高量纲算符作用）。但因为正电子是电子的反粒子，因此左手手征的正电子对应于右手螺旋度的正电子。正如下图所示，右手螺旋度的电子和左手螺旋度的正电子发生散射，通过虚光子衰变到一对正反缪子。图中双线箭头表示粒子的自旋方向，约定初态粒子动量指向相互作用顶点，末态粒子动量远离相互作用顶点。设初态正负电子的运动方向沿着 Z 轴，此过程可以视为初态电子和正电子和 $S_Z = \pm 1$ 的光子发生作用，因此电子和正电子构成的集体处于自旋为 1 的态。采用符号 $|S, S_z\rangle$ 表示总自旋 \vec{S}^2 和 S_z 的本征态，则初态正负电子系统可处于态 $|1, \pm 1\rangle_z$ 。图中所示情形是 $|1, +1\rangle$ 态。左手螺旋度电子和右手螺旋度正电子系统则处于 $|1, -1\rangle$ 态。



因为散射过程和方位角无关，我们可以设散射过程发生在 x - z 平面内。令末态缪子的运动方向 $\vec{n} = (\sin \theta, 0, \cos \theta)$ 。现考虑右手螺旋度的缪子 (μ_R^-) 和左手螺旋度的反缪子 (μ_L^+)。沿着 \vec{n} 方向末态缪子对系统的总自旋处于 $|1, +1\rangle_n$ 态。故而， $e^-e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ 散射过程的散射振幅是

$$\mathcal{M}_{e_R^- e_L^+ \mu_R^- \mu_L^+} \sim \langle \psi_{\text{final}} | \psi_{\text{initial}} \rangle \propto_n \langle 1, +1 | 1, +1 \rangle_z. \tag{1.101}$$



末态粒子对的自旋波函数是 $S_n \equiv \vec{n} \cdot \vec{S}$ 算符的本征函数, 本征值为 $+1$, 即

$$S_n |1, +1\rangle_n = (\vec{n} \cdot \vec{S}) |\psi\rangle = +1 |1, +1\rangle_n. \quad (1.102)$$

将 $|1, +1\rangle_n$ 用 \hat{S}_z 本征值为 ± 1 和 0 的完备集展开,

$$|1, +1\rangle_n = \alpha |1, 1\rangle + \beta |1, 0\rangle + \gamma |1, -1\rangle, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1. \quad (1.103)$$

故而, 本征方程1.102是

$$(\sin \theta \hat{S}_x + \cos \theta \hat{S}_z)(\alpha |1, 1\rangle + \beta |1, 0\rangle + \gamma |1, -1\rangle) = \alpha |1, 1\rangle + \beta |1, 0\rangle + \gamma |1, -1\rangle. \quad (1.104)$$

再利用

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2}(\hat{S}_+ + \hat{S}_-) \quad (1.105)$$

和升降算符性质

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ |1, 1\rangle &= 0, & \hat{S}_+ |1, 0\rangle &= \sqrt{2} |1, 1\rangle, \\ \hat{S}_+ |1, -1\rangle &= \sqrt{2} |1, 0\rangle, & \hat{S}_- |1, 1\rangle &= \sqrt{2} |1, 0\rangle, \\ \hat{S}_- |1, 0\rangle &= \sqrt{2} |1, -1\rangle, & \hat{S}_- |1, -1\rangle &= 0, \end{aligned} \quad (1.106)$$

我们得到

$$\begin{aligned} \hat{S}_x |1, 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle, \\ \hat{S}_x |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1\rangle + |1, -1\rangle), \\ \hat{S}_x |1, -1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle. \end{aligned} \quad (1.107)$$

本征方程就可写作为

$$\sin \theta \left[\frac{\alpha}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |1, -1\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{2}} |1, 1\rangle + \frac{\gamma}{\sqrt{2}} |1, 0\rangle \right] = \alpha |1, 1\rangle + \beta |1, 0\rangle + \gamma |1, -1\rangle, \quad (1.108)$$

从而可得

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta), \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \quad \gamma = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta), \quad (1.109)$$

也即

$$|1, +1\rangle_n = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) |1, +1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta |1, 0\rangle + \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) |1, -1\rangle. \quad (1.110)$$

这就是简单的量子表象变换而已。末态粒子对的自旋波函数是力学量完备集 $\{\vec{S}^2, S_n\}$ 的本征态, 入射初态粒子对的自旋波函数是力学量完全集 $\{\vec{S}^2, S_z\}$ 的本征态。上式仅仅是将末态粒子自旋波函数按照初态粒子对总自旋 $S = 1$ 的完备本征态函数进行展开。展开所得的投影系数就是此散射过程的空间波函数了。



我们关心的散射过程 $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+$ 的螺旋度振幅是

$$\mathcal{M}_{e_R^- e_L^+ \mu_R^- \mu_L^+} \propto_n \langle 1, +1 | 1, +1 \rangle_z = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta), \quad (1.111)$$

螺旋度振幅模方是

$$\left| \mathcal{M}_{e_R^- e_L^+ \mu_R^- \mu_L^+} \right|^2 \propto \frac{1}{4}(1 + \cos \theta)^2. \quad (1.112)$$

类似地，我们可以得到 $e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+$ 的螺旋度振幅如下：

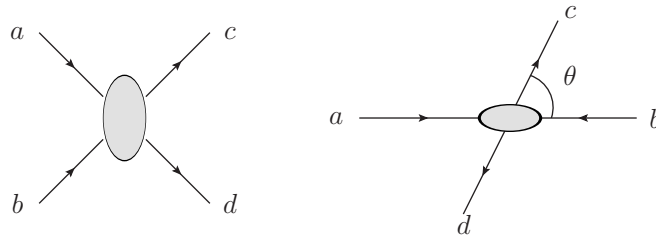
$$\mathcal{M}_{e_L^- e_R^+ \mu_R^- \mu_L^+} \propto_n \langle 1, +1 | 1, -1 \rangle_z = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta). \quad (1.113)$$

如果初态的正负电子没有极化，我们需要对各种可能的螺旋度振幅模方求和。规范相互作用要求此过程仅有 4 种螺旋度组合。因为不同螺旋度的振幅之间无干涉效应，求和的振幅模方就是

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}} &= \frac{1}{4} \left(\left| \mathcal{M}_{e_R^- e_L^+ \mu_R^- \mu_L^+} \right|^2 + \left| \mathcal{M}_{e_L^- e_R^+ \mu_R^- \mu_L^+} \right|^2 + \left| \mathcal{M}_{e_R^- e_L^+ \mu_L^- \mu_R^+} \right|^2 + \left| \mathcal{M}_{e_L^- e_R^+ \mu_L^- \mu_R^+} \right|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4s} e^4 \left[2(1 + \cos \theta)^2 + 2(1 - \cos \theta)^2 \right] \\ &= \frac{e^4}{s} (1 + \cos^2 \theta) \end{aligned} \quad (1.114)$$

Jacob-Wick 公式 ($2 \rightarrow 2$ 过程)

下面我们介绍更一般性的 $a + b \rightarrow c + d$ 两体散射过程的螺旋度振幅公式。我们采用螺旋度平面波和总角动量态来分别描述入射和散射的两粒子系统。这样做的好处是：1) 标记量子态的量子数都是物理观测量；2) 平面波和角动量本征态之间的转换是非常直接、便捷的；3) 螺旋度在 C 、 P 和 T 变换下有好的定义；4) 所得公式在 $m = 0$ 或 $m \neq 0$ 时都工作。



考虑如上图所示的两体散射 $a + b \rightarrow c + d$ 。初态入射粒子 a 和 b 的波函数是

$$|\vec{p}_i, \lambda_a, \lambda_b\rangle = \sum_J |p_i, J, M = \lambda_a - \lambda_b, \lambda_a, \lambda_b\rangle, \quad (1.115)$$

而末态波函数是

$$|\vec{p}_f, \lambda_c, \lambda_d\rangle = \sum_{JM} |p_f, J, M, \lambda_c, \lambda_d\rangle D^J(\phi, \theta, 0)_{\lambda_c - \lambda_d}^M, \quad (1.116)$$



其中 λ_i 表示粒子 i 的螺旋度, J 是总角动量 \hat{J} 量子数, M 是 \hat{J}_z 的本征值。在质心系中, 应用 Wigner-Eckart 定理可以得到如下的 S 矩阵元:

$$\langle E'J'M'\lambda_c\lambda_d|S|EJM\lambda_a\lambda_b\rangle = \delta(E-E')\delta_{JJ'}\delta_{MM'}\langle\lambda_c\lambda_d||S^J(E)||\lambda_a\lambda_b\rangle. \quad (1.117)$$

微分散射截面是

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = |f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(\theta,\phi)|^2, \quad (1.118)$$

其中

$$f_{\lambda_c\lambda_d,\lambda_a\lambda_b}(\theta,\phi) = \frac{1}{P} \sum_J (2J+1) \langle\lambda_c\lambda_d||T^J(E)||\lambda_a\lambda_b\rangle e^{i(\lambda-\mu)\phi} d_{\lambda\mu}^J(\theta) \\ \lambda = \lambda_a - \lambda_b, \quad \mu = \lambda_c - \lambda_d. \quad (1.119)$$

这里, P 代表相对动量, $P \equiv \frac{1}{2}|\vec{p}_a - \vec{p}_b|$, 小 d -函数的定义是

$$d_{M'M}^J(\theta) \equiv \langle JM'|e^{-iJ_y\theta}|JM\rangle. \quad (1.120)$$

此处我们选择反应平面是 x - z 平面, 旋转轴是 y 轴的原因在于所得的振幅都是实函数。选择 y - z 平面也是可以的, 不改变物理结果。

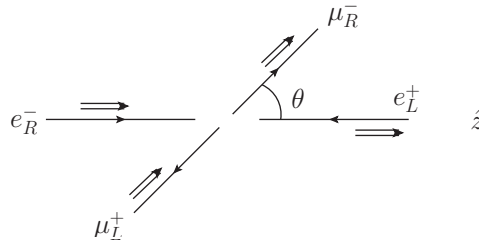
示例 1: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ 或 $H \rightarrow \gamma\gamma$

因为 π 介子和希格斯粒子 H 自旋为零 ($J=0$), 故而散射振幅为

$$\mathcal{M} \propto d_{00}^0(\theta) = 1. \quad (1.121)$$

示例 2: $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+$

散射 $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+$ 是通过虚光子 γ 进行。因为中间态光子自旋为 1, 因此入射初态和散射末态的总自旋均为 1。根据初末态粒子的螺旋度, 我们画出散射示意图如下:



其中双线箭头表示粒子自旋方向。我们选取入射电子运动方向为 z 轴。初态电子和正电子的螺旋度分别是

$$\lambda_a = \lambda_{e_R^-} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_b = \lambda_{e_L^+} = \frac{1}{2}, \quad (1.122)$$

而末态正负缪子螺旋度则是

$$\lambda_c = \lambda_{\mu_R^-} = \frac{1}{2}, \quad \lambda_d = \lambda_{\mu_L^+} = -\frac{1}{2}. \quad (1.123)$$



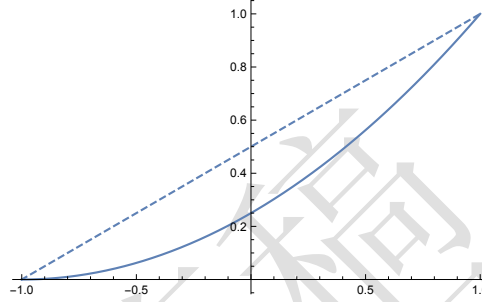
因此,

$$\lambda_a - \lambda_b = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = +1, \quad \lambda_c - \lambda_d = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = +1. \quad (1.124)$$

由 Jacob-Wick 公式可知, 此螺旋度振幅是

$$\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+) \propto d_{1,1}^1(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2}. \quad (1.125)$$

下图显示归一化的散射振幅 (虚线) 和微分散射截面 $d\sigma/d\Omega$ (实线)。



这表示出射 μ^- 主要是沿着入射电子方向。

示例 3: $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+$

示意图如右图所示。此时有

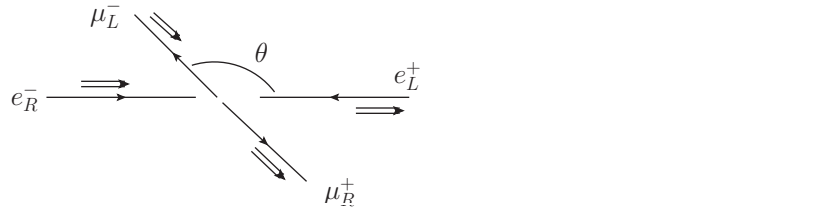
$$\lambda_a - \lambda_b = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = +1,$$

$$\lambda_c - \lambda_d = -\frac{1}{2} - \left(+\frac{1}{2}\right) = -1.$$

故而

$$\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+) \propto d_{1,-1}^1(\theta) = \frac{1 - \cos \theta}{2}.$$

此时自旋关联效应的图形应该如下图所示



此时出射 μ^- 主要是沿着正电子的入射方向 ($-\hat{z}$)。

示例 4: 质量效应

下面回到前面提及的非极化公式

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_{\text{cm}}^2} \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E_{\text{cm}}^2}} \left[1 + \cos^2 \theta + \frac{m_\mu^2}{E_{\text{cm}}^2} \sin^2 \theta \right]. \quad (1.126)$$

问: 其中 $\sin^2 \theta$ 项是从何而来?



首先, $\sin\theta$ 分布和 $(1 \pm \cos\theta)/2$ 分布是正交的, 因此我们猜测它起源于不同的螺旋度振幅。下面考虑 $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_R^+$ 散射。

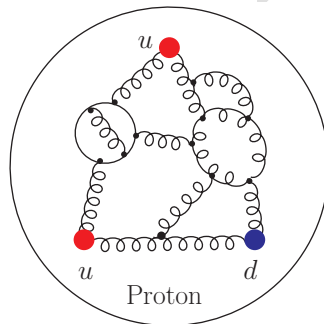
未完待续。。。。



1.7 强子对撞机物理

虽然电子对撞机的实验背景非常干净，但因为电子辐射非常强烈，因此电子对撞机的碰撞能量是受限的。质子质量近乎是电子质量的 2000 倍，因此在相同的加速环中质子辐射要远小于电子，从而可以积累很高的碰撞能量。质子对撞机的缺点也是非常明显的，其上的强子背景非常“脏”，不利于信号提取。

我们关心的硬散射过程不是发生在质子和质子之间，而是发生在质子内部的夸克或胶子之间，因此我们需要 ****。



1.8 Drell-Yan 散射过程

不严格地将，粒子物理发展史就是一部 Drell-Yan 过程的发展史。虽然实验探测技术得到了长足发展，但寻找新粒子的最有效的方法仍然是通过共振态。这正是实验检验超对称模型的困难之处，因为超对称伴子要成对产生，之后会进一步衰变到不可见粒子（暗物质候选者），从而导致无法重构共振态。下面介绍一下各种 Drell-Yan 过程。

1.8.1 W 玻色子物理

1.8.2 Z 玻色子物理

1.8.3 粲夸克和底夸克物理

1.8.4 顶夸克物理

1.8.5 希格斯物理

