现代散射振幅的在壳纲领-在壳递推关系

冯波

浙江大学物理系，北京计算科学研究中心

2023 年 8 月 4 日

Contents

这一部分，我们讨论，如何建立树图散射振幅的在壳递推关系，特别是对规范粒子。

第 1 节：色次序

[Lance Dixon, hep-ph/9601359]

涉及规范场散射振幅的计算，是一个非常重要，但也非常复杂的部分。其复杂性的一个来源就是动力学和色指标的纠缠：费曼规则中即有动力学因子，也有包含色指标的耦合常数。历史告诉我们一个非常重要的经验：分离不同物理起源的纠缠，会极大的简化计算，同时能发现被纠缠所隐藏的非平庸物理信息！

此处，这种分离的手段就是色分解!!!

考虑 $SU(N_c)$ 伴随表示的胶子，其基础表示生成元是无迹、厄米的 $N_c \times N_c$ 矩阵，$(T^a)_i^{\bar{j}}$, $i, \bar{j} = 1, \ldots, N_c$。

- 归一化的选择是 $\mathrm{Tr}(T^a T^b) = \delta_{ab}$
- 因此费曼规则中出现的结构常数可以表示为

$$f^{abc} = \frac{-i}{\sqrt{2}} \mathrm{Tr}(T^a[T^b, T^c]), \tag{1}$$

- 费曼规则中，会出现对中间态的色指标求和，此时有等式

$$\sum_{a=1}^{N_c^2-1}(T^a)_{i_1}^{\bar{j}_1}(T^a)_{i_2}^{\bar{j}_2}=\delta_{i_1}^{\bar{j}_2}\delta_{i_2}^{\bar{j}_1}-\frac{1}{N_c}\delta_{i_1}^{\bar{j}_1}\delta_{i_2}^{\bar{j}_2} \tag{2}$$

或者如下形式

$$\sum_a \mathrm{Tr}(XT^a)\mathrm{Tr}(T^aY)=\mathrm{Tr}(XY)-\frac{1}{N_c}\mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(Y) \tag{3}$$

$$\sum_a \mathrm{Tr}(XT^aYT^a)=\mathrm{Tr}(X)\mathrm{Tr}(Y)-\frac{1}{N_c}\mathrm{Tr}(XY)\,. \tag{4}$$

利用 (1)，或者 (3)(4) 可以看到所以胶子树图散射散射可以分解为如下的形式：

$$\mathcal{A}_{\mathrm{tot}}(\{k_i, \epsilon_i, a_i\}) = \sum_{\sigma\in S_n/Z_n} \mathrm{Tr}(T^{a_{\sigma(1)}} T^{a_{\sigma(2)}} \dots T^{a_{\sigma(n)}}) \times A_n^{\mathrm{tree}}(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)) \tag{5}$$

此即胶子的 色分解，而右边的量是 色次序下的胶子散射振幅

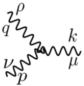
例：四点振幅有如下的 s 道费曼图：

$$
\begin{aligned}
& -2\sum_e f^{a_1 a_2 e} f^{e a_3 a_4} \\
= & \sum_e \mathrm{Tr}(T^{a_1}[T^{a_2}, T^e])\mathrm{Tr}(T^e[T^{a_3}, T^{a_4}]) \\
= & \sum_e (\mathrm{Tr}(T^{a_1}T^{a_2}T^e) - \mathrm{Tr}(T^{a_2}T^{a_1}T^e)) \\
& \times(\mathrm{Tr}(T^e T^{a_3}T^{a_4}) - \mathrm{Tr}(T^e T^{a_4}T^{a_3})) \\
= & \left[\mathrm{Tr}(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4}) - \frac{1}{N_c}\mathrm{Tr}(T^{a_1}T^{a_2})\mathrm{Tr}(T^{a_3}T^{a_4})\right]
\end{aligned}
$$

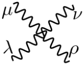
$$
\begin{aligned}
- & \left[\mathrm{Tr}(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_4}T^{a_3}) - \frac{1}{N_c}\mathrm{Tr}(T^{a_1}T^{a_2})\mathrm{Tr}(T^{a_4}T^{a_3})\right] \\
- & \left[\mathrm{Tr}(T^{a_2}T^{a_1}T^{a_3}T^{a_4}) - \frac{1}{N_c}\mathrm{Tr}(T^{a_2}T^{a_1})\mathrm{Tr}(T^{a_3}T^{a_4})\right] \\
+ & \left[\mathrm{Tr}(T^{a_2}T^{a_1}T^{a_4}T^{a_3}) - \frac{1}{N_c}\mathrm{Tr}(T^{a_2}T^{a_1})\mathrm{Tr}(T^{a_4}T^{a_3})\right] \\
= & \ \mathrm{Tr}(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4}) - \mathrm{Tr}(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_4}T^{a_3}) \\
- & \ \mathrm{Tr}(T^{a_2}T^{a_1}T^{a_3}T^{a_4}) + \mathrm{Tr}(T^{a_2}T^{a_1}T^{a_4}T^{a_3})
\end{aligned}
$$

请特别注意 $\frac{1}{N_c}$ 项的消失！ 也请思考其它群表示下如何分解？

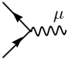
色次序的散射振幅有简单的费曼规则和费曼图：



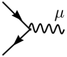
$$= \frac{i}{\sqrt{2}}\Big(\eta_{\nu\rho}(p-q)_\mu + \eta_{\rho\mu}(q-k)_\nu + \eta_{\mu\nu}(k-p)_\rho\Big)$$



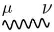
$$= i\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda} - \frac{i}{2}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\lambda} + \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho})$$



$$= \frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_\mu$$



$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}\gamma_\mu$$



$$= -i\frac{\eta_{\mu\nu}}{p^2}$$

$$= \frac{i}{\not{p}}$$

Figure 5: Color-ordered Feynman rules, in Lorentz-Feynman gauge, omitting ghosts. Straight lines represent fermions, wavy lines gluons. All momenta are taken outgoing.

上述的色分解有如下优点：

- (1) 色指标的依赖显示化，当从 $SU(N_1)$ 规范群变到 $SU(N_2)$ 规范群时，只改变色的求迹部分. 动力学的 A_n^{tree} 不变.
- (2) 色次序下振幅是循环不变的，即 $A_n(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = A_n(\sigma_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1})$
- (3) 同时其解析结构也相对简单：所允许的奇点一定是“色次序下动量的和的平方”。

更重要的，它们之间满足如下四个非平庸关系

- *Color-order reversed identity*

$$A_n(1,2,...,n-1,n)=(-)^n A_n(n,n-1,...,2,1), \tag{6}$$

- *$U(1)$-decoupling identity*

$$\sum_{\sigma\ \mathrm{cyclic}} A(1,\sigma(2),...,\sigma(n))=0, \tag{7}$$

- *Kleiss-Kuijf relations* [R. Kleiss and H. Kuijf, (1989)], [V. Del Duca, L. J. Dixon and F. Maltoni, (2000)].

$$A_n(1,\{\alpha\},n,\{\beta\}) = (-1)^{n_\beta} \sum_{\sigma\in OP(\{\alpha\},\{\beta^T\})} A_n(1,\sigma,n)\ . \tag{8}$$

The order-preserved (OP) sum is over all permutations of the set $\alpha\bigcup\beta^T$, where relative orderings in α and β^T (the reversed ordering of set β) are preserved. n_β is the number of β elements. (注：该结构其实是 Shuffle 代数结构！)

$$\begin{aligned} A(1,2,3,6,4,5) &= A(1,2,3,5,4,6)+A(1,2,5,3,4,6)\\ &+A(1,2,5,4,3,6)+A(1,5,4,2,3,6)+A(1,5,2,4,3,6)\\ &+A(1,5,2,3,4,6)\ . \end{aligned}\tag{9}$$

- *BCJ Relations* (2008):[Bern, Carrasco, Johansson, 2008] 其中的 fundamental BCJ relations 比较规律

$$
\begin{aligned}
0 &= I_4 = A(2,4,3,1)(s_{43}+s_{41}) + A(2,3,4,1)s_{41} \\
0 &= I_5 = A(2,4,3,5,1)(s_{43}+s_{45}+s_{41}) \\
&\quad + A(2,3,4,5,1)(s_{45}+s_{41}) + A(2,3,5,4,1)s_{41} \\
0 &= I_6 = A(2,4,3,5,6,1)(s_{43}+s_{45}+s_{46}+s_{41}) \\
&\quad + A(2,3,4,5,6,1)(s_{45}+s_{46}+s_{41}) \\
&\quad + A(2,3,5,4,6,1)(s_{46}+s_{41}) \\
&\quad + A(2,3,5,6,4,1)s_{41}
\end{aligned} \tag{10}
$$

第 2 节：树图在壳递推关系

[Ruth Britto, Freddy Cachazo, Bo Feng, hep-th/0412308]

[Ruth Britto, Freddy Cachazo, Bo Feng, Edward Witten, hep-th/0501052]

[Bo Feng, Mingxing Luo, 1111.5759]

第 2.1 节：树图在壳递推关系的推导

下面我们介绍树图的在壳递推关系。在壳纲领的研究策略的第一点就是 分析树图的解析结构：

- 它是分母只含传播子乘积的有理函数！
- 当外线动量的特殊取值使得某个内线传播子在壳，我们就探测到“奇点结构”
- 物理的自洽性 (或者幺正性)，要求奇点处有前面“自举方法”所介绍的“因子化形式”的存在！

$$\lim_{s\to 0} sA_n = A_m \times A_{n+2-m} \tag{11}$$

在壳纲领的研究策略的第二点就是 设计探测解析结构的好方案： BCFW 形变

- 挑选任意一对动量，p_i, p_j 进行如下满足 动量守恒的形变

$$p_i(z) = p_i + zq, \qquad p_j(z) = p_j - zq, \tag{12}$$

- 要求形变后对 任意形变参数满足在壳条件：

$$p_i(z)^2 = p_i^2 + z^2 q^2 + 2z p_i \cdot q = p_i^2 \tag{13}$$

得到如下约束：

$$q^2 = q \cdot p_i = q \cdot p_j = 0 \ . \tag{14}$$

- 对四维及其上时空维数，上述约束有解。
- 对四维无质量粒子，在旋量表示下，一个解可以直接写出

$$q = \lambda_i \widetilde{\lambda}_j \tag{15}$$

或者对应的具体形变是

$$\begin{aligned} \lambda_i \to \lambda_i, \quad \widetilde{\lambda}_i \to \widetilde{\lambda}_i + z\widetilde{\lambda}_j, \\ \widetilde{\lambda}_j \to \widetilde{\lambda}_j, \quad \lambda_j \to \lambda_j - z\lambda_i \ . \end{aligned} \tag{16}$$

为了后续应用的方便，我们称 (16) 为 $[i|j\rangle$ 形变。当然，还存在另一个解 $q = \lambda_j \widetilde{\lambda}_i$!!

现在研究形变后的树图振幅 $A(z)$:

- 传播子分为两类。一类是同时含 p_i, p_j 动量，或者不含它们。此时该传播子不依赖 z。一类是只含一个，比如 p_i，此时有

$$\frac{1}{(p+p_i(z))^2} = \frac{1}{(p+p_i)^2 + z(2q\cdot(p+p_i))} \tag{17}$$

- 因此，我们看到，$A(z)$ 是 单复变量的只含单奇点的函数。数学理论告诉我们：知道该函数所有的单奇点的位置，以及相应的留数，我们就可以完全确定函数 $A(z)$

- 考虑如下的围道积分：

$$I = \oint \frac{dz}{z} A(z) \tag{18}$$

这里围道是半径足够大，包含所有奇点的圆

- 该围道积分有两种方式。一种是把围道看成围绕无穷远点的围道积分，因为我们得到所谓的“边界贡献 B”，即无穷远点的留数！

- 另一种方式是有限半径内奇点的围道积分。奇点有两类：第一类是来自 $\frac{1}{z}$ 因子，其留数就是 $A(z=0)$，这是我们希望计算的树图在壳散射振幅。
- 第二类奇点就是 $A(z)$ 中形变引入的。在某个传播子确定的奇点处，我们有

$$\begin{aligned} A(z) &= \widetilde{A}(z)\frac{1}{(P_\alpha+p_i)^2+z(2q\cdot(P_\alpha+p_i))} \\ &= \frac{\widetilde{A}(z)}{(2q\cdot(P_\alpha+p_i))}\frac{1}{z-z_\alpha} \end{aligned} \tag{19}$$

其中奇点位置为 $z_\alpha=-\frac{(P_\alpha+p_i)^2}{(2q\cdot(P_\alpha+p_i))}$

- 现在计算 $z = z_\alpha$ 处的留数 $\left(\frac{A(z)}{z}\right)_{z_\alpha}$。首先，利用“因子化条件”，有

$$\widetilde{A}(z)_{z_\alpha} = \sum_{h=\pm} A_L(p_i(z_\alpha), -K^h(z_\alpha))A_R(P^{-h}(z_\alpha), p_j(z_\alpha)) \tag{20}$$

因此

$$\begin{aligned}\left(\frac{A(z)}{z}\right)_{z_\alpha} &= \frac{1}{-\frac{(P_\alpha+p_i)^2}{(2q\cdot(P_\alpha+p_i))}} \frac{1}{(2q\cdot(P_\alpha+p_i))} \\ &\sum_{h=\pm} A_L(p_i(z_\alpha), P^h(z_\alpha))A_R(-P^{-h}(z_\alpha), p_j(z_\alpha)) \\ = \quad & -\sum_{h=\pm} \frac{A_L(p_i(z_\alpha), -K^h(z_\alpha))A_R(K^{-h}(z_\alpha), p_j(z_\alpha))}{K^2} \end{aligned} \tag{21}$$

把两种计算等同起来，就得到

$$A(z=0)=B+\sum_{z_\alpha}\sum_{h=\pm}\frac{A_L(p_i(z_\alpha),-K^h(z_\alpha))A_R(K^{-h}(z_\alpha),p_j(z_\alpha))}{K^2} \quad (22)$$

该表达式有如下的 BCFW 展开图。请注意图个数的增长是线性的，而费曼图的增长是超指数的。从这一个侧面，可以看到计算效率的巨大提升！

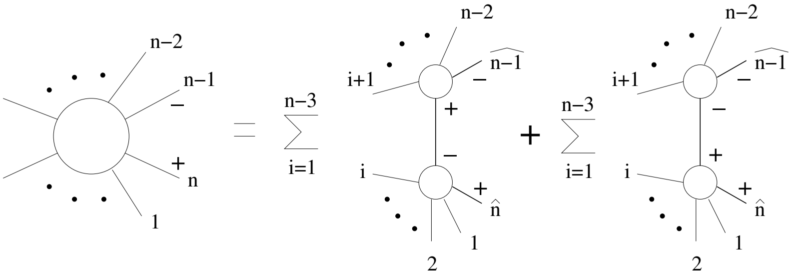


图: BCFW 图

第 2.2 节：边界贡献的讨论

现在我们讨论递推关系中的一个非常关键的部分：边界贡献！

- 边界贡献来自于形变参数 $z \to \infty$ 时的行为。假设其洛朗展开为

$$A(z \to \infty) \sim \sum_{i=k}^{1} \frac{c_k}{z^k} + b_0 + \sum_{j=1}^{n} b_j z^j \tag{23}$$

令 $z = 1/t$，可以发现

$$\oint_{z=\infty} \frac{dz}{z} A(z) \sim \oint_{t=0} \frac{dt}{t} A(t) \tag{24}$$

所以非零边界贡献来自上面展开的 b_0 项。

- 由此我们得到一个重要结论： 当 $A(z \to \infty) \to 0$ 时，边界贡献为零
  当然这是一个比较强的充分条件。
- 对一般理论形变下边界行为的讨论，一个好的理论框架是“背景场”方法。这是一个非常重要和威力巨大的方法。它提供了非常好的物理图像！

[N. Arkani-Hamed and J. Kaplan, arXiv:0801.2385

但是对规范场，我们可以有非常直接的分析：

- 首先，规范场的费曼图只有 3 点振幅分子含动量，会贡献潜在的 z。
- 最危险的费曼图是只含 3 点顶角。对 n 点振幅，有 $(n-2)$ 个三点顶角，$(n-3)$ 个传播子，因此有大 z 行为 $\frac{z^{n-2}}{z^{n-3}} \sim z$。
- 但是回顾极化矢量的表达

$$\epsilon^{+}_{\nu}(k|\mu) = \frac{\langle\mu|\gamma_\nu|k]}{\sqrt{2}\langle\mu|k\rangle}, \qquad \epsilon^{-}_{\nu}(k|\mu) = \frac{[\mu|\gamma_\nu|k\rangle}{\sqrt{2}[\mu|k]}, \tag{25}$$

但是对规范场，我们可以有非常直接的分析：

- 从表达式 (25) 可以看到：如果我们对 j^+ 的形变是 $\lambda_j \to \lambda_j - z\lambda_i$，对 i^- 的形变是 $\widetilde{\lambda}_i \to \widetilde{\lambda}_i + z\widetilde{\lambda}_j$，那么每个分母有一个 z 出现，从而极化矢量贡献 $\frac{1}{z}$。合在一起，就可以看到

$$A(z) \to \frac{1}{z} \tag{26}$$

- 由于非零的规范振幅至少含一个 $+$ 螺旋度和一个 $-$ 螺旋度，我们总可以找到使边界贡献为零的形变！

其实，规范场形变下的边界行为可以从 MHV 振幅的表达式看到，其一般规律是

- 对螺旋度 $(i,j)=(-,-)/(+,+)/(-,+)$，形变 $[i|j\rangle$ 的边界行为是 $A(z)\to\frac{1}{z}$，当 i,j 相邻，或者 $A(z)\to\frac{1}{z^2}$，当 i,j 不相邻。对衰变更快的情况，有“Bonus”关系！
- 对螺旋度 $(i,j)=(+,-)$，形变 $[i|j\rangle$ 的边界行为是 $A(z)\to z^2$，当 i,j 相邻，或者 $A(z)\to z^3$，当 i,j 不相邻
- 在“背景场”分析方法中，可以看到这个边界行为是“规范不变性”的后果！

在壳递推关系的应用中，人们希望避免边界项的出现，为此可以有如下的方案：

- 多个粒子的形变，比如

$$\lambda_i \to \lambda_i + z c_i \eta, \quad \sum_i c_i \widetilde{\lambda}_i = 0 \tag{27}$$

或者一部分做如上形变，一部分做对应的 $\widetilde{\lambda}_j$ 的形变。多线形变下，传播子可以成为 $\frac{1}{z^2}$ 的形式。研究表明，对所有**可重整的理论**，存在多线形变，使边界贡献为零。

- 对很多有效理论 (Effective Field Theory, EFT)，有动量出现在相互作用顶角上，因此边界贡献不可避免。但是这类理论有很好的红外行为，即

$$\lim_{p\to 0} A(p) \sim p^{\sigma} \tag{28}$$

此时我们可以设计 “标度形变” 来充分利用已知的红外行为信息。 [C. Cheung, K. Kampf, J. Novotny, C.-H. Shen and J. Trnka, 1509.03309]

$$p_i \to p_i(1 - z a_i), \quad \sum_i^n a_i p_i = 0 \tag{29}$$

- 利用红外行为，我们有

$$\lim_{z\to 1/a_i} A(z) \propto (z - 1/a_i)^\sigma \tag{30}$$

因此，我们可以引入

$$F(z) = \prod_i^n (1 - a_i z)^\sigma \tag{31}$$

并考虑如下的围道积分

$$A(z=0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{z=0} dz\, \frac{A(z)}{zF(z)} \tag{32}$$

- 由于引入 $F(z)$，它有效压低 z 在分子带来的影响，从而使边界贡献为零。
- 虽然看起来 $F(z)$ 引入了额外的“奇点”，但是由于 $A(z)$ 的红外行为，这些奇点的贡献完全被消除。
- 综合起来，就得到

$$A(z=0) = -\sum_I \operatorname*{Res}_{z=z_I}\left[\frac{A(z)}{zF(z)}\right] \tag{33}$$

第 3 节：在壳递推关系的简单应用

第一个简单应用是证明 MHV 振幅公式

$$
\begin{aligned}
&A_n(1^+, 2^+, \ldots, i^-, \ldots, j^-, \ldots, n^+) \\
= \quad &\frac{\langle i|j\rangle^4}{\langle 1|2\rangle \langle 2|3\rangle \ldots \langle n-1|n\rangle \langle n|1\rangle}
\end{aligned} \tag{34}
$$

- 上面我们知道，形变 $[i|j\rangle$ 使边界贡献为零。
- 现在考虑可能贡献的有限奇点。由于 i, j 的形变，可能的贡献是 i, j 分别位于左右两边，即

$$
\sum_{h=\pm} \frac{A_L(\ldots, p_i(z_\alpha), \ldots, -K^h(z_\alpha))A_R(K^{-h}(z_\alpha), \ldots, p_j(z_\alpha), \ldots)}{K^2} \tag{35}
$$

- 由于所有其它粒子都是 $+$ 螺旋度，我们知道对 $n \geq 4$ 的情况，至少同时有两个 $+$ 螺旋度，和两个 $-$ 螺旋度的存在，才不为零。因此上面几乎所有的道贡献为零，除了 A_L 为三点振幅，或者 A_R 为三点振幅。
- 更重要的是，为了三点振幅的另一边非零，该三点振幅的螺旋度一定是 $(+,-,+)$，即 $\overline{MHV}$ 类型。动力学要求三条外线动量的 λ 是正比的，而能达到这个目的的只有通过如下形变：
$\lambda_j(z) = \lambda_j + z\lambda_i$

所以在壳递推关系告诉我们只有如下两项给出非零贡献

$$
\begin{aligned}
& A_R(-\widehat{K}^+, \widehat{j}^-, (j+1)^+) \frac{1}{(p_j + p_{j+1})^2} \\
& A_L((j+2)^+, \ldots, \widehat{i}^-, \ldots, (j-1)^+, \widehat{K}^-) \\
+ \quad & A_R(-\widehat{K}^+, (j-1)^+, \widehat{j}^-) \frac{1}{(p_j + p_{j-1})^2} \\
& A_L((j+1)^+, \ldots, \widehat{i}^-, \ldots, (j-2)^+, \widehat{K}^-) \qquad (36)
\end{aligned}
$$

下面我们给出详细的计算：

- $(p_j(z)+p_{j+1})^2 = \langle j+1|j+zi\rangle\,[j|j+1] = 0$ 给出奇点位置

$$z = -\frac{\langle j+1|j\rangle}{\langle j+1|i\rangle} \tag{37}$$

从而

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{j}\right\rangle &= |j\rangle - \frac{\langle j+1|j\rangle}{\langle j+1|i\rangle}|i\rangle = \frac{|j+1\rangle\,\langle j|i\rangle}{\langle j+1|i\rangle} \\
\widehat{K} &= \left|\widehat{j}\right\rangle |j] + |j+1\rangle\,|j+1] \\
&= |j+1\rangle\left(|j]\,\frac{\langle j|i\rangle}{\langle j+1|i\rangle} + |j+1]\right)
\end{aligned} \tag{38}$$

$$
\begin{aligned}
A_R(-\widehat{K}^+, \widehat{j}^-, (j+1)^+) &= (-)\frac{\left[j+1|\widehat{-K}\right]^3}{\left[\widehat{-K}|\widehat{j}\right]\left[\widehat{j}|j+1\right]} \\
&= (-)\frac{\left(-[j+1|j]\,\frac{\langle j|i\rangle}{\langle j+1|i\rangle}\right)^3}{-[j+1|j]\,[j|j+1]} \\
&= (-)(-)\,[j+1|j]\left(\frac{\langle j|i\rangle}{\langle j+1|i\rangle}\right)^3 \qquad (39)
\end{aligned}
$$

注意下面 convention:

$$
|-K\rangle = |K\rangle\,, \qquad |-K] = -\,|K] \qquad (40)
$$

这里给一个非常重要的细节解释：在文献中，有两类旋量的内积定义，即 QCD-convention 和 Twistor-convention。它们的差别可以表示为

$$[\alpha|\beta]_{QCD} = -[\alpha|\beta]_{twistor} \tag{41}$$

比如

$$2p_1 \cdot p_2 = \langle p_1|p_2\rangle [p_2|p_1]_{QCD} = \langle p_1|p_2\rangle [p_1|p_2]_{twistor} \tag{42}$$

因此我们熟悉的 3 点 $\overline{MHV}$ 振幅

$$A(1^+,2^+,3^-) = \frac{[1|2]^3_{twistor}}{[2|3]_{twistor}[3|1]_{twistor}} = -\frac{[1|2]^3_{QCD}}{[2|3]_{QCD}[3|1]_{QCD}} \tag{43}$$

- $$A_L((j+2)^+, ..., \hat{i}^-, ..., (j-1)^+, \hat{K}^-) \\ = \frac{\langle i|j+1\rangle^4}{\langle j+1|j+2\rangle \dots \langle j-1|j+1\rangle} \tag{44}$$

- 合起来是

$$[j+1|j]\left(\frac{\langle j|i\rangle}{\langle j+1|i\rangle}\right)^3 \frac{1}{\langle j|j+1\rangle\,[j+1|j]} \\ \frac{\langle i|j+1\rangle^4}{\langle j+1|j+2\rangle \dots \langle j-1|j+1\rangle} \tag{45}$$

- 简化后是

$$-\frac{\langle j|i\rangle^3}{\langle j|j+1\rangle \dots \langle j-1|j\rangle} \times \frac{\langle i|j+1\rangle \langle j-1|j\rangle}{\langle j-1|j+1\rangle} \qquad (46)$$

- 同样计算另一项：

$$\begin{aligned} z &= -\frac{\langle j-1|j\rangle}{\langle j-1|i\rangle}, \quad |\hat{j}\rangle = \frac{|j-1\rangle \langle j|i\rangle}{\langle j-1|i\rangle} \\ \widehat{K} &= |j-1\rangle \left(|j] \frac{\langle j|i\rangle}{\langle j-1|i\rangle} + |j-1] \right) \end{aligned} \qquad (47)$$

$$A_R(-\widehat{K}^+,(j-1)^+,\widehat{j}^-)=[j|j-1]\left(\frac{\langle j|i\rangle}{\langle j-1|i\rangle}\right)^3$$

$$\begin{aligned} & A_L((j+1)^+,\ldots,\widehat{i}^-,\ldots,(j-2)^+,\widehat{K}^-) \\ = & \frac{\langle i|j-1\rangle^4}{\langle j+1|j+2\rangle\ldots\langle j-1|j+1\rangle} \end{aligned} \tag{48}$$

合起来，并简化得到

$$-\frac{\langle j|i\rangle^3}{\langle j|j+1\rangle\ldots\langle j-1|j\rangle}\times\frac{-\langle i|j-1\rangle\langle j+1|j\rangle}{\langle j-1|j+1\rangle} \tag{49}$$

- 最后两项相加是

$$
\begin{aligned}
& -\frac{\langle j|i\rangle^3}{\langle j|j+1\rangle \ldots \langle j-1|j\rangle} \times \\
& \left(\frac{\langle i|j+1\rangle \langle j-1|j\rangle}{\langle j-1|j+1\rangle} + \frac{-\langle i|j-1\rangle \langle j+1|j\rangle}{\langle j-1|j+1\rangle} \right) \\
= \ & -\frac{\langle j|i\rangle^3}{\langle j|j+1\rangle \ldots \langle j-1|j\rangle} \frac{\langle i|j\rangle \langle j-1|j+1\rangle}{\langle j-1|j+1\rangle} \\
= \ & \frac{\langle j|i\rangle^4}{\langle j|j+1\rangle \ldots \langle j-1|j\rangle}
\end{aligned}
\tag{50}
$$

第二个例子是计算色次序胶子振幅 $A(1^-,2^-,3^-,4^+,5^+,6^+)$，并选择形变 $[3|4\rangle$。该振幅有 220 个费曼图贡献！

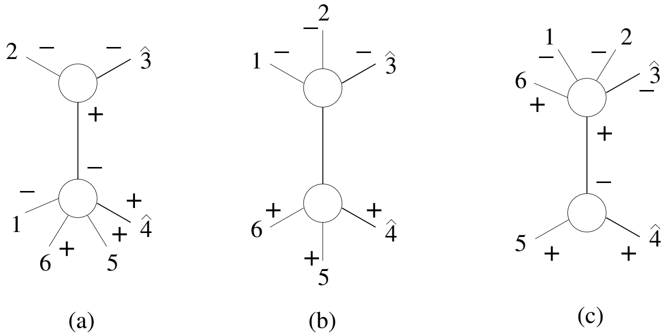


图: 3 个 BCFW 图

3 个 BCFW 图中，中间的图不管内线是什么样的螺旋度安排，都为零。左右两边的图，非零螺旋度安排只有一种，在图中标示出来。对左边的图：

- 奇点位置

$$(p_2 + p_3(z))^2 = \langle 2|3\rangle [3 + z4|2] = 0 \tag{51}$$

给出

$$z = -\frac{[3|2]}{[4|2]} \tag{52}$$

- 有

$$
\begin{aligned}
\left|\widehat{3}\right] &= |3] - \frac{[3|2]}{[4|2]}|4] = |2]\frac{[3|4]}{[2|4]} \\
\left|\widehat{4}\right\rangle &= |4\rangle + \frac{[3|2]}{[4|2]}|3\rangle = \frac{|3+4|2]}{[4|2]} \\
\widehat{K} &= p_2 + \widehat{p}_3 = |2]\left(|2\rangle + |3\rangle\frac{[3|4]}{[2|4]}\right) \\
&= |2]\frac{|2+3|4]}{[2|4]}
\end{aligned}
\tag{53}
$$

- 从而

$$A(2^-,\hat{3}^-,\widehat{-K}^+)=\frac{\left\langle 2|\hat{3}\right\rangle^3}{\left\langle \hat{3}|\widehat{-K}\right\rangle\left\langle \widehat{-K}|2\right\rangle}$$

$$=\frac{\langle 2|3\rangle^3}{\frac{\langle 3|2+3|4]}{[2|4]}\frac{(-)\langle 2|2+3|4]}{[2|4]}}$$

$$=\frac{\langle 2|3\rangle\,[2|4]}{[3|4]} \tag{54}$$

$$
\begin{aligned}
A(\widehat{K}^-,\widehat{4}^+,5^+,6^+,1^-) &= \frac{\left\langle 1|\widehat{K}\right\rangle^3}{\left\langle \widehat{K}|\widehat{4}\right\rangle \left\langle \widehat{4}|5\right\rangle \langle 5|6\rangle \langle 6|1\rangle} \\
&= \frac{\left(\frac{\langle 1|2+3|4]}{[2|4]}\right)^3}{\frac{[4|2+3|3+4|2]}{[2|4]^2}\frac{(-)\langle 5|3+4|2]}{[4|2]}\langle 5|6\rangle\langle 6|1\rangle} \\
&= \frac{\left(\frac{\langle 1|2+3|4]}{[2|4]}\right)^3}{\frac{s_{234}[4|2]}{[2|4]^2}\frac{(-)\langle 5|3+4|2]}{[4|2]}\langle 5|6\rangle\langle 6|1\rangle} \\
&= \frac{-\langle 1|2+3|4]^3}{s_{234}\,[2|4]\,\langle 5|3+4|2]\,\langle 5|6\rangle\,\langle 6|1\rangle} \qquad (55)
\end{aligned}
$$

合在一起得到

$$
\begin{aligned}
& \frac{\langle 2|3\rangle\,[2|4]}{[3|4]} \times \frac{1}{\langle 2|3\rangle\,[3|2]} \\
& \times \frac{-\langle 1|2+3|4]^3}{s_{234}\,[2|4]\,\langle 5|3+4|2]\,\langle 5|6\rangle\,\langle 6|1\rangle} \\
= \; & \frac{\langle 1|2+3|4]^3}{s_{234}\,[2|3]\,[3|4]\,\langle 5|3+4|2]\,\langle 5|6\rangle\,\langle 6|1\rangle}
\end{aligned}
\tag{56}
$$

作业： (a) 计算另一个 BCFW 图； (b) 计算 $A(1^+,2^+,3^-,4^+,5^-,6^-)$。