现代散射振幅的在壳纲领—一圈图的现代计算

冯波

浙江大学物理系，北京计算科学研究中心

2023 年 8 月 4 日

Contents

Contents

Contents

Contents

Contents

第 1 节：概述

- 树图给出经典的结果，而量子修正是从圈图开始的。因此 圈图是量子效应的核心
- 在圈图修正中，一圈图和高圈图又有些区别。一圈图效应，从一个角度看是在经典背景下展开到二阶（也就是只保留到高斯部分）的效应，因此它是相对简单很多。其它相关的是 ISP 在高圈的出现

- 在圈图的计算中，一个核心的思想（以及方案）就是**约化**: 就是把复杂的计算分解为一些简单计算的组合。
- 由于圈图振幅的结构特点，即有理函数的积分形式，约化又分为两类： 被积函数层次的约化（reduction at the integrand level）； 积分层次的约化（reduction at the integral level）。

- 粗略地说来，圈图振幅可以写为

$$\int \left(\prod d^D L_i\right) \mathcal{R} \tag{1}$$

被积函数层次的约化，就是在代数层面上分解

$$\mathcal{R} = \sum_i c_i I_i \tag{2}$$

这里展开系数 c_i 不依赖于积分动量 L_i，但是是外动量及理论参数（比如外质量，耦合常数）的函数。一个简单的例子就是

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \tag{3}$$

代数层面的约化不是最经济的，因为如下的两个原因：

- 某些 I_i 的积分为零，即 $\int \left(\prod d^D L_i\right) I_i = 0$;
- 在代数层面上独立的量的积分可能会有线性关系。

由于这个理由，在积分层次上的展开，独立基的个数会远远小于代数层面展开的基的个数。为了区分，以后代数层次上的基叫"代数基"，积分层次上的基叫"主基"（master basis）。

- 被积函数层次的约化，从现在的观点来看，是代数计算几何的应用。
- 积分层次的约化，目前的困难比较大。比较著名的有一圈图的 Passarino-Veltman 约化方案 (PV) 和高圈中标准方案 IBP 方法（integrant-by-part）等方案

- 约化的想法把一个困难的问题分解为两个相对独立的部分：(a) 基的研究，普适的；(b) 约化系数的提取。对每个不同过程不同
- 尽管一个完整的计算方案应该能够同时确定两个部分，这两个部分其实可以分开研究。特别是基的部分确定后，其结果可以应用到所有物理过程，而对不同物理计算，就只归结为展开系数的计算。

- 这种把困难问题分解、并一个个攻克的方法，是各种科学研究中很常用的一个思路。
- 我们要特别指出约化的结果，非常依赖于时空的维数，特别是采用时空维数正规化方案后。一个完整的约化方案，应该体现出这个特点。

第 2 节：四维时空的被积函数的约化

给定两个独立 4 维动量 K_1, K_2，并假设 $(K_1+K_2)^2 \neq 0$, 我们构造如下四个 null momenta e_i, $i=1,2,3,4$

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{\gamma_{12}}\left(K_1 - \frac{K_1^2 + K_1\cdot K_2 - \mathrm{sgn}(K_1\cdot K_2)|\sqrt{\Delta}|}{(K_1+K_2)^2}K_{12}\right),\\
e_2 &= \frac{1}{\gamma_{12}}\left(K_2 - \frac{K_2^2 + K_1\cdot K_2 - \mathrm{sgn}(K_1\cdot K_2)|\sqrt{\Delta}|}{(K_1+K_2)^2}K_{12}\right),\\
e_3 &= \frac{\langle e_1|\gamma^\mu|e_2]}{2i}, \qquad e_4 = \frac{\langle e_2|\gamma^\mu|e_1]}{2i} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

这里 $\Delta = (K_1\cdot K_2)^2 - K_1^2 K_2^2$， $\gamma_{12}^2 = \frac{2\Delta}{(K_1+K_2)^2}$. 这样构造的优势是它们之间非零内积只有 $e_1\cdot e_2 = 1$ and $e_3\cdot e_4 = 1$

利用 e_i, 可以展开任意动量

$$\begin{aligned} K &= (K\cdot e_2)e_1 + (K\cdot e_1)e_2 + (K\cdot e_4)e_3 + (K\cdot e_3)e_4 \equiv \alpha_i e_i \\ \ell &= (\ell\cdot e_2)e_1 + (\ell\cdot e_1)e_2 + (\ell\cdot e_4)e_3 + (\ell\cdot e_3)e_4 \\ &\equiv x_2 e_1 + x_1 e_2 + x_4 e_3 + x_3 e_4 \end{aligned} \tag{5}$$

特别的

$$\ell^2 = x_1x_2 + x_3x_4, \quad \ell\cdot K = \sum_i \alpha_i x_i \tag{6}$$

现在我们可以讨论“被积函数层面的约化问题”：

- 首先，被积函数，通过投影到基上，是如下的有理函数

$$\frac{f(x_1, x_2, x_3, x_4)}{\prod_t D_t(x_1, x_2, x_3, x_4)} \tag{7}$$

- 约化问题，其实就是分子的展开：

$$f(x_i) = \sum_t c_t(x_i) D_t(x_i) + r(x_i) \ , \tag{8}$$

这里组成剩余函数 $r(x_i)$ 的基就是我们寻找的“被积函数层面的基”

表达式 (8)，用比较数学的语言就是：

- 传播子 D_t 生成多项式环 $k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ 中 理想 I.
- 代数基就是 商环 k/I 上的代表元。
- 当然代表元的个数依赖于物理条件的限制

现在，我们讨论各种拓扑。首先是 方块 (Box)：其四个传播子是

$$D_0 = \ell^2, \quad D_1 = (\ell - K_1)^2, \quad D_2 = (\ell - K_1 - K_2)^2,$$
$$D_3 = (\ell - K_1 - K_2 - K_3)^2 \tag{9}$$

- 利用 K_1, K_2 构造 e_i，我们可以表示

$$\begin{aligned} D_0 &= x_1 x_2 + x_3 x_4, \\ D_1 &= D_0 - 2(\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2) + 2\alpha_{11}\alpha_{12} \\ D_2 &= D_0 - 2(\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2) + 2\alpha_{21}\alpha_{22}, \\ D_3 &= D_0 - 2(\alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3 + \alpha_{34} x_4) \\ &\quad + 2\alpha_{31}\alpha_{32} + 2\alpha_{33}\alpha_{34} \end{aligned} \tag{10}$$

这里 $K_1 + \ldots + K_i \equiv \sum_{t=1}^{4} \alpha_{it} e_t$

- 注意到 $(D_0 - D_1)/2$ 属于理想，所有我们可以用 $(D_0 - D_1)/2 = 0$ 解出

$$x_1 = \alpha_{12} - \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} x_2 \tag{11}$$

这里的等号应该理解为等式双边在商环 k/I 上属于同一个代表元。

- 同样的，利用 (10)，我们能解出 x_1, x_2, x_3(RSP) 作为 x_4(ISP) 的线性函数。
- 把这些解代人 D_0，我们得到

$$D_0(x_4) = -\frac{\alpha_{34}}{\alpha_{33}} x_4^2 + c_1 x_4 + c_0 \tag{12}$$

- 关系 $D_0 = 0(12)$ 告诉我们，在商环 k/I 上 x_4^2 可以被表示为 $x_4, 1$ 的线性组合
- 结论：对方块图，商环 k/I 上的代数基只有两个，分别是 1 和 x_4, 即

$$\frac{1}{D_0 D_1, D_2 D_3}, \quad \frac{x_4}{D_0 D_1, D_2 D_3} \tag{13}$$

对 三角型 (Triangle): 其 3 个传播子是

$$D_0 = \ell^2, \quad D_1 = (\ell - K_1)^2, \quad D_2 = (\ell - K_1 - K_2)^2 \tag{14}$$

- 同样利用 K_1, K_2 构造 e_i，可以发现，通过 $(D_0 - D_i)/2 = 0, i = 1, 2$ 可以表示 x_1, x_2 作为 x_3, x_4 的线性函数。
- 代人 D_0 后，得到

$$D_0(x_3, x_4) = \beta + x_3 x_4 \tag{15}$$

- 此时商环 $k[x_3, x_4]/\langle D_0(x_3, x_4)\rangle$ 的代表元是

$$1, x_3^n, x_4^m, \qquad n, m \geq 1 \tag{16}$$

注意，其个数是 无限多

- 但是物理的图像是，对标准模型的理论，分子上 ℓ 的幂次不会超越分母传播子个数，因此我们施加该条件后，只留 7 个代表元

$$\{1, x_3, x_4, x_3^2, x_4^2, x_3^3, x_4^3\} \tag{17}$$

对 气泡图 (Bubble): 其 2 个传播子是

$$D_0 = \ell^2, \quad D_1 = (\ell - K_1)^2, \tag{18}$$

- 需要引入一个辅助矢量 K_2 构造 e_i,
- 通过 $(D_0 - D_2)/2 = 0$ 可以表示 x_1 作为 x_2, x_3, x_4 的线性函数。
- 代人 D_0 后，得到

$$D_0(x_2, x_3, x_4) = x_2 a_{1,2} \left(1 - \frac{x_2}{a_{1,1}}\right) + x_3 \, x_4 \, , \tag{19}$$

- 此时，寻找代表元不是直接了当的，需要用到 Groenber basis of ideal
- 对 $x_2^{n_2}x_3^{n_3}x_4^{n_4}$ with $n_2+n_3+n_4\leq 2$，可以发现

$$\{1,\ x_2,\ x_2{}^2,\ x_3,\ x_2\ x_3,\ x_3{}^2,\ x4,\ x_2\ x4,\ x4^2\} \quad (20)$$

对蝌蚪图 (tadpole)，物理条件下代表元是 $\{1,x_1,x_2,x_3,x_4\}$

第 3 节：OPP 方案

上一部分的解释，从教学的效果，比较容易接受。历史上，是 Giovanni Ossola, Costas G. Papadopoulos, Roberto Pittau 在论文 arXiv:hep-ph/0609007 中首先建立了如上的约化方案 (OPP 方案)。后续人们认识到其数学的框架。这个认识能把约化直接了当的推广到高圈上。从这个意义上，被积函数的代数约化是一个解决的问题，虽然当要求计算效率时，可能不是很理想。

下面我们介绍他们的工作。

首先，任意 m-点一圈被积函数可以分解为

$$A(\bar{q}) = \frac{N(q)}{\overline{D}_0 \overline{D}_1 \cdots \overline{D}_{m-1}}\,, \quad \overline{D}_i = (\bar{q}+p_i)^2 - m_i^2\,, \quad p_0 \neq 0\,, \tag{21}$$

而

$$\begin{aligned}
N(q) &= \sum_{i_0<i_1<i_2<i_3}^{m-1} \left[d(i_0 i_1 i_2 i_3) + \widetilde{d}(q; i_0 i_1 i_2 i_3)\right] \prod_{i\neq i_0,i_1,i_2,i_3}^{m-1} \overline{D}_i \\
&+ \sum_{i_0<i_1<i_2}^{m-1} \left[c(i_0 i_1 i_2) + \widetilde{c}(q; i_0 i_1 i_2)\right] \prod_{i\neq i_0,i_1,i_2}^{m-1} \overline{D}_i \\
&+ \sum_{i_0<i_1}^{m-1} \left[b(i_0 i_1) + \widetilde{b}(q; i_0 i_1)\right] \prod_{i\neq i_0,i_1}^{m-1} \overline{D}_i \\
&+ \sum_{i_0}^{m-1} \left[a(i_0) + \widetilde{a}(q; i_0)\right] \prod_{i\neq i_0}^{m-1} \overline{D}_i + \widetilde{P}(q) \prod_{i}^{m-1} \overline{D}_i\,.
\end{aligned} \tag{22}$$

让我们理解上面的表达式：

- 看 $N(q)$ 的第一行，代人 (21), 我们得到一堆不同的 Box 图。对每个 Box 图，$d, \widetilde{d}$ 其实就是我们前面讨论的两个“代数基”, 只是基的选择比较特殊：

$$\widetilde{d}(q;0123) = \widetilde{d}(0123)\, T(q)\,, \tag{23}$$

这里 $\widetilde{d}(0123)$ 是不依赖 q 的常数，而

$$T(q) \equiv Tr[(\not{q} + \not{p}_0)\not{\ell}_1\not{\ell}_2\not{k}_3\gamma_5]\,. \tag{24}$$

- 这样选择的目的是因为

$$\int d^n \bar{q} \frac{T(q)}{\overline{D}_0 \overline{D}_1 \overline{D}_2 \overline{D}_3} = 0 \,. \tag{25}$$

- 因此，$N(q)$ 的展开中，包括两类待定系数：d 是约化中我们真正需要的。它其实对应的是“积分层面约化的约化系数”。而 $\tilde{d}$ 因为其积分后为零，在实际计算中并不需要，所有称为"Spurious terms"。
- 尽管 $\tilde{d}$ 积分为零，在“被积函数层面的约化上，它是必须计算的。这就是两类约化方案的重要区别之一。

OPP 工作的一个重要结果，就是构造了"Spurious terms" 对圈动量具体的依赖形式：

- Triangle:

$$\widetilde{c}(q;012) = \sum_{j=1}^{j_{max}} \{\widetilde{c}_{1j}(012)[(q+p_0)\cdot\ell_3]^j + \widetilde{c}_{2j}(012)[(q+p_0)\cdot\ell_4]^j\} \,. \quad (26)$$

对可重整理论，$j_{max}=3$。有

$$\int d^n\bar{q}\frac{[(q+p_0)\cdot\ell_3]^j}{\bar{D}_0\bar{D}_1\bar{D}_2} = 0\,,$$
$$\int d^n\bar{q}\frac{[(q+p_0)\cdot\ell_4]^j}{\bar{D}_0\bar{D}_1\bar{D}_2} = 0\,, \quad \forall j=1,2,3,\cdots \quad (27)$$

- Bubble: 引入新 null 动量 n, 可重整理论有如下 8 个 Spurious terms

$$\begin{aligned}\widetilde{b}(q;01) &= \widetilde{b}_{11}(01)[(q+p_0)\cdot\ell_7] + \widetilde{b}_{21}(01)[(q+p_0)\cdot\ell_8] \\ &+ \widetilde{b}_{12}(01)[(q+p_0)\cdot\ell_7]^2 + \widetilde{b}_{22}(01)[(q+p_0)\cdot\ell_8]^2 \\ &+ \widetilde{b}_0(01)[(q+p_0)\cdot n] + \widetilde{b}_{00}(01)\,K(q;01) \\ &+ \widetilde{b}_{01}(01)[(q+p_0)\cdot\ell_7][(q+p_0)\cdot n] \\ &+ \widetilde{b}_{02}(01)[(q+p_0)\cdot\ell_8][(q+p_0)\cdot n]\,, \end{aligned} \tag{28}$$

$$K(q;01) = \left\{[(q+p_0)\cdot n]^2 - \frac{[(q+p_0)\cdot k_1]^2 - (q+p_0)^2 k_1^2}{3}\right\} \tag{29}$$

- Tadpole: 可重整理论有如下 4 个 Spurious terms

$$\begin{aligned}\widetilde{a}(q;0) &= \widetilde{a}_1(0)[(q+p_0)\cdot k]+\widetilde{a}_2(0)[(q+p_0)\cdot n]\\ &+ \widetilde{a}_3(0)[(q+p_0)\cdot \ell_7]+\widetilde{a}_4(0)[(q+p_0)\cdot \ell_8]\,. \end{aligned} \quad (30)$$

OPP 工作的第二个重要贡献，就是给出了 $N(q)$ 中展开系数的高效计算方法：

- 先提取 Box 的系数，对给定 Box，我们选择内线动量 q 使其四个传播子为零，也就是

$$D_0 = D_1 = D_2 = D_3 = 0\,. \tag{31}$$

在四维，这样的解有两个。

- 最关键的是，把这样的 q 代入到 $N(q)$ 中，所有项，由于 D_i 的存在，都贡献为零。非零贡献

$$N(q_0^{\pm}) \;=\; [d(0123) + \widetilde{d}(0123)\, T(q_0^{\pm})] \prod_{i\neq 0,1,2,3} D_i(q_0^{\pm}) \tag{32}$$

两个方程，两个未知数，可以完整求解。

其实，选择动量是传播子在壳，相当于切开传播子。4 维中一圈最多可以切 4 条，这称为 Maximum Cut。对应的四个角在壳树图的乘积，给出切 4 条时的 Leading singularity 这样一个解析结构。这个结果是在 [Britto, Cachazo, Feng, arXiv:hep-th/0412103] 中首先给出

完成所有 Box 系数的提取后，我们提取 Triangle 的系数：

- 考虑某个三角基，并进行切割，即选择内线动量 q 满足

$$D_0 = D_1 = D_2 = 0 \quad \text{and} \quad D_i \neq 0 \ \ \forall i \neq 0,1,2 \tag{33}$$

  此时非常关键的点是 q 不是完全确定的，有一个自由参数。

- 现在我们考虑如下的组合

$$N(q) = \sum_{i_0<i_1<i_2<i_3}^{m-1} \left[d(i_0 i_1 i_2 i_3) + \widetilde{d}(q; i_0 i_1 i_2 i_3) \right] \prod_{i \neq i_0, i_1, i_2, i_3}^{m-1} \overline{D}_i \tag{34}$$

- 显然，代入 (33) 的解，只有一个三角基的系数非零，即上边等于

$$[c(012)+\widetilde{c}(q;012)]\prod_{i\neq 0,1,2} D_i(q) \qquad (35)$$

注意，对可重整理论，有 7 个未知系数 $c,\widetilde{c}$。因此我们可以任意选择 7 个 (33) 的解，建立 7×7 的矩阵求解系数。

现在，整个逻辑清晰明了，我们可以通过减除已求得的 Box, Triangle 的贡献，求解 Bubble, 直至 Tadpole 的约化系数，完成整个约化。该方案的优点是：

- 整个计算过程是纯代数的，易于程序化
- 由于内线动量的恰当选择，每一步都不涉及大的矩阵，计算效率大大提高。

第 4 节：PV 约化方案

OPP 方案，是“被积函数层面上约化”在一圈的优美实现。但是“被积函数层面上代数约化”方案本身有一些值得注意的点：

- 我们看到约化系数分为两类。其中 Spurious terms 的系数最终不贡献。但是计算过程中，我们必须全程保留。这损失了一定的计算效率
- 在一圈层面上这种损失还可以忍受，但是到高圈，经常发生 Spurious terms 的个数是几十倍物理项的个数，也就是说，效率的损失将是数量级的。这在实际计算中是非常致命的。

这导致自然的想法：能否只计算物理项的约化系数？这就是我们下面介绍的“积分层面的约化方案”

积分层面的约化方案有很多种，我主要介绍一圈层面的两者：即 Passarino-Veltman 约化方案，和 幺正切割约化方案

PV 约化的讨论，参考综述 [R. Keith Ellis, Zoltan Kunszt, Kirill Melnikov, Giulia Zanderighi, arXiv:1105.4319]

让我们从一个简单例子开始，考虑 Bubble 积分

$$\mathcal{B}^{\mu_1}(p_1; m_1, m_2) \;=\; \frac{1}{i\pi^{D/2}}\int d^D\ell\, \frac{\ell^{\mu_1}}{d_1 d_2} \tag{36}$$

$$d_1 = \ell^2 - m_1^2 + i\epsilon, \qquad d_2 = (\ell + p_1)^2 - m_2^2 + i\epsilon \tag{37}$$

张量结构，给出

$$\mathcal{B}^{\mu_1}(p_1; m_1, m_2) = B_1 p_1^{\mu} \tag{38}$$

为了求解 B_1，我们两边乘以 p_1^μ，从而

$$
\begin{aligned}
RHS &= p_1^2 B_1 \\
LHS &= \frac{1}{i\pi^{D/2}} \int d^D\ell \, \frac{p_1 \cdot \ell}{d_1 d_2} \\
&= \frac{f_1}{2} I_2(p_1; m_1, m_2) + \frac{1}{2} I_1[1] - \frac{1}{2} I_1[2] \qquad (39)
\end{aligned}
$$

这里我们利用了

$$
\ell \cdot p_1 = \frac{(d_2 + m_2^2) - (d_1 + m_1^2) - p_1^2}{2}
$$

$$
= \frac{d_2 - d_1 + f_1}{2}, \quad f_1 = m_2^2 - m_1^2 - p_1^2 \qquad (40)
$$

代人就得到

$$\mathcal{B}^{\mu_1}(p_1;m_1,m_2)=p_1^{\mu}\frac{1}{2p_1^2}\{f_1 I_2+I_1[1]-I_1[2]\} \tag{41}$$

右边的三个基前系数，就是需要的约化系数。

现在考虑略为复杂的情况

$$\mathcal{B}^{\mu_1\mu_2}(p_1; m_1, m_2) \;=\; \frac{1}{i\pi^{D/2}}\int d^D\ell\,\frac{\ell^{\mu_1}\ell^{\mu_2}}{d_1 d_2} \tag{42}$$

张量结构，给出

$$\mathcal{B}^{\mu_1\mu_2}(p_1; m_1, m_2) = B_{11}p_1^{\mu_1}p_1^{\mu_2} + B_{00}g^{\mu_1\mu_2} \tag{43}$$

两个未知系数，需要两个方程求解

通过两边乘以 $g_{\mu_1\mu_2}$ 我们得到

$$
\begin{aligned}
B_{00}D + B_{11}p_1^2 &= \frac{1}{i\pi^{D/2}}\int d^D\ell\,\frac{\ell^2}{d_1 d_2} \\
= \quad & m_1^2\frac{1}{i\pi^{D/2}}\int d^D\ell\,\frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{i\pi^{D/2}}\int d^D\ell\,\frac{1}{d_2} \\
= \quad & m_1^2 I_2(p_1; m_1, m_2) + I_1[2]\ ,
\end{aligned}
\tag{44}
$$

通过两边乘以 $(p_1)_{\mu_1}(p_1)_{\mu_2}$ 我们得到

$$
\begin{aligned}
B_{00}p_1^2 + B_{11}(p_1^2)^2 &= \frac{1}{i\pi^{D/2}}\int d^D\ell\,\frac{(\ell\cdot p_1)^2}{d_1 d_2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{i\pi^{D/2}}\int d^D\ell\,\frac{(\ell\cdot p_1)(d_2-d_1+f_1)}{d_1 d_2} \\
&= \frac{f_1}{2}p_1\cdot\mathcal{B}^{\mu} + \frac{1}{2}\frac{1}{i\pi^{D/2}}\int d^D\ell\,\frac{(\ell\cdot p_1)}{d_1} \\
&\quad -\frac{1}{2}\frac{1}{i\pi^{D/2}}\int d^D\ell\,\frac{(\ell\cdot p_1)}{d_2}
\end{aligned}
\tag{45}
$$

注意 (45) 的第一项，我们用前面的计算结果。第二项积分为零，但是第三项由于积分动量的平移，其结果非零：

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{i\pi^{D/2}} \int d^D\ell \, \frac{(\ell \cdot p_1)}{d_2} \\
= & \frac{1}{i\pi^{D/2}} \int d^D\ell \, \frac{(\ell \cdot p_1)}{(\ell + p_1)^2 - m_2^2 + i\epsilon} \\
= & \frac{1}{i\pi^{D/2}} \int d^D\widetilde{\ell} \, \frac{((\widetilde{\ell} - p_1) \cdot p_1)}{\widetilde{\ell}^2 - m_2^2 + i\epsilon} = -p_1^2 I_1[2] \qquad (46)
\end{aligned}
$$

和起来，就可以解出

$$
\begin{aligned}
B_{00} &= \frac{1}{(D-1)}\left\{m_1^2 I_2 + \frac{1}{2} I_1[2] - \frac{f_1}{2} B_1\right\} \\
B_{11} &= \frac{f_1 B_1 + I_1[2] - 2B_{00}}{2p_1^2}
\end{aligned}
\tag{47}
$$

现在我们对 PV 约化的大致逻辑是清楚的:

- 首先利用外动量和度规，构造张量结构！
- 乘以每一个独立的张量结构，形成一组方程，求解未知系数！

由此我们也能大致了解 PV 方案的复杂性：

- 对越来越高阶的张量，当外线动量越远越多时，独立的张量结构越来越复杂！与之对应的未知系数也越来越多
- 需要构造的独立方程数随问题的复杂度，也越来越增加。同时因为线性方程组的个数的增大，求解该方程也越来越困难！

问题：如何能避免这些困难？

其实上面的两个步骤，分别对应不同的事情：

- 张量结构的构造，是和约化问题无关的纯代数问题！
- 建立的方程，联系高阶张量的约化到已知的低价张量。这才是约化的本质！

历史经验告诉我们，简化问题的思路是 把不相关的事情分离开来！

第 4.1 节：PV 方案的改进

我这里要介绍的一种改进方法，就是引入 辅助矢量 R

它基于如下的简单事实：

$$\int d\ell \frac{\ell^{\mu_1}....\ell^{\mu_k}}{D_0 D_1 ... D_n} = \frac{\partial}{\partial R_{\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial R_{\mu_1}} \int d\ell \frac{(\ell \cdot R)^k}{D_0 D_1 ... D_n} \tag{48}$$

因此我们把一圈 k 阶张量的约化问题转化为研究如下的约化问题

$$\int d\ell \frac{(2\ell \cdot R)^k}{D_0 D_1 ... D_n} \tag{49}$$

现在我们接着分析：

- 约化告诉我们

$$\int d\ell \frac{(2\ell \cdot R)^k}{D_0 D_1 \ldots D_n} = J \cdot \vec{\alpha}(R) \tag{50}$$

- 这里 J 是基组成的行向量，比如上面讨论的 Bubble 例子 $J = \{I_2, I_1[1], I_1[2]\}$

- 约化矢量 α，作为 R 的函数，洛伦兹不变性告诉我们一定是如下形式

$$\vec{\alpha}(R) = \sum_{i_0,\ldots,i_n}^{k} \vec{\alpha}_{i_0\ldots i_n} (R^2)^{i_0} (R\cdot p_1)^{i_1} \ldots (R\cdot p_n)^{i_n} \quad (51)$$

这里 p_i 是 n 个独立外动量。求和有如下限制：

$$k = 2i_0 + \sum_{i=1}^{n} i_i \quad (52)$$

因此约化就转化为求解 $\vec{\alpha}_{i_0\ldots i_n}$

回顾 PV 约化时，我们如何建立方程：

- 乘以 $g_{\mu\nu}$，得到 ℓ^2
- 乘以外线动量 p_i，得到 $\ell \cdot p_i$

引入辅助矢量后，如何达成如上的类比？

我们可以考虑相应的微分算符：

- 可以容易看到，如下微分算符

$$\widehat{T} \equiv \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial R^\mu} \frac{\partial}{\partial R^\nu} \tag{53}$$

作用到 $(2\ell \cdot R)^k$ 上时，产生 ℓ^2

- 可以容易看到，如下微分算符

$$\widehat{D}_i \equiv p_i \cdot \frac{\partial}{\partial R} \tag{54}$$

作用到 $(2\ell \cdot R)^k$ 上时，产生 $\ell \cdot p_i$

现在我们可以具体考虑在新框架下的约化方程。首先，一方面有

$$
\begin{aligned}
& \eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial R^\mu}\frac{\partial}{\partial R^\nu} I_{n+1}^{(m)} = \int \frac{d^D\ell}{(2\pi)^D}\frac{m(m-1)(2\ell\cdot R)^{m-2}(4\ell^2)}{(\ell^2-M_0^2)^2\prod_{j=1}^n((\ell-K_j)^2-M_j^2)} \\
= \; & 4m(m-1)M_0^2\int \frac{d^D\ell}{(2\pi)^D}\frac{(2\ell\cdot R)^{m-2}}{(\ell^2-M_0^2)^2\prod_{j=1}^n((\ell-K_j)^2-M_j^2)} \\
& +\int \frac{d^D\ell}{(2\pi)^D}\frac{4m(m-1)(2\ell\cdot R)^{m-2}}{\prod_{j=1}^n((\ell-K_j)^2-M_j^2)} \\
= \; & 4m(m-1)M_0^2 I_{n+1}^{(m-2)} + 4m(m-1) I_{n+1;\bar{0}}^{(m-2)}
\end{aligned}
$$

代入展开式，得到未知系数的代数递推关系

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i_0,\ldots,i_n}^{m} \vec{\alpha}_{i_0\ldots i_n}\eta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial R^\mu}\frac{\partial}{\partial R^\nu}(R^2)^{i_0}(R\cdot p_1)^{i_1}\ldots(R\cdot p_n)^{i_n} \\
= \;& 4m(m-1)M_0^2 I_{n+1}^{(m-2)} + 4m(m-1)I_{n+1;\bar{0}}^{(m-2)}
\end{aligned} \tag{55}
$$

同样得到另一组方程

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_i I_{n+1}^{(m)}[R] &= \int \frac{d^D\ell}{(2\pi)^D} \frac{m(2\ell\cdot R)^{m-1}(2\ell\cdot K_i)}{(\ell^2-M_0^2)\prod_{j=1}^n[(\ell-K_j)^2-M_j^2]} \\
= & \int \frac{d^D\ell}{(2\pi)^D} \frac{m(2\ell\cdot R)^{m-1}}{(\ell^2-M_0^2)\prod_{j=1}^n[(\ell-K_j)^2-M_j^2]} \\
& \times[(\ell^2-M_0^2)-((\ell-K_i)^2-M_i^2)+(M_0^2+K_i^2-M_i^2)] \\
= & \; mI_{n+1;\widehat{0}}^{(m-1)} - mI_{n+1;\widehat{i}}^{(m-1)} + mf_i I_{n+1}^{(m-1)}, \qquad (56)
\end{aligned}
$$

注意：$(n+1)$ 组方程，$(n+1)$ 个 R 生成的变量。可以完全求解！

Example I: Tadpole 的约化

- $$\widehat{T} C_0(m,1)[R;M_0] = \widehat{T}\left(c^{(m)}(M_0^2)^{\frac{m}{2}} s_{00}^{\frac{m}{2}}\right)$$
$$\begin{aligned} &= c^{(m)}(M_0^2)^{\frac{m}{2}}(Dm + m(m-2)) s_{00}^{\frac{m-2}{2}} \\ &= 4m(m-1)M_0^2 C_0(m-2,1) \\ &= 4m(m-1)M_0^2 c^{(m-2)}(M_0^2)^{\frac{m-2}{2}} s_{00}^{\frac{m-2}{2}} \end{aligned}$$

得到递推关系

$$c^{(m)} = \frac{4(m-1)}{(D+m-2)} c^{(m-2)}$$

利用条件 $c^{(0)} = 1$, 得到

$$c^{(m=even)} = 2^m \frac{(m-1)!!}{\prod_{i=1}^{\frac{m}{2}}(D+2(i-1))}, \qquad c^{(m=odd)} = 0$$

Example II: 张量 bubble 约化后的 Tadpole 部分系数。

用定义 $s_{00} = R \cdot R$, $s_{0i} = R \cdot K_i$, 展开

$$C_1^{(0)}(m) = \sum_i c_i^{(m)} (M_0^2)^{\frac{m-i}{2}-1} s_{00}^{\frac{m-i}{2}} s_{01}^i$$

- D_1 给出系数的递推关系是

$$c_{i+2}^{(m)} = \frac{1}{(i+2)\beta_{11}} \left(m\alpha_1 c_{i+1}^{(m-1)} - m\delta_{0,i+1} c^{(m-1)} - (m-i) c_i^{(m)} \right)$$

  这里 $c^{(m)}$ 是上页张量 tadpole 的约化系数。
- 约束条件给出，只有 $0 \leq i \leq m$ 和 $m-i$ 是偶数，$c_i^{(m)}$ 才非零
- 按照 $m = 2r$ 或者 $m = 2r+1$，用上述递推关系，所有 $c_{i+2}^{(m)}$ 变为 $c_0^{(2r)}$ 或者 $c_1^{(2r+1)}$. 的函数

- 利用 $m = 2r + 1, i = 0$ 是的方程

$$c_1^{(2r+1)} = \frac{2r+1}{\beta_{11}} \left(\alpha_1 c_0^{(2r)} - c^{(2r)} \right),$$

$c_1^{(2r+1)}$ 成为 $c_0^{(2r)}$ 的函数。

- 到处，我们只需要求解 $c_0^{(2r)}$.

- 对 $m = 2r$, $\widehat{T}$ 作用产生递推关系中的一个是

$$r(D+2r-2)c_0^{(2r)} + \beta_{11} c_2^{(2r)} = 4r(2r-1)c_0^{(2r-2)}.$$

- 结合 $i=0$ 时 $\widehat{D}$ 的递推关系

$$\begin{aligned} c_2^{(2r)} &= \frac{r}{\beta_{11}}\left(\alpha_1 c_1^{(2r-1)} - c_0^{(2r)}\right) \\ &= \frac{r}{\beta_{11}}\left[\alpha_1 \frac{2r-1}{\beta_{11}}\left(\alpha_1 c_0^{(2r-2)} - c^{(2r-2)}\right) - c_0^{(2r)}\right]. \end{aligned}$$

得到 $c_0^{(2r)}$ 的递推关系

$$c_0^{(2r)} = \frac{2r-1}{2r+D-3}\left[\left(4 - \frac{\alpha_1^2}{\beta_{11}}\right) c_0^{(2r-2)} + \frac{\alpha_1}{\beta_{11}} c^{(2r-2)}\right],$$

利用边界条件 $c_0^{(0)} = 0$，即可求解！

第 4.2 节：生成函数

尽管我们能够给出展开系数的代数递推关系，当进入递推关系的求解，你会发现有个指标间的约束条件，导致不必要的技术性复杂，即展开

$$c(r) = \sum \alpha_{i_0 i_1 \ldots i_n} (R^2)^{i_0} \prod_{t=1}^{n} (R \cdot K_t)^{i_t}$$

时，张量的阶数给出指标间的约束条件

$$N = 2i_0 + \sum_{j=1}^{n} i_j$$

换句话说，各个指标不是自由变化的！

如何能避免如上的约束？当我们放弃约束时，求和就包含不同阶的张量。由此引导我们到一个重要概念生成函数 (generation function)!!
我们有很多不同阶组合方式，两种代表是

- $$\psi_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n (2\ell \cdot R)^n = \frac{1}{1 - t(2\ell \cdot R)}$$

- $$\psi_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\ell \cdot R)^n t^n}{n!} = e^{t(2\ell \cdot R)}$$

这里我们选择 $\psi_2(t)$ 因为微分后它还是该函数 $\frac{de^x}{dx} = e^x$

Let us consider general one-loop integrals with $(n+1)$ propagators:

- There are n indepedent external momenta K_i.
- With R we can construct $(n+1)$ Lorentz invariant combinations

$$r = R^2, \qquad p_i = K_i \cdot R$$

- The generation functions are

$$\int d^D\ell \, \frac{e^{t(2\ell\cdot R)}}{\prod_{i=0}^{n} D_i} = \sum_{\mathcal{J}} c_{n+1;\widehat{\mathcal{J}}}(r, p_i) \int d^D\ell \, \frac{1}{\prod_{i=0, i\notin\mathcal{J}}^{n} D_i}$$

- Using $K_i \cdot \partial_R, \partial_R \cdot \partial_R$, the differential equations for generation functions are the form

$$
\begin{aligned}
K_i \cdot \partial_R c_T &= \alpha_i c_T + H_{T;i}, \quad i = 1, 2, ..., n \\
\partial_R \cdot \partial_R c_T &= \alpha_R c_T + H_{T;R}
\end{aligned}
$$

For example

$$
K \cdot \partial_R I_{bub}(t, R) = \int d\ell \frac{t(2K \cdot \ell) e^{t(2\ell \cdot R)}}{(\ell^2 - M_0^2)((\ell - K)^2 - M_1^2)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int d\ell \frac{t(D_0 - D_1 + f) e^{t(2\ell \cdot R)}}{(\ell^2 - M_0^2)((\ell - K)^2 - M_1^2)} \\
&= tf I_{bub}(t, R) - t \int d\ell \frac{e^{t(2\ell \cdot R)}}{(\ell^2 - M_0^2)} + t e^{t(2K \cdot R)} \int d\ell \frac{e^{t(2\ell \cdot R)}}{(\ell^2 - M_1^2)}
\end{aligned}
$$

How to solve above differential equations? The first step: Finding the right variables!!

- The good variables x and $y_i, i = 1, ..., n$ are defined by following conditions

$$(K_i \cdot \partial_R)x = 0, \qquad (K_i \cdot \partial_R)y_j \sim \delta_{ij}, \qquad \forall i, j = 1, ..., n$$

- Let us define the Gram matrix and vector as

$$G_{ij} = K_i \cdot K_j, \qquad (P^T)_i = K_i \cdot R$$

and assume

$$y_j = \sum_t \beta_{jt} p_t$$

- Noticing that

$$K_i \cdot \partial_R y_j = \sum_t \beta_{jt}(K_t \cdot K_i) \sim \delta_{ij}$$

thus the matrix β can be solved as

$$\beta = |G|G^{-1}$$

where $|G|$ is the Gram determinant

- For x, let us assume

$$x = |G|r + P^T AP, \qquad A^T = A$$

Since

$$K_i \cdot \partial_R x \;=\; |G|2p_i + 2(P^T)_{R\to K_i} AP,$$

where $P_{R\to K_i}$ means to replace vector R by the vector K_i. Collecting all i together, the right hand side is just

$$(2|G|I + 2GA)P$$

thus we have the solution

$$A = -|G|G^{-1}$$

- Putting everything together, we finally have

$$x = |G|(r - P^T G^{-1} P), \qquad Y = |G| G^{-1} P$$

- With above good variables, we can see that

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \cdot \partial_R &= |G| \partial_Y \\ \partial_R \cdot \partial_R &= 2|G|(D-n)\partial_x + 4|G| x \partial_x^2 \\ &\quad + |G|^2 \partial_Y^T G^{-1} \partial_Y \end{aligned}$$

where we have defined $\mathcal{K}^T = (K_1, ..., K_n)$ and $\partial_Y^T = (\partial_{y_1}, ..., \partial_{y_n})$.

- The differential equations can be written as

$$\left(\partial_{y_i} - \frac{\alpha_i}{|G|}\right) c_T \;=\; \frac{1}{|G|} H_{T;i} \quad i = 1, 2, ..., n$$

and

$$\left(4|G|x\partial_x^2 + 2|G|(D-n)\partial_x + \widetilde{\alpha}_R\right) c_T \;=\; \mathcal{H}_{T;R}$$

with

$$\begin{aligned}
\widetilde{\alpha}_R &= \alpha_{\mathcal{K}}^T G^{-1} \alpha_{\mathcal{K}} - \alpha_R, \\
\mathcal{H}_{T;R} &= -H_{T;\mathcal{K}}^T G^{-1} \alpha_{\mathcal{K}} - |G| \partial_Y^T G^{-1} H_{T;\mathcal{K}} + H_{T;R}
\end{aligned}$$

- Solving $K \cdot \partial_R$ we get

$$c_T(x, y_1, \ldots, y_n) = e^{\frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{|G|}} F(x) + \mathcal{H}_{T;K}$$

with

$$\mathcal{H}_{T;K} = \frac{1}{|G|} \widetilde{\sum}_{i=n}^{1} e^{\frac{\widetilde{\sum}_{j=n}^{i} \alpha_j y_j}{|G|}} \int_0^{y_i} dw_i e^{\frac{-\alpha_i w_i}{|G|}} H_{T;i}(x, y_1, \ldots, y_{i-1}, w_i, 0, \ldots, 0)$$

where for simplicity we have defined the sum $\widetilde{\sum}_{i=a}^{b}$ to mean to take the sum over $(a, a-1, a-2, \ldots, b)$ with $a \geq b$.

- The equation of $F(x)$ is

$$
\begin{aligned}
& \left(4|G|x\partial_x^2 + 2|G|(D-n)\partial_x + \widetilde{\alpha}_R\right) F(x) \\
= \quad & e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i}{|G|}} \left(\mathcal{H}_{T;R} - \left(4|G|x\partial_x^2 + 2|G|(D-n)\partial_x + \widetilde{\alpha}_R\right)\mathcal{H}_{T;K}\right.
\end{aligned}
$$

One can use the integrability conditions to check that the right hand side is y_i-independent. Setting $y_i = 0$ we get

$$
\begin{aligned}
& \left(4|G|x\partial_x^2 + 2|G|(D-n)\partial_x + \widetilde{\alpha}_R\right) F(x) \\
= \quad & \mathcal{H}_{T;R}(x, 0, 0, ..., 0)
\end{aligned}
$$

- Finally we have

$$F(x) = F_0(x)\left(f_0 + \int_0^x dw w^{-\frac{(D-n)}{2}} e^{-2F_0(w)} \int_0^w d\xi \frac{1}{A}\mathcal{H}_{T;R}(x,0,0,\ldots,0) F_0^{-1}(\xi) e^{2F_0(\xi)} \xi^{\frac{(D-n)}{2}-1}\right)$$

where

$$F_0(x) = {}_0F_1\left(\emptyset; \frac{(D-n)}{2}; \frac{-\widetilde{\alpha}_R x}{4|G|}\right)$$

- For a special case, where all $H_{T;i}, H_{T;R}$ are zero. For this case, we can write down immediately the generation function

$$c_{n+1\to n+1}(R, K_1, ..., K_n) = {}_0F_1(\emptyset; \frac{(D-n)}{2}; \frac{-\widetilde{\alpha}_R x}{4|G|})e^{\frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i y_i}{|G|}}$$

where the generalized hypergeometric function is defined as

$${}_AF_B(a_1, ..., a_A; b_1, ..., b_B; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n ... (a_A)_n}{(b_1)_n ... (b_B)_n} \frac{x^n}{n!}$$

with the **Pochhammer symbol**

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = \prod_{i=1}^{n}(x+(i-1))$$

第 5 节：IBP 方法简单介绍

积分约化中, 还有一种方法叫"IBP 方法"(Integration-by-part). 这是目前应用最广泛的方法. 其优点是可以很容易推广到高圈. 关于这个方法的讨论, 可以参考

[Stefan Weinzierl, e-Print: 2201.03593]

这本书包括了最新发展的许多内容.

IBP 关系是说, 在维数正规化下的圈积分, 有

$$\int \prod_{r=1}^{l} \frac{d^D k_r}{i\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{\partial}{\partial k_i^\mu} q_{\mathrm{IBP}}^\mu \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\left(-q_j^2 + m_j^2\right)^{\nu_j}} = 0 \tag{57}$$

这里 q_{IBP}^μ 是由外动量和圈动量构成的一阶张量的任意多形式. 这个结果的理解如下:

- 由于积分动量的平移不变性, 有

$$\int \frac{d^D k}{i\pi^{\frac{D}{2}}} f(k) = \int \frac{d^D k}{i\pi^{\frac{D}{2}}} f(k + \lambda q) \tag{58}$$

不依赖 λ, 得到其一阶展开积分为零

$$\left[\frac{d}{d\lambda} f(k+\lambda q)\right]\Bigg|_{\lambda=0} = q^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu} f(k) = \frac{\partial}{\partial k^\mu}\left[q^\mu \cdot f(k)\right] \tag{59}$$

为了演示上面 IBP 关系对 q 是圈动量也成立, 考虑标度变换

- 首先有

$$\int \frac{d^D k}{i\pi^{\frac{D}{2}}} f(k) = (1+\lambda)^D \int \frac{d^D k}{i\pi^{\frac{D}{2}}} f(k+\lambda k) \tag{60}$$

- 左边不依赖 λ, 右边的一阶展开是

$$\begin{aligned} (1+\lambda)^D &= 1 + D\lambda \\ f(k+\lambda k) &= f(k) + \lambda k^\mu \frac{\partial}{\partial k^\mu} f(k) \end{aligned} \tag{61}$$

- 利用

$$k^{\mu}\frac{\partial}{\partial k^{\mu}}f\left(k\right) = \frac{\partial}{\partial k^{\mu}}\left[k^{\mu}\cdot f\left(k\right)\right]-Df\left(k\right) \tag{62}$$

立即得到

$$0=\int\frac{d^{D}k}{i\pi^{\frac{D}{2}}}\frac{\partial}{\partial k^{\mu}}\left[k^{\mu}\cdot f\left(k\right)\right] \tag{63}$$