现代散射振幅的在壳纲领–一圈图的现代计算之幺正切割

冯波

浙江大学物理系，北京计算科学研究中心

2023 年 8 月 4 日

Contents

Contents

Contents

第 1 节：思想

振幅作为外动量形成的洛伦兹不变组合的函数时，具有非常丰富的解析结构，一个常见的现象是当满足某些条件时，有

$$\lim_{\eta\to 0}[A(s+i\eta)-A(s-i\eta)]\neq 0 \tag{1}$$

这个不连续性的大小正比于振幅的虚部。利用 Cutkosky rule, 虚部计算可以通过把对应两条内线传播子做如下的替代

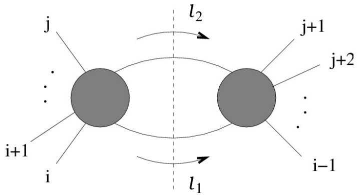
$$(p^2-m^2)^{-1}\to\delta(p^2-m^2)$$

也就是“放在壳上”，或者说“进行了切割” [Cutkosky, 1960]

用公式表示就是

$$Im(A) = \int d\ell A_L A_R \delta(\ell_1^2)\delta(\ell_2^2) \tag{2}$$

而图示是



这就是幺正切割计算“虚部”的图像！

由约化，我们知道，振幅可以分解为

$$A = \sum_i c_i I_i \tag{3}$$

特别是约化系数是有理函数。如果我们取两边的虚部，我们得到

$$Im(A) = \sum_i c_i Im(I_i) \tag{4}$$

因为不同的基，$Im(I_i)$ 是不同的解析函数，如果我们能解析计算 $Im(A)$，那么通过匹配两边的解析函数，我们就可以提取约化系数。这就是 么正切割方案进行约化的基本思想！

- 该思想首先由 Bern, Dixon and Kosower 建议

[Bern, Dixon,Dunbar, Kosower, 1994]

- 它的一大优势是 (2) 中的 A_L, A_R 都是规范不变的量，所以避免了庞大的输入！
- 但是困难的所在是：如何进行 (2) 中的积分？我们知道，即使是单变量积分，许多情况下都无法解析完成，更何况多维积分

这里，我们将讨论，如果完成这样的积分计算。为了易于理解，我们先考虑如下情况：(a) 无质量的情况；(b) 先局限于纯四维，而不是一般维数 $(4-2\epsilon)$

第 2 节：纯四维约化积分的计算

- 对纯四维，由于两个 delta 函数的存在，变为 2 维积分。
- 一个关键是这个 2 维积分，可以等价于一个复平面的计算。然后把复平面的积分，化为一个全微分，加上一个“反常项”。前者贡献为零，反常项变为围绕奇点的留数计算。这样就把积分完全转为“纯代数计算”。

[Cachazo, Svrcek, Witten, 2004]　[Britto, Buchbinder, Cachazo, Feng, 2005]

- 为了理解，先看如下一个简单例子：

$$
\begin{aligned}
& \int dz d\bar{z} \frac{1}{z-b} \partial_{\bar{z}} \frac{1}{\bar{z}-a} \\
= & \int dz d\bar{z} \partial_{\bar{z}} \left(\frac{1}{z-b} \frac{1}{\bar{z}-a} \right) \\
& - \int dz d\bar{z} \frac{1}{\bar{z}-a} \partial_{\bar{z}} \frac{1}{z-b} \\
= & - \int dz d\bar{z} \frac{1}{\bar{z}-a} 2\pi \delta^2(z-b) \\
= & -2\pi \frac{1}{\bar{b}-a}
\end{aligned}
$$

下面我们演示如何利用旋量来进行约化相空间积分：

- 一般的积分是

$$C[K] = \int d^4\ell_1 d^4\ell_2 \delta^4(\ell_1+\ell_2-K)\delta^{(+)}(\ell_1^2)\delta^{(+)}(\ell_2^2) A_L(\ell_1,\ldots,\ell_2)A_R(-\ell_1,\ldots,-\ell_2) \tag{5}$$

- 利用 delta 函数，积分化为

$$\int d^4\ell\delta^+(\ell^2)\delta^+((K-\ell)^2) \tag{6}$$

- 利用旋量符号，

$$\int d^4\ell\delta^{(+)}(\ell^2)\ (\bullet) = \int_0^\infty dt\ t \int \langle\lambda, d\lambda\rangle \left[\tilde\lambda, d\tilde\lambda\right] (\bullet), \tag{7}$$

- 利用

$$\delta((K-\ell)^2) = \delta(K^2 - 2K\cdot\ell) = \delta(K^2 - t\langle\ell|K|\ell]) \\ = \delta(-K^2 + t\langle\ell|K|\ell]) = \frac{1}{\langle\ell|K|\ell]}\delta\left(t - \frac{K^2}{\langle\ell|K|\ell]}\right) \tag{8}$$

得到

$$\int dtt \int \langle\lambda, d\lambda\rangle \left[\tilde\lambda, d\tilde\lambda\right] \delta((K-\ell)^2) G(\lambda, \tilde\lambda, t) \\ = \int \langle\lambda, d\lambda\rangle \left[\tilde\lambda, d\tilde\lambda\right] \frac{K^2}{\left\langle\lambda|K|\tilde\lambda\right]^2} G(\lambda, \tilde\lambda, \frac{K^2}{\left\langle\lambda|K|\tilde\lambda\right]}) \tag{9}$$

- 下一步，改写

$$\left[\tilde{\lambda}, d\tilde{\lambda}\right] \frac{K^2}{\left\langle\lambda|K|\widetilde{\lambda}\right]^2} G(\lambda, \tilde{\lambda}, \frac{K^2}{\left\langle\lambda|K|\widetilde{\lambda}\right]}) = \left[d\widetilde{\lambda}, \widetilde{\lambda}\right] \widetilde{G}(\lambda, \widetilde{\lambda}) \quad (10)$$

- 由于同样的原因，得到

$$\begin{aligned} &\int \langle\lambda, d\lambda\rangle \left[\tilde{\lambda}, d\tilde{\lambda}\right] \frac{K^2}{\left\langle\lambda|K|\widetilde{\lambda}\right]^2} G(\lambda, \tilde{\lambda}, \frac{K^2}{\left\langle\lambda|K|\widetilde{\lambda}\right]}) \\ = &\int \langle\lambda, d\lambda\rangle \left[d\widetilde{\lambda}, \widetilde{\lambda}\right] \widetilde{G}(\lambda, \widetilde{\lambda}) + \sum_{pole\ \ of\ \ \lambda} \mathrm{Res}(\widetilde{G}(\lambda, \widetilde{\lambda})) \quad (11) \end{aligned}$$

- 故最后

$$C[K] = \sum_{pole\ \ of\ \ \lambda} \mathrm{Residue}(\widetilde{G}(\lambda, \widetilde{\lambda})) \quad (12)$$

让我们首先计算 Bubble 基的虚部：

$$
\begin{aligned}
&\int d^4\ell\delta(\ell^2)\delta((\ell-K)^2)\\
=&\int \langle\lambda|d\lambda\rangle\left[\widetilde{\lambda}|d\widetilde{\lambda}\right]\int tdt\delta(K^2-t\left\langle\lambda|K|\widetilde{\lambda}\right])\\
=&\int \langle\lambda|d\lambda\rangle\left[\widetilde{\lambda}|d\widetilde{\lambda}\right]\frac{K^2}{\left\langle\lambda|K|\widetilde{\lambda}\right]^2}\\
=&\int \langle\lambda|d\lambda\rangle\left[d\widetilde{\lambda}|\frac{\partial}{\partial\widetilde{\lambda}}\right]\left(\frac{K^2\left[\eta|\widetilde{\lambda}\right]}{\langle\lambda|K|\eta]\left\langle\lambda|K|\widetilde{\lambda}\right]}\right)=-1
\end{aligned}
$$

在这个表达式中，只有一个“holomorphic pole”，因此其奇点是

$$|\lambda_p\rangle = \alpha\,|K|\eta], \qquad \left|\widetilde{\lambda}_p\right] = \alpha^*\,|K|\eta\rangle \tag{13}$$

$$\frac{K^2\left[\eta|\widetilde{\lambda}\right]}{\langle\lambda|K|\eta]\left\langle\lambda|K|\widetilde{\lambda}\right]} = \frac{1}{\langle\lambda|\lambda_p\rangle}\frac{\alpha K^2\left[\eta|\widetilde{\lambda}\right]}{\left\langle\lambda|K|\widetilde{\lambda}\right]} \tag{14}$$

而留数是

$$\left(\frac{\alpha K^2\left[\eta|\widetilde{\lambda}\right]}{\left\langle\lambda|K|\widetilde{\lambda}\right]}\right)\Bigg|_{|\lambda\rangle\to|\lambda_p\rangle,\left|\widetilde{\lambda}\right]\to\left|\widetilde{\lambda}_p\right]} = -1 \tag{15}$$

考虑三角基：

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 I_3^{3m} &= -\int d^4\ell\delta^{(+)}(\ell^2)\frac{\delta^{(+)}((\ell-K_1)^2)}{(\ell+K_3)^2}\\
= & \quad -\int_0^\infty tdt\int\langle\lambda\ d\lambda\rangle\,[\widetilde{\lambda}\ d\widetilde{\lambda}]\frac{\delta(K_1^2-tK_{1,a\dot{a}}\lambda^a\widetilde{\lambda}^{\dot{a}})}{K_3^2+tK_{3,a\dot{a}}\lambda^a\widetilde{\lambda}^{\dot{a}}}\\
= & \quad -\int\langle\lambda\ d\lambda\rangle\,[\widetilde{\lambda}\ d\widetilde{\lambda}]\frac{K_1^2}{(K_{1,a\dot{a}}\lambda^a\widetilde{\lambda}^{\dot{a}})^2}\frac{(K_{1,a\dot{a}}\lambda^a\widetilde{\lambda}^{\dot{a}})}{K_3^2(K_{1,a\dot{a}}\lambda^a\widetilde{\lambda}^{\dot{a}})+K_1^2(K_{3,a\dot{a}}\lambda^a\widetilde{\lambda}^{\dot{a}})}\\
= & \quad -\int\langle\lambda\ d\lambda\rangle\,[\widetilde{\lambda}\ d\widetilde{\lambda}]\frac{1}{(K_{1,a\dot{a}}\lambda^a\widetilde{\lambda}^{\dot{a}})(Q_{a\dot{a}}\lambda^a\widetilde{\lambda}^{\dot{a}})} \qquad (16)
\end{aligned}
$$

这里 $Q_{a\dot{a}} = \frac{K_3^2}{K_1^2}(K_{1,a\dot{a}}) + (K_{3,a\dot{a}})$

费曼参数化

$$\frac{1}{(K_{1,a\dot{a}}\lambda^a\widetilde{\lambda}^{\dot{a}})(Q_{a\dot{a}}\lambda^a\widetilde{\lambda}^{\dot{a}})} = \int_0^1 dx \frac{1}{(((1-x)K+xQ)_{a\dot{a}}\lambda^a\widetilde{\lambda}^{\dot{a}})^2} \tag{17}$$

然后完成旋量积分得到

$$\begin{aligned}&\int_0^1 dx \frac{1}{((1-x)K+xQ)^2} \\ =\ & \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\ln\frac{2Q^2-\sqrt{\Delta}}{2Q^2+\sqrt{\Delta}} - \ln\frac{2(-K_2\cdot K_3-K_1^2)-\sqrt{\Delta}}{2(-K_2\cdot K_3-K_1^2)+\sqrt{\Delta}}\right)\end{aligned} \tag{18}$$

这里

$$\Delta = (K_1^2)^2+(K_2^2)^2+(K_3^2)^2-2K_1^2K_2^2-2K_2^2K_3^2-2K_3^2K_1^2. \tag{19}$$

为三角基的 Gram 行列式!

练习：完成 Box 基的虚部计算!!!

上面两类计算其实是所有虚部计算中能碰到的典型。这也和 4 维一圈图的积分解析结构自洽：我们会碰到 $\log$，$\log^2$ 和 Li_2 函数，而它们的虚部是有理数和 $\log$ 函数

上面的系统方案中，其实有几个技术性难点：

- 对一般的输入，如何完成

$$\left[\tilde{\lambda}, d\tilde{\lambda}\right] \frac{K^2}{\left\langle\lambda|K|\widetilde{\lambda}\right]^2} G(\lambda, \tilde{\lambda}, \frac{K^2}{\left\langle\lambda|K|\widetilde{\lambda}\right]}) = \left[d\widetilde{\lambda}, \widetilde{\lambda}\right] \widetilde{G}(\lambda, \widetilde{\lambda}) \quad (20)$$

- 如何读出留数？

先考虑第一个问题：对一般的输入，完成 t 积分后，一般形式是

$$\frac{[\ell\ d\ell]\prod_{i=1}^{n}[\eta_i\ \ell]}{\prod_{j=1}^{n+2}[\widetilde{\eta}_j\ \ell]} \tag{21}$$

这里的关键是它可以被分解为如下两种简单形式的线性组合，而系数只是 λ 的函数：

$$\frac{[\ell\ d\ell][\eta\ \ell]^n}{[\widetilde{\eta}\ \ell]^{n+2}}(n\geq 0),\qquad \frac{[\ell\ d\ell]}{[\widetilde{\eta}_1\ \ell][\widetilde{\eta}_2\ \ell]} \tag{22}$$

上面结论的证明比较直接：

- 分母至少 3 个不同因子时，

$$
\begin{aligned}
\frac{[\eta|\ell]}{[\widetilde{\eta}_1|\ell]\,[\widetilde{\eta}_2|\ell]\,[\widetilde{\eta}_3|\ell]} &= \frac{[\widetilde{\eta}_1|\widetilde{\eta}_2]\,[\eta|\ell]}{[\widetilde{\eta}_1|\ell]\,[\widetilde{\eta}_2|\ell]\,[\widetilde{\eta}_3|\ell]\,[\widetilde{\eta}_1|\widetilde{\eta}_2]} \\
&= \frac{[\widetilde{\eta}_1|\ell]\,[\eta|\widetilde{\eta}_2]+[\widetilde{\eta}_1|\eta]\,[\widetilde{\eta}_2|\ell]}{[\widetilde{\eta}_1|\ell]\,[\widetilde{\eta}_2|\ell]\,[\widetilde{\eta}_3|\ell]\,[\widetilde{\eta}_1|\widetilde{\eta}_2]} \\
&= \frac{[\eta|\widetilde{\eta}_2]}{[\widetilde{\eta}_2|\ell]\,[\widetilde{\eta}_3|\ell]\,[\widetilde{\eta}_1|\widetilde{\eta}_2]}+\frac{[\widetilde{\eta}_1|\eta]}{[\widetilde{\eta}_1|\ell]\,[\widetilde{\eta}_3|\ell]\,[\widetilde{\eta}_1|\widetilde{\eta}_2]}
\end{aligned} \tag{23}
$$

- 重复使用，最后留下两种类型的和：

$$
\frac{[\ell\ d\ell]\prod_{i=1}^{n}[\eta_i\ \ell]}{[\widetilde{\eta}\ \ell]^{n+2}}, \qquad \frac{[\ell\ d\ell]}{[\widetilde{\eta}_1\ \ell][\widetilde{\eta}_2\ \ell]} \tag{24}
$$

- 在简化了分母后，我们考虑分子。对至少三个不同的分子

$$\frac{[a\ \ell][b\ \ell][c\ \ell][a\ b]}{[a\ b]} = \frac{[a\ \ell][b\ \ell]([a\ \ell][c\ b]+[a\ c][b\ \ell])}{[a\ b]}$$
$$= \quad [a\ \ell]^2[b\ \ell]\frac{[c\ b]}{[a\ b]}+[a\ \ell][b\ \ell]^2\frac{[a\ c]}{[a\ b]} \tag{25}$$

- 重复应用后，最后留下两种类型的和：

$$\frac{[\ell\ d\ell][\eta_1\ \ell]^m[\eta_2\ \ell]^{n-m}}{[\widetilde{\eta}\ \ell]^{n+2}}, \qquad \frac{[\ell\ d\ell]}{[\widetilde{\eta}_1\ \ell][\widetilde{\eta}_2\ \ell]} \tag{26}$$

- 对 $m \neq 0$，利用

$$
\begin{aligned}
\frac{[\eta_1\ \ell][\eta_2\ \ell]}{[\widetilde{\eta}\ \ell]} &= \frac{[\eta_1\ \ell][\eta_2\ \ell][\eta_2\ \widetilde{\eta}]}{[\widetilde{\eta}\ \ell][\eta_2\ \widetilde{\eta}]} \\
&= \frac{([\eta_1\ \eta_2][\ell\ \widetilde{\eta}] + [\ell_1\ \widetilde{\eta}][\eta_2\ \ell])[\eta_2\ \ell]}{[\widetilde{\eta}\ \ell][\eta_2\ \widetilde{\eta}]} \\
&= \frac{-[\eta_1\ \eta_2][\eta_2\ \ell]}{[\eta_2\ \widetilde{\eta}]} + \frac{[\ell_1\ \widetilde{\eta}][\eta_2\ \ell]^2}{[\widetilde{\eta}\ \ell][\eta_2\ \widetilde{\eta}]}
\end{aligned}
\tag{27}
$$

- 重复利用，最终我们得到 (22)

现在我们只需对 (22) 的两种标准形式，考虑如何写成全微分形式：

- 首先，很容易验证

$$
\begin{aligned}
& [\mu\ \partial_\ell]\left(\frac{-1}{(n+1)[\widetilde{\eta}\ \eta]}\frac{[\eta\ \ell]^{n+1}}{[\widetilde{\eta}\ \ell]^{n+1}}\right) \\
= \quad & \frac{-1}{[\widetilde{\eta}\ \eta]}\frac{[\eta\ \ell]^{n}}{[\widetilde{\eta}\ \ell]^{n+2}}([\mu\ \eta][\widetilde{\eta}\ \ell]-[\eta\ \ell][\mu\ \widetilde{\eta}]) \\
= \quad & \frac{[\ell\ \mu][\eta\ \ell]^{n}}{[\widetilde{\eta}\ \ell]^{n+2}}
\end{aligned}
\tag{28}
$$

- 利用上面结果，我们马上有

$$\frac{[\ell\ d\ell][\eta\ \ell]^n}{[\widetilde{\eta}\ \ell]^{n+2}} = [d\ell\ \partial_\ell]\left(\frac{-1}{(n+1)[\widetilde{\eta}\ \eta]}\frac{[\eta\ \ell]^{n+1}}{[\widetilde{\eta}\ \ell]^{n+1}}\right) \tag{29}$$

- 对另一种，利用

$$\int_0^1 \frac{dx}{[(x\widetilde{\eta}_1+(1-x)\widetilde{\eta}_2|\ell]^2} = \frac{1}{[\widetilde{\eta}_1\ \ell][\widetilde{\eta}_2\ \ell]} \tag{30}$$

从而 $(\widetilde{\eta} = x\widetilde{\eta}_1 + (1-x)\widetilde{\eta}_2)$

$$\frac{[\ell\ d\ell]}{[\widetilde{\eta}_1\ \ell][\widetilde{\eta}_2\ \ell]} = \int_0^1 \frac{dx[\ell\ d\ell]}{[\widetilde{\eta}|\ell]^2} = \int_0^1 dx[d\ell\ \partial_\ell]\left(\frac{-1}{[\widetilde{\eta}\ \eta]}\frac{[\eta\ \ell]}{[\widetilde{\eta}\ \ell]}\right) \tag{31}$$

现在我们讨论第二个问题：如何计算留数？

我们碰到的奇点分为两类：单奇点和高阶奇点。

单奇点的留数计算，在 bubble 基的计算中已经详细展示了。

现在讨论高阶奇点的留数计算。hep-ph/0612089 中介绍了三种方法，这里我们介绍最直接的一种。利用

$$\frac{d}{d\tau^{n-1}}\frac{1}{\langle\ell|\eta-\tau s\rangle}=\frac{(n-1)!\,\langle\ell|s\rangle^{n-1}}{\langle\ell|\eta-\tau s\rangle^{n}},\tag{32}$$

我们可以改写

$$\begin{aligned}\frac{1}{\langle\ell|\eta\rangle^{n}}\frac{\prod_i\langle\ell|a_i\rangle}{\prod_j\langle\ell|b_j\rangle}&\to\frac{1}{\langle\ell|\eta-\tau s\rangle^{n}}\frac{\prod_i\langle\ell|a_i\rangle}{\prod_j\langle\ell|b_j\rangle}\\&=\frac{d}{d\tau^{n-1}}\left(\frac{1}{\langle\ell|\eta-\tau s\rangle}\frac{1}{(n-1)!\,\langle\ell|s\rangle^{n-1}}\frac{\prod_i\langle\ell|a_i\rangle}{\prod_j\langle\ell|b_j\rangle}\right).\end{aligned}$$

现在，我们可以利用单奇点的公式读出留数。最后得到高阶奇点留数为

$$\text{Residue} = \frac{d}{d\tau^{n-1}} \left(\frac{1}{(n-1)! \langle \eta | s \rangle^{n-1}} \frac{\prod_i \langle (\eta - \tau s) | a_i \rangle}{\prod_j \langle (\eta - \tau s) | b_j \rangle} \right)_{\tau \to 0} . \quad (33)$$

一个技术性细节：求高阶奇点的留数时，我们需要直接令 $|\ell] = |\eta]$。其中一个理解是如果写为 $|\ell] = |\eta] - \tau^* |s]$，出现的是 τ^* 而不是 τ。另一个是用文献 0612089 中介绍的其它方法计算!。参看 0711.4284 的附录 B

另一个技术性细节是我们会碰到如下的组合：$\langle \ell|QP|\ell\rangle$。对此我们操作如下：

- 通过求解

$$(Q+xP)^2=0, \quad \Longrightarrow x_\pm = \frac{-2Q\cdot P \pm \sqrt{\Delta}}{2P^2}.$$
$$\Delta = 4((Q\cdot P)^2 - Q^2P^2) \tag{34}$$

  得到两个 null 动量 P_+, P_-

- 可以验证

$$\langle \ell|QP|\ell\rangle = \frac{1}{(x_+ - x_-)}\langle \ell|P_+\rangle [P_+|P_-] \langle \ell|P_-\rangle\,. \tag{35}$$

第 3 节：维数正规化下的幺正切割方案

如果在纯四维下计算的基的虚部，会发现某些情况下得到无穷大的结果。这是因为圈积分会有紫外和红外发散，因此为了积分的良好定义，需要引入“正规化”方案。对费曼积分，标准的正规化方案是“维数正规化”方案。因此为了能利用幺正切割进行完整约化，我们需要建立“维数正规化下的幺正切割方案”

[Charalampos Anastasiou, Ruth Britto, Bo Feng, Zoltan Kunszt, Pierpaolo Mastrolia, hep-ph/0609191,hep-ph/0612277]

这里有两个细节，关于 $(4-2\epsilon)$ 维数的约化：

- 约化系数是 ϵ 的有理函数。一个简单理解是在 PV 约化中，当张量结构乘以 $g_{\mu\nu}$ 时，$g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}=D=4-2\epsilon$.
- 约化系数中 ϵ 展开的高阶项，其实对高圈计算的正确性是非常重要的
- 这里我们的正规化方案是内线动量 p 在 $(4-2\epsilon)$ 维，而所有外线动量都在纯 4 维。此时标量 Pentagon 拓扑将是必须的基。

练习：证明一圈高点拓扑都不是新基！

第 3.1 节：框架的建立

现在我们开始系统的讨论。

- 首先我们所有的讨论是基于 four-dimensional helicity (FDH) scheme：即所有外线动量 K_i 都在纯 4 维，只有内线动量 p 在 $(4-2\epsilon)$ 维
- 其次，我们的讨论以“无质量”情况为例。在维数正规化下，有质量和无质量理论的框架没有本质的区别，只是表达式更为复杂。
- 我们分解 $p=\widetilde{\ell}+\vec{\mu}$。这里 $\widetilde{\ell}$ 是纯四维，而 $\vec{\mu}$ 在额外的 (-2ϵ)-维。这是新框架的第一个技术点！

- 此时测度变为

$$\int \frac{d^{4-2\epsilon}p}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} = \int \frac{d^4\widetilde{\ell}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{-2\epsilon}\ell_\epsilon}{(2\pi)^{-2\epsilon}}$$
$$= \int \frac{d^4\widetilde{\ell}}{(2\pi)^4} \frac{(4\pi)^\epsilon}{\Gamma(-\epsilon)} \int d\mu^2 \, (\mu^2)^{-1-\epsilon},$$

这里的关键是因为用了 FDH，$\vec{\mu}$ 只能自我收缩为径向 μ^2 的函数，球面坐标部分可以平庸积出。

- 现在，一个一般的积分就可以写为

$$I_n = \int \frac{d^{4-2\epsilon}p}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \frac{1}{p^2(p-K_1)^2 \ldots (p-\sum_{j=1}^{n-1} K_j)^2}.$$
$$= \frac{(4\pi)^\epsilon}{\Gamma(-\epsilon)} \int d\mu^2 (\mu^2)^{-1-\epsilon} \int \frac{d^4\widetilde{\ell}}{(2\pi)^4}$$
$$\frac{1}{(\widetilde{\ell}^2-\mu^2)((\widetilde{\ell}-K_1)^2-\mu^2)\ldots((\widetilde{\ell}-\sum_{j=1}^{n-1} K_j)^2-\mu^2)}. \quad (36)$$

- 注意，对纯四维的 $\int \frac{d^4\widetilde{\ell}}{(2\pi)^4}$，$\mu^2$ 等价于质量，所以我们后面的讨论，其实也给出纯四维时有质量的幺正切割相空间的积分。同时，这个等效质量，也把红外的发散消除了。
- 为了能利用旋量的积分形式，取定一个非 Null 动量 K，展开为

$$\widetilde{\ell} = \ell + zK, \qquad \ell^2 = 0 \tag{37}$$

可以验证，测度变为

$$\int d^4\widetilde{\ell} = \int dz\ d^4\ell\ \delta^+(\ell^2)(2\ell \cdot K) \tag{38}$$

这是新框架的第二个技术点！

在后面的实际计算中，该 K 取 Cut 道的动量最方便！

- 为了后续方便，我们定义

$$u = \frac{4\mu^2}{K^2}. \tag{39}$$

并且动力学讨论，可以显示 $u \in [0,1]$。如此

$$\begin{aligned} & \frac{(4\pi)^\epsilon}{(2\pi)^4\Gamma(-\epsilon)} \int d\mu^2\ (\mu^2)^{-1-\epsilon} \\ \to\ & \frac{(4\pi)^\epsilon}{(2\pi)^4\Gamma(-\epsilon)} \left(\frac{K^2}{4}\right)^{-\epsilon} \int_0^1 du\ u^{-1-\epsilon}. \end{aligned} \tag{40}$$

因为蓝色的因子在切割类计算中是同时出现在方程两边，为了简单，我们可以略去它。注意，在其它的应用中，因为该因子含 ϵ, K，它会有相应贡献!!

- 到此，一般的积分可以改写为

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{d^{4-2\epsilon}p}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \frac{1}{p^2(p-K_1)^2 \ldots (p-\sum_{j=1}^{n-1} K_j)^2}. \\
&\to \int_0^1 du\ u^{-1-\epsilon} \int dz\ d^4\ell\ \delta^+(\ell^2)(2\ell\cdot K) \\
&\quad \frac{1}{(\widetilde{\ell}^2-\mu^2)((\widetilde{\ell}-K_1)^2-\mu^2)\ldots((\widetilde{\ell}-\sum_{j=1}^{n-1} K_j)^2-\mu^2)}, \qquad (41)
\end{aligned}
$$

到此，$(4-2\epsilon)$ 维数下幺正切割方案框架的第一步完成！

第二步是考虑此时的幺正切割相空间。为了清楚演示，我们考虑 Bubble 的切割：

- 利用结果 (41)

$$
\begin{aligned}
C[I_2(K)] &= \int_0^1 du\, u^{-1-\epsilon} \int dz\, d^4\ell\, \delta^+(\ell^2)(2\ell\cdot K) \\
&\quad \delta(\widetilde{\ell}^2-\mu^2)\delta((\widetilde{\ell}-K)^2-\mu^2), \qquad (42)
\end{aligned}
$$

- 代人 $\widetilde{\ell}=\ell+zK$，两个 delta 函数变成

$$
\begin{aligned}
& \delta(\widetilde{\ell}^2-\mu^2)\delta((\widetilde{\ell}-K)^2-\mu^2) \\
= & \delta(\widetilde{\ell}^2-\mu^2)\delta(K^2-2K\cdot\widetilde{\ell}) \\
= & \delta(z^2K^2+2zK\cdot\ell-\mu^2)\delta((1-2z)K^2-2K\cdot\ell) \\
= & \delta(z(1-z)K^2-\mu^2)\delta((1-2z)K^2-2K\cdot\ell) \qquad (43)
\end{aligned}
$$

- 这样我们得到

$$C[I_2(K)] = \int_0^1 du\ u^{-1-\epsilon} \int dz(1-2z)K^2\delta(z(1-z)K^2-\mu^2)$$
$$\int d^4\ell\ \delta^+(\ell^2)\delta((1-2z)K^2-2K\cdot\ell) \tag{44}$$

- 公式 (44) 把纠缠的积分分解开来：蓝色部分的 z 积分，因为 delta 函数的存在，可以被积出。红色部分就是我们熟悉的 无质量纯四维约化相空间的积分，除了因子 $(1-2z)$ 的稍微修改。

- 动力学分析，可以知道 z 积分给出

$$z = (1 - \sqrt{1-u})/2 \tag{45}$$

- 对红色的旋量积分后 (作为练习！)，我们得到

$$C[I_2(K)] = \int_0^1 du\ u^{-1-\epsilon}\sqrt{1-u} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(-\epsilon)}{2\Gamma(\frac{3}{2}-\epsilon)}, \tag{46}$$

现在我们可以给出 $(4-2\epsilon)$ 维中无质量理论的幺正切割的一般积分表达式：

$$\begin{aligned} C &= \int_0^1 du\ u^{-1-\epsilon} \int d^4\ell\ \delta^+(\ell^2)\delta((1-2z)K^2 - 2K\cdot\ell) \\ &\quad A_L(\widetilde{\ell}_1, \widetilde{\ell}_2) A_R(\widetilde{\ell}_1, \widetilde{\ell}_2), \end{aligned} \tag{47}$$

这里

$$\widetilde{\ell}_2 = K - \widetilde{\ell}_1, \quad \widetilde{\ell}_1^2 = \widetilde{\ell}_2^2 = \mu^2, \quad \widetilde{\ell}_1 = \ell + zK. \tag{48}$$

以及

$$\mu^2 = \frac{K^2}{4} u, \qquad z = \frac{1-\sqrt{1-u}}{2}. \tag{49}$$

第 3.2 节：基的研究

一般框架建立后, 第一件事就是对基进行详细研究. 我们再次以 bubble 为例子:

- 纯四维部分的旋量积分, 因为 z 的存在, 会在分子中贡献 u 的多形式. 因此我们会碰到如下形式积分

$$\mathrm{Bub}^{(n)} \equiv \int_0^1 du\ u^{-1-\epsilon} u^n \sqrt{1-u}. \tag{50}$$

而基是 $C[I_2(K)] = \mathrm{Bub}^{(0)}$.

- 一个关键的点是，用分部积分

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Bub}^{(n)} &= -\frac{2}{3}(1-u)^{3/2}u^{-1-\epsilon}u^{n}\Big|_0^1 \\
&\quad + \int_0^1 du\ \frac{2}{3}(n-1-\epsilon)(1-u)^{3/2}u^{-1-\epsilon}u^{n-1} \\
&= \int_0^1 du\ \frac{2}{3}(n-1-\epsilon)\sqrt{1-u}(1-u)u^{-1-\epsilon}u^{n-1} \\
&= \frac{2}{3}(n-1-\epsilon)(\mathrm{Bub}^{(n-1)}-\mathrm{Bub}^{(n)}).
\end{aligned}
$$

- 简化后得到递推关系

$$
\mathrm{Bub}^{(n)} = \frac{(n-1-\epsilon)}{(n+\frac{1}{2}-\epsilon)}\mathrm{Bub}^{(n-1)}. \qquad (51)
$$

- 由此可以解出

$$\mathrm{Bub}^{(n)} = F^{(n)}_{2\to 2}\mathrm{Bub}^{(0)}, \tag{52}$$

$$F^{(n)}_{2\to 2} = \frac{\Gamma(3/2-\epsilon)\Gamma(n-\epsilon)}{\Gamma(-\epsilon)\Gamma(n+3/2-\epsilon)}. \tag{53}$$

这里我们看到约化系数对 ϵ 依赖的出现!

- $\mathrm{Bub}^{(n)}$ 还有一种表达方式

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Bub}^{(n)} &= \frac{u^{n-\epsilon}}{n-\epsilon}\sqrt{1-u}\bigg|_0^1 \\
&+\frac{1}{2(n-\epsilon)}\int_0^1 du\, \frac{u^{n-\epsilon}}{\sqrt{1-u}} \\
= &\frac{1}{2(n-\epsilon)}\int_0^1 du\, \frac{u^{n-\epsilon}}{\sqrt{1-u}}. \qquad (54)
\end{aligned}
$$

下面我们讨论三角基. 因为纯四维部分的积分前面已经详细讨论, 相应的计算细节略去:

- 切割后的被积函数是

$$\frac{\delta(\widetilde{\ell}^2-\mu^2)\delta((\widetilde{\ell}-K_1)^2-\mu^2)}{((\widetilde{\ell}+K_3)^2-\mu^2)}.$$

- 代人积分下, 得到

$$C[I_3(K_1;K_3)] = \int_0^1 du\ u^{-1-\epsilon}\int \langle\ell\ d\ell\rangle\,[\ell\ d\ell]$$
$$\int dt\ \frac{t\ \delta((1-2z)K_1^2+t\,\langle\ell|K_1|\ell])}{K_3^2+2zK_1\cdot K_3-t\,\langle\ell|K_3|\ell]}.$$

- 完成 t 积分后，得到

$$\begin{aligned} C[I_3(K_1;K_3)] = & -\int_0^1 du\ u^{-1-\epsilon}\sqrt{1-u} \\ & \int \langle\ell\ d\ell\rangle\,[\ell\ d\ell]\frac{1}{\langle\ell|K_1|\ell]\,\langle\ell|P_1|\ell]} \\ = & -\int_0^1 du\ u^{-1-\epsilon}\sqrt{1-u}\int_0^1 dx\frac{1}{P^2}, \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{K_3^2+2zK_1\cdot K_3}{K_1^2}K_1+(1-2z)K_3 \\ P &= xP_1-(1-x)K_1 \end{aligned} \tag{56}$$

- 一些代数计算后，得到

$$C[I_3(K_1;K_3)] = -\int_0^1 du\ u^{-1-\epsilon}\frac{1}{\sqrt{\Delta_3}}\ln\left(\frac{Z+\sqrt{1-u}}{Z-\sqrt{1-u}}\right), \quad (57)$$

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{K_1\cdot K_3+K_3^2}{\sqrt{(K_1\cdot K_3)^2-K_1^2K_3^2}}, \\ \Delta_3 &= 4[(K_1\cdot K_3)^2-K_1^2K_3^2]. \end{aligned} \quad (58)$$

对我们的动力学区域 $K_1^2>0$，有 $Z\geq 1$

- 下面我们考虑

$$\mathrm{Tri}^{(n)}(Z) \equiv \int_0^1 du\ u^{-1-\epsilon} u^n \ln\left(\frac{Z+\sqrt{1-u}}{Z-\sqrt{1-u}}\right). \tag{59}$$

$$C[I_3(K_1,K_3)] = -\frac{1}{\sqrt{\Delta_3}}\mathrm{Tri}^{(0)}(Z), \tag{60}$$

- 同样, 分部积分给出

$$\mathrm{Tri}^{(n)}(Z) = u^{n-1-\epsilon}\Bigg((Z^2-1+u)\ln\left(\frac{Z+\sqrt{1-u}}{Z-\sqrt{1-u}}\right)$$
$$-2Z\sqrt{1-u}\Bigg)\Big|_0^1 - \int_0^1 du\; u^{n-2-\epsilon}(n-1-\epsilon)$$
$$\Bigg((Z^2-1+u)\ln\left(\frac{Z+\sqrt{1-u}}{Z-\sqrt{1-u}}\right)-2Z\sqrt{1-u}\Bigg).$$

- 由此得到递推关系

$$\begin{aligned}\mathrm{Tri}^{(n)}(Z) &= -\frac{(Z^2-1)(n-1-\epsilon)}{(n-\epsilon)}\mathrm{Tri}^{(n-1)}(Z)\\ &+\frac{2Z(n-1-\epsilon)}{(n-\epsilon)}\mathrm{Bub}^{(n-1)}.\end{aligned} \tag{61}$$

- 一些代数计算，最终得到

$$\mathrm{Tri}^{(n)}(Z) = F^{(n)}_{3\to3}(Z)\mathrm{Tri}^{(0)}(Z) + \widetilde{F}^{(n)}_{3\to2}(Z)\mathrm{Bub}^{(0)}, \quad (62)$$

$$F^{(n)}_{3\to3}(Z) = \frac{-\epsilon}{n-\epsilon}(1-Z^2)^n, \quad (63)$$

$$\widetilde{F}^{(n)}_{3\to2}(Z) = \frac{1}{n-\epsilon}\frac{\Gamma(3/2-\epsilon)}{\Gamma(-\epsilon)}\sum_{k=1}^{n} 2Z(1-Z^2)^{n-k} \frac{\Gamma(k-\epsilon)}{\Gamma(k+1/2-\epsilon)}. \quad (64)$$

代回因子 $\sqrt{\Delta_3}$ 我们最终得到约化系数

$$\begin{aligned} &\int_0^1 du\ u^{-1-\epsilon} u^n \left[-\frac{1}{\sqrt{\Delta_3}} \ln\left(\frac{Z+\sqrt{1-u}}{Z-\sqrt{1-u}}\right)\right] \\ = \;& F^{(n)}_{3\to 3}(Z) C[I_3(K_1,K_3)] + F^{(n)}_{3\to 2}(K_1,K_3) C[I_2(K_1)], \end{aligned} \tag{65}$$

$$F^{(n)}_{3\to 2}(K_1,K_3)) = -\frac{1}{\sqrt{\Delta_3}} \widetilde{F}^{(n)}_{3\to 2}(Z). \tag{66}$$

这是三角约化的最终结果.

我们可以用同样的方法计算 Box, Pentagon. 具体结果参见 0612277

第 3.3 节：约化系数的直接读取

其实, 我们可以更进一步. 直接通过分析一般的表达式, 得到约化系数的代数表达式, 而不用重复上面的计算. 下面我们仔细讨论如何做到这一点!

- 在完成 t 积分后，得到的被积函数的一般形式是

$$I_{term} = \frac{G(\lambda)\prod_{j=1}^{n+k-2}[a_j\ \ell]}{\langle\ell|K|\ell]^n\prod_{i=1}^{k}\langle\ell|Q_i|\ell]} \tag{67}$$

这里 a_j 可能依赖 λ，比如 $[a_j| = \langle\lambda|Q|$，而 $G(\lambda)$ 只依赖 λ

- 上面形式就是我们前面碰到的 (21) 中的形式. 那里我们讨论了如何进行分拆. 同样的方法可以给出如下的" 正则拆分形式"

$$\frac{G(\lambda)\prod_{j=1}^{n+k-2}[a_j\ \ell]}{\langle\ell|K|\ell]^n\prod_{i=1}^{k}\langle\ell|Q_i|\ell]} = \sum_{k=2}^{n} G_k(\lambda)\frac{\prod_{j=1}^{k-2}[b_j\ \ell]}{\langle\ell|K|\ell]^k} + \sum_{i=1}^{k} F_i(\lambda)\frac{1}{\langle\ell|K|\ell]\langle\ell|Q_i|\ell]} \tag{68}$$

- (68) 的展开系数的表达式是

$$
\begin{aligned}
F_i(\lambda) &= \left(\frac{G(\lambda)\prod_{s=1}^{n+k-2}[a_s|Q_i|\ell\rangle}{\langle\ell|KQ_i|\ell\rangle^{n-1}\prod_{t=1,t\neq i}^{k}\langle\ell|Q_tQ_i|\ell\rangle} \right), & (69)\\
G_p(\lambda) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{G(\lambda)\prod_{s=1}^{k-1}[a_s|Q_i|\ell\rangle}{\prod_{t=1,t\neq i}^{k}\langle\ell|Q_tQ_i|\ell\rangle} \frac{\prod_{l=k}^{n-k-p}[a_l|K|\ell\rangle}{\langle\ell|Q_iK|\ell\rangle^{n+1-p}}, & (70)\\
b_j &= a_{j+n+k-p}, & (71)
\end{aligned}
$$

- 正则拆分 (68) 的第一项只贡献到 Bubble 的约化系数, 其它的来自第二项.

先考虑 (68) 中的第二项:

- 首先有

$$
\begin{aligned}
I^{(i)} &= \int F_i(\lambda)\frac{1}{\langle\ell|K|\ell]\,\langle\ell|Q_i|\ell]} \\
&= \int_0^1 dx \int \langle\ell\ d\ell\rangle\,[d\ell\ \partial_\ell]\left(\frac{F_i(\lambda)[\eta\ \ell]}{\langle\ell|R|\ell]\,\langle\ell|R|\eta]}\right), \\
R &= xQ_i + (1-x)K
\end{aligned}
$$

- 注意, 这里的 pole 有两个来源: 一个来自 $\langle\ell|R|\eta]$, 一个来自 $F_i(\lambda)$. 而 $F_i(\lambda)$ 中有两类: $\langle\ell|KQ|\ell\rangle$ 和 $\langle\ell|Q_jQ_i|\ell\rangle$. 下面我们会看到: 前者的留数给出对应的三角基的约化系数, 后者的留数给出对应方块基的约化系数.

- 从 Q_i, K 我们构造两个 null 动量 $P_{1,2}^{(i)} = Q_i + x_{1,2}^{(i)} K$，并选择 $\eta = P_1^{(i)}$. 经过一些简单的代数计算，可以看到

$$I^{(i)} = \int_0^1 dx \int \langle \ell \ d\ell \rangle [d\ell \ \partial_\ell] \left(\frac{F_i(\lambda)[P_1^{(i)} \ \ell]}{\left\langle \ell \ P_2^{(i)} \right\rangle [P_2^{(i)} \ P_1^{(i)}]} \frac{(x_1^{(i)} - x_2^{(i)})}{\langle \ell | R | \ell] \left(x(x_1^{(i)} + 1) - 1 \right)} \right) \tag{72}$$

注意分子中的部分，告诉我们 pole$|\ell\rangle = \left| P_1^{(i)} \right\rangle$ 的贡献为零！

- 经过一系列代数简化, (72) 变化为

$$I^{(i)} = \int_0^1 dx \int \langle \ell\, d\ell \rangle \left[d\ell\, \partial_\ell \right] \left(\frac{F_i(\lambda)}{\langle \ell | Q_i K | \ell \rangle} \left(-\frac{(x_1^{(i)}+1)}{x(x_1^{(i)}+1)-1} + \frac{\langle \ell | Q_i - K | \ell]}{x \langle \ell | Q_i - K | \ell] + \langle \ell | K | \ell]} \right) \right) \tag{73}$$

- (73) 可以很方便进行 $\int dx$. 第一项积分后得到

$$I_1^{(i)} = \int \langle \ell\, d\ell \rangle \left[d\ell\, \partial_\ell \right] \left(\frac{G(\lambda) \prod_{s=1}^{n+k-2} [a_s | Q_i | \ell \rangle}{\langle \ell | K Q_i | \ell \rangle^n \prod_{t=1, t\neq i}^{k} \langle \ell | Q_t Q_i | \ell \rangle} \ln(-x_1^{(i)}) \right)$$

这里我们把 F_i 的具体表达式代入了.

- 上式的留数计算看起来比较付复杂. 但是注意到对全纯函数, 所有留数的和是零, 我们就立即得到

$$I_1^{(i)} = -\left(\frac{G(\lambda)\prod_{s=1}^{n+k-2}[a_s|Q_i|\ell\rangle}{\langle\ell|KQ_i|\ell\rangle^n\prod_{t=1,t\neq i}^{k}\langle\ell|Q_tQ_i|\ell\rangle}\ln(-x_1^{(i)})\right)\Bigg|_{\left\langle\ell\ P_1^{(i)}\right\rangle} \quad (74)$$

- 现在考虑 (73) 的第二项

$$I_2^{(i)} = \int_0^1 dx\int\langle\ell\ d\ell\rangle[d\ell\ \partial_\ell]\left(-\frac{G(\lambda)\prod_{s=1}^{n+k-2}[a_s|Q_i|\ell\rangle}{\langle\ell|KQ_i|\ell\rangle^n\prod_{t=1,t\neq i}^{k}\langle\ell|Q_tQ_i|\ell\rangle}\frac{\langle\ell|Q_i-K|\ell]}{x\langle\ell|Q_i-K|\ell]+\langle\ell|K|\ell]}\right) \quad (7$$

同样, 留数计算中排除 pole $\left\langle\ell\ P_1^{(i)}\right\rangle$

- (75) 有两类奇点:$\langle \ell | Q_j Q_i | \ell \rangle$ 和 $\left\langle \ell \; P_2^{(i)} \right\rangle^n$.
- 对 $\left\langle \ell \; P_2^{(i)} \right\rangle^n$, 代入 $|\ell] \to |P_2^{(i)}]$ 后积分简化为

$$\frac{\langle \ell | Q_i - K | \ell]}{x \langle \ell | Q_i - K | \ell] + \langle \ell | K | \ell]} \to \frac{(x_2^{(i)} + 1)}{x(x_2^{(i)} + 1) - 1}$$

完成费曼积分,得到

$$I_2^{(i)} \Big|_{\left\langle \ell \; P_2^{(i)} \right\rangle} = \left(- \frac{G(\lambda) \prod_{s=1}^{n+k-2} [a_s | Q_i | \ell \rangle}{\langle \ell | K Q_i | \ell \rangle^n \prod_{t=1, t \neq i}^{k} \langle \ell | Q_t Q_i | \ell \rangle} \ln(-x_2^{(i)}) \right) \Bigg|_{\left\langle \ell \; P_2^{(i} \right.}$$

现在考虑 $\langle \ell | Q_j Q_i | \ell \rangle$ 的贡献

- 同样, 用它们构造 null 动量

$$P_{1,2}^{(ij)} = Q_j + y_{1,2}^{(ij)} Q_i \qquad (i < j) \tag{77}$$

和 $\Delta^{(ij)} = (2Q_i \cdot Q_j)^2 - 4Q_i^2 Q_j^2$

- 定义

$$F_{i,j}(\ell) = \frac{G(\lambda) \prod_{s=1}^{n+k-2} [a_s | Q_i | \ell \rangle}{\langle \ell | K Q_i | \ell \rangle^n \prod_{t=1, t \neq i,j}^{k} \langle \ell | Q_t Q_i | \ell \rangle} \tag{78}$$

- 因为 $P_{1,2}^{(ij)}$ 在平凡根前有符号差，可以验证

$$F_{i,j}(P_1^{(ij)}) = F_{i,j}^{(S)} + F_{i,j}^{(A)}, \quad F_{i,j}(P_2^{(ij)}) = F_{i,j}^{(S)} - F_{i,j}^{(A)} \tag{79}$$

- 因此，这一对 pole 的留数和是

$$-\frac{1}{\sqrt{\Delta^{(ij)}}}\left(F_{i,j}^{(S)} \ln \frac{\left\langle P_1^{(ij)}|K|P_1^{(ij)}\right]}{\left\langle P_1^{(ij)}|Q_i|P_1^{(ij)}\right]} \frac{\left\langle P_2^{(ij)}|Q_i|P_2^{(ij)}\right]}{\left\langle P_2^{(ij)}|K|P_2^{(ij)}\right]} + F_{i,j}^{(A)} \ln \frac{\left\langle P_1^{(ij)}|K|P_1^{(ij)}\right]}{\left\langle P_1^{(ij)}|Q_i|P_1^{(ij)}\right]} \frac{\left\langle P_2^{(ij)}|K|P_2^{(ij)}\right]}{\left\langle P_2^{(ij)}|Q_i|P_2^{(ij)}\right]}\right).$$

- 注意，同一个因子 $\langle \ell | Q_j Q_i | \ell \rangle$ 同时出现在 $I^{(j)}$ 和 $I^{(j)}$ 中，最重要的，有

$$F_{j,i}(P_{1,2}^{(ij)}) = \frac{G(P_{1,2}^{(ij)}) \prod_{s=1}^{n+k-2} [a_s \ P_{2,1}^{(ij)}]}{\left\langle P_{1,2}^{(ij)} | K | P_{2,1}^{(ij)} \right]^n \prod_{t=1, t \neq j,i}^{k} \left\langle P_{1,2}^{(ij)} | Q_t | P_{2,1}^{(ij)} \right]} = F_{i,j}(P_{1,2}^{(ij)}$$

因此,$\langle \ell|Q_j Q_i|\ell\rangle = -\langle \ell|Q_i Q_j|\ell\rangle$ 在 $I_2^{(i)}$ 和 $I_2^{(j)}$ 的和是

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{\sqrt{\Delta^{(ij)}}}\left(F_{i,j}^{(S)} \ln \frac{\left\langle P_1^{(ij)}|Q_j|P_1^{(ij)}\right]}{\left\langle P_1^{(ij)}|Q_i|P_1^{(ij)}\right]} \frac{\left\langle P_2^{(ij)}|Q_i|P_2^{(ij)}\right]}{\left\langle P_2^{(ij)}|Q_j|P_2^{(ij)}\right]}\right. \\
& \left. +F_{i,j}^{(A)} \ln \frac{\left\langle P_1^{(ij)}|Q_j|P_1^{(ij)}\right]}{\left\langle P_1^{(ij)}|Q_i|P_1^{(ij)}\right]} \frac{\left\langle P_2^{(ij)}|Q_j|P_2^{(ij)}\right]}{\left\langle P_2^{(ij)}|Q_i|P_2^{(ij)}\right]}\right) \\
= \; & -\frac{1}{\sqrt{\Delta^{(ij)}}}\left(F_{i,j}^{(S)} \ln \frac{y_1^{(ij)}}{y_2^{(ij)}} + F_{i,j}^{(A)} \ln \frac{Q_j^2}{Q_i^2}\right) \\
= \; & -\frac{1}{\sqrt{\Delta^{(ij)}}}\left(\frac{F_{i,j}(P_1^{(ij)}) + F_{i,j}(P_2^{(ij)})}{2} \ln \frac{-2Q_i \cdot Q_j + \sqrt{\Delta^{(ij)}}}{-2Q_i \cdot Q_j - \sqrt{\Delta^{(ij)}}}\right. \\
& \left. + \frac{F_{i,j}(P_1^{(ij)}) - F_{i,j}(P_2^{(ij)})}{2} \ln \frac{Q_j^2/K^2}{Q_i^2/K^2}\right) \qquad (81)
\end{aligned}
$$

(81) 第一项中的 log 部分就是 Box, Pentagon 的指标, 所以我们得到

$$C_{box;ij} \quad = \quad \frac{K^2}{(1-2z)} \left(\frac{F_{i,j}(P_1^{(ij)}) + F_{i,j}(P_2^{(ij)})}{2} \right), \tag{82}$$

- 更明确的, $C_{box;ij}$ 能分解为

$$C_{box;ij}(u) = H(u) + \sum_{i \in pentagons} A_i P_i \tag{83}$$

这里 $H(u)$ 是 u 的多形式,A_i 不依赖 u .P_i 是 pentagon 的除了 log 外的额外指标, 类似

$$\frac{S[Q_3, Q_2, Q_1, K]}{4\sqrt{(Q_3 \cdot Q_2)^2 - Q_3^2 Q_2^2}} \tag{84}$$

(81) 中的第二项中可以重新写为

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{Q_i^2}{K^2}\left(\frac{G(\lambda)\prod_{s=1}^{n+k-2}[a_s|Q_i|\ell\rangle}{\langle\ell|KQ_i|\ell\rangle^n\prod_{t=1,t\neq i}^{k}\langle\ell|Q_tQ_i|\ell\rangle}\right)\Bigg|_{residue\ \ of\ \ \langle\ell|Q_jQ_i|\ell\rangle} \tag{85}$$

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{Q_j^2}{K^2}\left(\frac{G(\lambda)\prod_{s=1}^{n+k-2}[a_s|Q_j|\ell\rangle}{\langle\ell|KQ_j|\ell\rangle^n\prod_{t=1,t\neq j}^{k}\langle\ell|Q_tQ_j|\ell\rangle}\right)\Bigg|_{residue\ \ of\ \ \langle\ell|Q_iQ_j|\ell\rangle} \tag{86}$$

- (86) 中的第一项是 $F_i(\lambda)$ 中所有 pole $\langle\ell|Q_jQ_i|\ell\rangle$ 的留数和，因此它等于 (注意 $\frac{Q_i^2}{K^2}=x_1^{(i)}x_2^{(i)}$)

$$\frac{1}{2}\ln(x_1^{(i)}x_2^{(i)})\left(\frac{G(\lambda)\prod_{s=1}^{n+k-2}[a_s|Q_i|\ell\rangle}{\langle\ell|KQ_i|\ell\rangle^n\prod_{t=1,t\neq i}^{k}\langle\ell|Q_tQ_i|\ell\rangle}\right)\Bigg|_{\langle\ell|KQ_i|\ell\rangle} \tag{87}$$

- 对 (87) , (74) , (76) 求和, 我们得到

$$
-\frac{1}{2}\left(\frac{G(\lambda)\prod_{s=1}^{n+k-2}[a_s|Q_i|\ell\rangle}{\langle\ell|KQ_i|\ell\rangle^n\prod_{t=1,t\neq i}^{k}\langle\ell|Q_tQ_i|\ell\rangle}\ln\frac{(-x_1^{(i)})^2}{(x_1^{(i)}x_2^{(i)})}\right)\Bigg|_{\left\langle\ell\ P_1^{(i)}\right\rangle}
$$

$$
-\frac{1}{2}\left(\frac{G(\lambda)\prod_{s=1}^{n+k-2}[a_s|Q_i|\ell\rangle}{\langle\ell|KQ_i|\ell\rangle^n\prod_{t=1,t\neq i}^{k}\langle\ell|Q_tQ_i|\ell\rangle}\ln\frac{(-x_2^{(i)})^2}{(x_1^{(i)}x_2^{(i)})}\right)\Bigg|_{\left\langle\ell\ P_2^{(i)}\right\rangle}
$$

注意 $\ln \frac{x_1^{(i)}}{x_2^{(i)}}$ 是三角基的指标，因此我们得到约化系数是

$$
C_{tri;i} = \frac{\sqrt{\Delta^{(i)}}}{2(1-2z)} \left\{ \left(\frac{G(\lambda)\prod_{s=1}^{n+k-2} [a_s|Q_i|\ell\rangle}{\langle\ell|KQ_i|\ell\rangle^n \prod_{t=1,t\neq i}^{k} \langle\ell|Q_t Q_i|\ell\rangle} \right)\Bigg|_{\left\langle\ell\ P_1^{(i)}\right\rangle} - \left(\frac{G(\lambda)\prod_{s=1}^{n+k-2} [a_s|Q_i|\ell\rangle}{\langle\ell|KQ_i|\ell\rangle^n \prod_{t=1,t\neq i}^{k} \langle\ell|Q_t Q_i|\ell\rangle} \right)\Bigg|_{\left\langle\ell\ P_2^{(i)}\right\rangle} \right\} \quad (88)
$$

第 3.4 节：最终代数表达式

上面, 我们通过详细的计算, 给出各个基约化系数的推导. 在实际应用中, 完全可以不需要知道推导过程, 直接应用结果就可以了. 在这部分, 我们给出这样的表达式式.

[Ruth Rritto, Bo Feng, arXiv:0711.4284]

[Bo Feng, Gang Yang, arXiv:0806.4016]

- 对输入

$$C = c\int d^{4-2\epsilon}p\,\frac{\prod_{i=1}^{m}(-2p\cdot P_i)}{\prod_{j=1}^{k}(p-K_j)^2}\delta^{(+)}(p^2)\delta^{(+)}((p-K)^2) \tag{89}$$

- 定义

$$\begin{aligned} Q_j &= -(\sqrt{1-u})K_j + \frac{K_j^2-(1-\sqrt{1-u})(K_j\cdot K)}{K^2}K, \\ R_i &= -(\sqrt{1-u})P_i - \frac{(1-\sqrt{1-u})(P_i\cdot K)}{K^2}K. \end{aligned} \tag{90}$$

对另外两个传播子 K_r 和 K_s 定义的 box, 约化系数是

$$C[Q_r, Q_s, K] = \frac{(K^2)^{2+n}}{2}\left(\frac{\prod_{j=1}^{k+n}\langle P_{sr,1}|R_j|P_{sr,2}]}{\langle P_{sr,1}|K|P_{sr,2}]^{n+2}\prod_{t=1,t\neq i,j}^{k}\langle P_{sr,1}|Q_t|P_{sr,2}]} + \{P_{sr,1}\leftrightarrow P_{sr,2}\}\right). \tag{91}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{sr} &= (2Q_s\cdot Q_r)^2 - 4Q_s^2Q_r^2\\
P_{sr,1} &= Q_s + \left(\frac{-2Q_s\cdot Q_r + \sqrt{\Delta_{sr}}}{2Q_r^2}\right)Q_r\\
P_{sr,2} &= Q_s + \left(\frac{-2Q_s\cdot Q_r - \sqrt{\Delta_{sr}}}{2Q_r^2}\right)Q_r
\end{aligned} \tag{92}$$

对 K_s 定义的三角基，约化系数是

$$C[Q_s,K] = \frac{(K^2)^{1+n}}{2}\frac{1}{(\sqrt{\Delta_s})^{n+1}}\frac{1}{(n+1)!\,\langle P_{s,1}\;P_{s,2}\rangle^{n+1}} \times\frac{d^{n+1}}{d\tau^{n+1}}\left(\frac{\prod_{j=1}^{k+n}\langle P_{s,1}-\tau P_{s,2}|R_jQ_s|P_{s,1}-\tau P_{s,2}\rangle}{\prod_{t=1,t\neq s}^{k}\langle P_{s,1}-\tau P_{s,2}|Q_tQ_s|P_{s,1}-\tau P_{s,2}\rangle} +\{P_{s,1}\leftrightarrow P_{s,2}\}\right)\Big|_{\tau=0}. \tag{93}$$

$$\begin{aligned}\Delta_s &= (2Q_s\cdot K)^2-4Q_s^2K^2\\ P_{s,1} &= Q_s+\left(\frac{-2Q_s\cdot K+\sqrt{\Delta_s}}{2K^2}\right)K\\ P_{s,2} &= Q_s+\left(\frac{-2Q_s\cdot K-\sqrt{\Delta_s}}{2K^2}\right)K\end{aligned} \tag{94}$$

对 bubble, 约化系数是

$$C[K]=(K^2)^{1+n}\sum_{q=0}^{n}\frac{(-1)^q}{q!}\frac{d^q}{ds^q}\left(\mathcal{B}^{(0)}_{n,n-q}(s)\right.$$
$$\left.\left.+\sum_{r=1}^{k}\sum_{a=q}^{n}\left(\mathcal{B}^{(r;a-q;1)}_{n,n-a}(s)-\mathcal{B}^{(r;a-q;2)}_{n,n-a}(s)\right)\right)\right|_{s=0}, \tag{95}$$

其中

$$\mathcal{B}^{(0)}_{n,t}(s)\equiv\frac{d^n}{d\tau^n}\left(\frac{1}{n![\eta|\widetilde{\eta}K|\eta]^n}\frac{(2\eta\cdot K)^{t+1}}{(t+1)(K^2)^{t+1}}\right.$$
$$\left.\left.\frac{\prod_{j=1}^{n+k}\langle\ell|R_j(K+s\eta)|\ell\rangle}{\langle\ell\ \eta\rangle^{n+1}\prod_{p=1}^{k}\langle\ell|Q_p(K+s\eta)|\ell\rangle}\Big|_{|\ell\rangle\to|K-\tau\widetilde{\eta}|\eta]}\right)\right|_{\tau=0}, \tag{96}$$

$$\mathcal{B}_{n,t}^{(r;b;1)}(s) \equiv \frac{(-1)^{b+1}}{b!\sqrt{\Delta_r}^{b+1}\langle P_{r,1}\ P_{r,2}\rangle^b}\frac{d^b}{d\tau^b}\left(\frac{1}{(t+1)}\frac{\langle P_{r,1}-\tau P_{r,2}|\eta|P_{r,1}]^{t+1}}{\langle P_{r,1}-\tau P_{r,2}|K|P_{r,1}]^{t+1}}\right.$$
$$\left.\times\ \frac{\langle P_{r,1}-\tau P_{r,2}|Q_r\eta|P_{r,1}-\tau P_{r,2}\rangle^b\prod_{j=1}^{n+k}\langle P_{r,1}-\tau P_{r,2}|R_j(K+s\eta)|P_{r,1}-\tau P_{r,2}\rangle}{\langle P_{r,1}-\tau P_{r,2}|\eta K|P_{r,1}-\tau P_{r,2}\rangle^{n+1}\prod_{p=1,p\neq r}^{k}\langle P_{r,1}-\tau P_{r,2}|Q_p(K+s\eta)|P_{r,1}-\tau P_{r,2}\rangle}\right)\Bigg|_{\tau=0}, \tag{97}$$

$$\mathcal{B}_{n,t}^{(r;b;2)}(s) \equiv \frac{(-1)^{b+1}}{b!\sqrt{\Delta_r}^{b+1}\langle P_{r,1}\ P_{r,2}\rangle^b}\frac{d^b}{d\tau^b}\left(\frac{1}{(t+1)}\frac{\langle P_{r,2}-\tau P_{r,1}|\eta|P_{r,2}]^{t+1}}{\langle P_{r,2}-\tau P_{r,1}|K|P_{r,2}]^{t+1}}\right.$$
$$\left.\times\ \frac{\langle P_{r,2}-\tau P_{r,1}|Q_r\eta|P_{r,2}-\tau P_{r,1}\rangle^b\prod_{j=1}^{n+k}\langle P_{r,2}-\tau P_{r,1}|R_j(K+s\eta)|P_{r,2}-\tau P_{r,1}\rangle}{\langle P_{r,2}-\tau P_{r,1}|\eta K|P_{r,2}-\tau P_{r,1}\rangle^{n+1}\prod_{p=1,p\neq r}^{k}\langle P_{r,2}-\tau P_{r,1}|Q_p(K+s\eta)|P_{r,2}-\tau P_{r,1}\rangle}\right)\Bigg|_{\tau=0}. \tag{98}$$

另一种表示可能应用起来更方便. 输入是

$$-i(4\pi)^{D/2}\int\frac{d^Dp}{(2\pi)^D}\,\delta^{(+)}(p^2-M_1^2)\,\delta^{(+)}((p-K)^2-M_2^2)\,\mathcal{T}^{(N)}(\widetilde{\ell}),\tag{99}$$

where

$$\mathcal{T}^{(N)}(\widetilde{\ell})=A_L^{\rm tree}(\widetilde{\ell})\times A_R^{\rm tree}(\widetilde{\ell}).\tag{100}$$

Pentagon 的约化系数是

$$\mathrm{Pen}[K_i, K_j, K_r, K] = \mathcal{T}^{(N)}(\widetilde{\ell}_{(i,j,r)}) \cdot D_i(\widetilde{\ell}_{(i,j,r)}) D_j(\widetilde{\ell}_{(i,j,r)}) D_r(\widetilde{\ell}_{(i,j,r)}) \tag{101}$$

$$\widetilde{\ell}_{(i,j,r)} = l_0 K + l_i K_i + l_j K_j + l_r K_r, \tag{102}$$

where

$$\begin{pmatrix} l_0 \\ l_i \\ l_j \\ l_r \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} K^2 & K_i \cdot K & K_j \cdot K & K_r \cdot K \\ K \cdot K_i & K_i^2 & K_j \cdot K_i & K_r \cdot K_i \\ K \cdot K_j & K_i \cdot K_j & K_j^2 & K_r \cdot K_j \\ K \cdot K_r & K_i \cdot K_r & K_j \cdot K_r & K_r^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} K^2 + M_1^2 - M_2^2 \\ K_i^2 + M_1^2 - m_i^2 \\ K_j^2 + M_1^2 - m_j^2 \\ K_r^2 + M_1^2 - m_r^2 \end{pmatrix}. \tag{103}$$

$$D_i(\widetilde{\ell}) \equiv (\widetilde{\ell} - K_i)^2 - \mu^2 - m_i^2 = -2\widetilde{\ell} \cdot K_i + K_i^2 + M_1^2 - m_i^2. \tag{104}$$

方块基:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Box}[K_i, K_j, K] &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{T}^{(N)}(\widetilde{\ell}_{ij})\cdot D_i(\widetilde{\ell}_{ij})D_j(\widetilde{\ell}_{ij}) - \sum_{r\neq i,j}\frac{\mathrm{Pen}[K_i,K_j,K_r,K]}{D_r(\widetilde{\ell}_{ij})}\right)\Bigg|\begin{cases}|\ell] & \rightarrow & |P_{ji,2}] \\ |\ell\rangle & \rightarrow & |P_{ji,1}\rangle\end{cases} \\
&\quad + \{P_{ji,1} \leftrightarrow P_{ji,2}\} \qquad (105)
\end{aligned}
$$

三角基:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tri}[K_s, K] &= \frac{1}{2}\frac{(K^2)^{N+1}}{(-\beta\sqrt{1-u})^{N+1}(\sqrt{-4q_s^2K^2})^{N+1}}\frac{1}{(N+1)!\,\langle P_{s,1}\;P_{s,2}\rangle^{N+1}} \\
&\quad \frac{d^{N+1}}{d\tau^{N+1}}\left(\frac{\langle\ell|K|\ell]^{N+1}}{(K^2)^{N+1}}\mathcal{T}^{(N)}(\widetilde{\ell})\cdot D_s(\widetilde{\ell})\Bigg|\begin{cases}|\ell] & \rightarrow & |Q_s(u)\,|\ell\rangle \\ |\ell\rangle & \rightarrow & |P_{s,1}-\tau P_{s,2}\rangle\end{cases} + \{P_{s,1}\leftrightarrow P_{s,2}\}\right)\Bigg|_{\tau\rightarrow 0} \qquad (10
\end{aligned}
$$

bubble 基:

$$\mathrm{Bub}[K] = (K^2)^{N+1}\sum_{q=0}^{N}\frac{(-1)^q}{q!}\frac{d^q}{ds^q}\left(\mathcal{B}^{(0)}_{N,N-q}(s)+\sum_{r=1}^{k}\sum_{a=q}^{N}\left[\mathcal{B}^{(r,a-q,1)}_{N,N-a}(s)-\mathcal{B}^{(r,a-q,2)}_{N,N-a}(s)\right]\right)\Bigg|_{s\to 0} \quad (107)$$

$$\mathcal{B}^{(0)}_{N,t}(s) = \frac{d^N}{d\tau^N}\left[\frac{(2\eta\cdot K)^{t+1}}{(t+1)(K^2)^{t+1}}\frac{1}{N![\eta|\widetilde{\eta}K|\eta]^N\,\langle\ell\ \eta\rangle^{N+1}}\left(\frac{\langle\ell|K|\ell]^N}{(K^2)^N}\mathcal{T}^{(N)}(\widetilde{\ell})\right)\Bigg|\begin{cases}|\ell] & \to & |K+s\eta|\ell\rangle\\ |\ell\rangle & \to & |K-\tau\widetilde{\eta}|\eta]\end{cases}\right]\Bigg|$$

$$\mathcal{B}^{(r,b,1)}_{N,t}(s) = \frac{1}{b!\,(\beta\sqrt{1-u})^{b+1}\,(\sqrt{-4q_r^2K^2})^{b+1}\,\langle P_{r,1}\ P_{r,2}\rangle^b}\frac{d^b}{d\tau^b}\left[\frac{1}{t+1}\frac{\langle\ell|\eta|P_{r,1}]^{t+1}}{\langle\ell|K|P_{r,1}]^{t+1}}\frac{\langle\ell|Q_r(u)\eta|\ell\rangle^b}{\langle\ell|\eta K|\ell\rangle^{N+1}}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\langle\ell|K|\ell]^{N+1}}{(K^2)^{N+1}}\mathcal{T}^{(N)}(\widetilde{\ell})\cdot D_r(\widetilde{\ell})\right)\Bigg|\begin{cases}|\ell] & \to & |K+s\eta|\ell\rangle\\ |\ell\rangle & \to & |P_{r,1}-\tau P_{r,2}\rangle\end{cases}\right]\Bigg|_{\tau\to 0} \quad (109)$$

$$\mathcal{B}^{(r,b,2)}_{N,t}(s) = \frac{1}{b!\,(\beta\sqrt{1-u})^{b+1}\,(\sqrt{-4q_r^2K^2})^{b+1}\,\langle P_{r,1}\ P_{r,2}\rangle^b}\frac{d^b}{d\tau^b}\left[\frac{1}{t+1}\frac{\langle\ell|\eta|P_{r,2}]^{t+1}}{\langle\ell|K|P_{r,2}]^{t+1}}\frac{\langle\ell|Q_r(u)\eta|\ell\rangle^b}{\langle\ell|\eta K|\ell\rangle^{N+1}}\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{\langle\ell|K|\ell]^{N+1}}{(K^2)^{N+1}}\mathcal{T}^{(N)}(\widetilde{\ell})\cdot D_r(\widetilde{\ell})\right)\Bigg|\begin{cases}|\ell] & \to & |K+s\eta|\ell\rangle\\ |\ell\rangle & \to & |P_{r,2}-\tau P_{r,1}\rangle\end{cases}\right]\Bigg|_{\tau\to 0} \quad (110)$$