

单位代码	10476
学号	2002183021
分类号	O572.2

硕士学位论文

北京谱仪III上 $\eta' \rightarrow 4\pi$ 的实验研究

学科、专业 : 物理学、粒子物理与原子核物理
研究方向 : 高能对撞机实验的物理分析
申请学位类别 : 理学硕士
申请人 : 赵子涵
指导教师 : 常钦 教授
房双世 研究员
刘芳 副研究员

二〇二三年三月

Study of $\eta' \rightarrow 4\pi$ at BESIII

A Dissertation Submitted to
the Graduate School of Henan Normal University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of
Master of Science

By

Zihan Zhao

Supervisor: Associate Prof. Qin Chang

Prof. Shuangshi Fang

Prof. Fang Liu

March, 2023

摘要

自从 η' 介子被发现以来, 就引起了理论和实验的广泛关注。 η' 衰变不仅在检验基本对称性中起着重要作用, 还为验证手征微扰理论 (ChPT) 和矢量介子为主模型 (VMD) 提供了难得的机会。本文利用BESIII 探测器采集到的 $(10087 \pm 44) \times 10^6$ 个 J/ψ 事例, 通过 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'$, 对 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$, $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ 开展了深入研究。

首先, 利用BESIII 实验采集的 $(10087 \pm 44) \times 10^6$ 个 J/ψ 事例, 对衰变道 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 进行了详细研究。在 $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的不变质量谱上观察到明显的 η' 信号, 精确测量 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的分支比, 分别为: $\mathcal{B}(\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-) = (8.56 \pm 0.25(stat.) \pm 0.24(sys.)) \times 10^{-5}$ 和 $\mathcal{B}(\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0) = (2.16 \pm 0.12(stat.) \pm 0.10(sys.)) \times 10^{-4}$ 。测量结果与理论预言相符合, 并与之前的实验结果一致, 并且测量精度更高。研究表明手征微扰理论和矢量介子为主模型可以很好地描述衰变过程 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 。

其次, 利用选定的 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 数据样本, 对该过程进行了衰变振幅分析。根据该过程的衰变振幅公式, 提取了类时跃迁形状因子。通过将 ρ 的质量和宽度固定为《粒子数据手册》(PDG) 中的值, 确定了该衰变道共振项贡献与非共振项贡献之比为: $1.220 \pm 0.285(stat.) \pm 0.04(sys.)$, 为理论上计算 μ 子反常磁矩提供了重要实验数据。

最后, 寻找稀有衰变 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 。通过优化事例筛选条件和详细的本底分析, 寻找稀有衰变 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$, 但在 $4\pi^0$ 的不变质量谱上并没有观测到清晰的 η' 信号。利用贝叶斯方法, 在90% 置信度下确定该稀有衰变 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 的分支比上限为: $\mathcal{B}(\eta' \rightarrow 4\pi^0) < 1.28 \times 10^{-5}$, 比之前BESIII 合作组的测量精度提高了3 倍。

关键词: 北京谱仪, 手征微扰理论, 矢量介子为主模型, 分支比

ABSTRACT

Since the discovery of the η' meson, it has attracted a lot of attention from theory and experiment. η' decay not only plays an important role to test fundamental symmetries and explore the physics beyond the Standard Model, but also provides a unique opportunity to validate chiral perturbation theory (ChPT) and vector meson dominance model (VMD). In this thesis, a sample of $(10087 \pm 44) \times 10^6$ J/ψ events collected by the BESIII detector is used to study the decays of $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$, $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ and $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$.

First, using the sample of $(10087 \pm 44) \times 10^6$ J/ψ events, a study of $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^+$ and $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ was performed with the radiative decay of $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'$. The clear η' signals are observed in the mass spectra of $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ and $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$. The branching fractions of $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ and $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ are measured to be: $\mathcal{B}(\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-) = (8.56 \pm 0.25(stat.) \pm 0.24(sys.)) \times 10^{-5}$ and $\mathcal{B}(\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0) = (2.16 \pm 0.12(stat.) \pm 0.10(sys.)) \times 10^{-4}$, which are consistent with the theoretical predictions and the previous measurements reported by the BESIII experiment with a subdata sample, but the precision is significantly improved. This study indicates that ChPT and VMD can provide a good description of $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ and $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$.

In addition, an amplitude analysis of $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ is performed to extract the time-like transition form factor. Due to the limited statistics, the resonant parameters of ρ are fixed to be the world average values. After that the parameter for the ratio of resonant and nonresonant contributions in this decay is determined to be $1.220 \pm 0.285(stat.) \pm 0.04(sys.)$, which is helpful to the theoretical calculation of $(g-2)_\mu$.

At last, using a sample of $(10087 \pm 44) \times 10^6$ J/ψ events collected by the BESIII detector, a search for the rare decay of $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ is performed. After the corresponding event selection and background analysis, no significant η' signal is observed in the $4\pi^0$ invariant mass spectrum, the

most stringent upper limit of the branching fraction under the 90% confidence is determined to be: $\mathcal{B}(\eta' \rightarrow 4\pi^0) < 1.28 \times 10^{-5}$.

KEY WORDS: Beijing Spectrometer, chiral perturbation theory(ChPT), vector-meson dominance(VMD), branching fraction

目 录

摘 要.....	I
ABSTRACT.....	III
第一章 引言.....	1
1.1 粒子物理标准模型.....	1
1.1.1 基本粒子.....	1
1.1.2 四种相互作用.....	2
1.2 强子态.....	3
1.2.1 介子.....	3
1.2.2 重子.....	3
1.2.3 新型强子.....	5
1.3 粲偶素和 J/ψ 衰变.....	5
1.3.1 粲偶素家族.....	5
1.3.2 J/ψ 衰变.....	6
1.4 论文选题和结构.....	7
1.4.1 论文选题的背景和意义.....	7
1.4.2 论文结构.....	9
第二章 北京正负电子对撞机和北京谱仪.....	11
2.1 北京正负电子对撞机(BEPCII).....	11
2.2 北京谱仪III(BESIII).....	12
2.2.1 主漂移室(MDC).....	12
2.2.2 飞行时间计数器(TOF).....	13
2.2.3 电磁量能器(EMC).....	14
2.2.4 超导磁铁(SMG).....	15
2.2.5 μ 子鉴别器(MUC).....	15
2.2.6 触发判选系统.....	15

2.2.7	数据获取系统.....	16
2.3	本章小结.....	16
第三章	$\eta' \rightarrow 4\pi$ 的精确测量	17
3.1	数据样本和MC模拟样本.....	17
3.1.1	数据样本和BOSS版本.....	17
3.1.2	MC模拟样本.....	17
3.2	基本的事例选择.....	18
3.2.1	带电径迹.....	18
3.2.2	中性径迹.....	18
3.3	$\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 的研究.....	18
3.3.1	事例终选.....	19
3.3.2	本底研究.....	19
3.3.3	拟合 $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 的不变质量谱.....	21
3.3.4	分支比结果.....	22
3.3.5	形状因子的测量.....	23
3.4	$\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的研究.....	28
3.4.1	事例终选.....	28
3.4.2	本底研究.....	29
3.4.3	拟合 $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的不变质量谱.....	31
3.4.4	分支比结果.....	32
3.5	$\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ 的研究.....	33
3.5.1	事例终选.....	33
3.5.2	本底研究.....	33
3.5.3	$\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 的分支比上限.....	36
3.5.4	结果.....	36
3.6	本章小结.....	37
第四章	系统误差	39
4.1	分支比结果测量的系统误差.....	39

4.1.1	带电径迹的重建	39
4.1.2	光子的探测效率	39
4.1.3	运动学拟合	39
4.1.4	连续性本底形状	40
4.1.5	峰状本底形状	41
4.1.6	峰状本底的事例数	41
4.1.7	信号形状	42
4.1.8	中间共振态的分支比	43
4.1.9	$\eta(\omega)$ 质量窗的影响	43
4.1.10	J/ψ 事例数	43
4.1.11	拟合范围	44
4.1.12	信号产生子模型	44
4.1.13	总结分支比测量过程中的系统误差	44
4.1.14	数值结果	46
4.2	形状因子测量的系统误差	47
4.2.1	带电径迹的重建	47
4.2.2	ρ 的宽度	47
4.2.3	ρ 的质量	48
4.2.4	运动学拟合	48
4.2.5	连续性本底	48
4.2.6	峰状本底	48
4.2.7	总结形状因子测量过程中的系统误差	49
第五章 总结与展望		51
参考文献		53
致 谢		55
攻读学位期间发表的学术论文目录		57
独创性声明和关于论文使用授权的说明		58

第一章 引言

1.1 粒子物理标准模型

随着人类文明的发展和进步，人类对物质世界的构成展现出浓厚的兴趣。由于当时的生产力水平和科学技术水平过低，人类尚不能科学地回答“世界是由什么组成”、“它们是怎么结合在一起”等问题。随着人类对组成物质内部结构的认识不断深入，物质组成的神秘面纱也随之被逐步揭开。古希腊时期，就有哲学家提出“土气水火——四元说”的理论；我国古代也同样流传着“五行”之说。到了近代，随着元素周期表的面世，人类认识到物质是由100多种元素构成的 [1]。随着科学技术水平的发展，电子、光子等基本粒子在实验中被发现，标志着人类开启研究微观世界的大门。随后在宇宙线实验中陆续发现 μ, π, K 等粒子，对撞机实验中又发现了 Λ, Σ 等粒子。随着上百种基本粒子被发现，科学家们认为这些粒子的结构具有一定的规律性。1964年盖尔曼和兹韦格提出一种新的强子结构模型——夸克模型 [2]。随后经过科学家的努力，建立了弱电统一理论和量子色动力学，从而诞生了标准模型。标准模型是目前粒子物理中最成功的理论。

1.1.1 基本粒子

在标准模型中，基本粒子为以下几类：夸克、轻子、规范玻色子和希格斯 (Higgs) 粒子，如图 1-1 所示，具体为：

夸克：夸克是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子，共有36种不同状态的夸克。在夸克模型中包括三代夸克，每代包含两种夸克，因此共有6味夸克。具体为第一代是上夸克和下夸克；第二代是粲夸克和奇异夸克；第三代是顶夸克和底夸克。每种夸克都有相对应的反夸克，其中，成对的正反夸克组成介子，三夸克组成重子。因此，为了让重子带整数电荷，夸克则必须带分数电荷。每一代夸克中都有一个带正电 $+\frac{2}{3}$ 的夸克和一个带负电 $-\frac{1}{3}$ 的夸克，其中，上夸克、顶夸克和粲夸克所带的电荷为 $+\frac{2}{3}$ ，下夸克、底夸克和奇夸克所带的电荷为 $-\frac{1}{3}$ 。

轻子：与夸克一样，也是自旋为 $\frac{1}{2}$ 的费米子，共有12种。轻子包括电子、 μ 子和 τ 子，以及相对应的中微子(ν_e, ν_μ, ν_τ)，其中电子、 μ 子、 τ 子均带负电，且质量较

大；中微子(ν_e 、 ν_μ 、 ν_τ)不带电，且几乎没有质量。由于每种轻子都存在反粒子，因此总有12种轻子。

规范玻色子：自旋为1且具有传播作用的媒介粒子，总共有12种。规范玻色子包括：传递弱相互作用的中间玻色子(W^+ 、 W^- 、 Z^0)、8种传递强相互作用的胶子和1种传递电磁相互作用的 γ 光子。

希格斯(Higgs)粒子：2012年，希格斯(Higgs)粒子被发现，补齐了标准模型中基本粒子的最后一块拼图，并且它是可以引起自发对称性破缺的粒子。

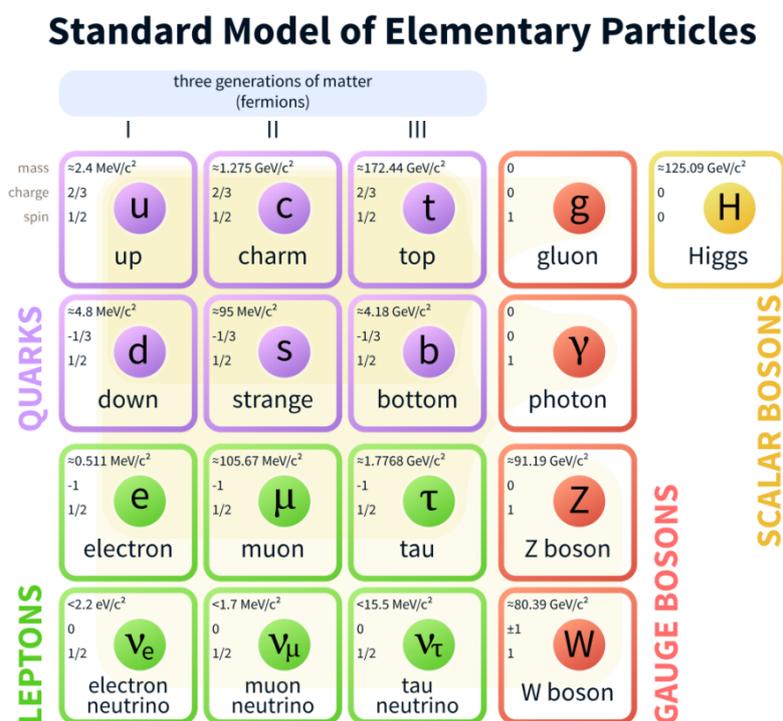


图 1-1 标准模型中的基本粒子

1.1.2 四种相互作用

自然界中物体间的四种基本相互作用分别为：引力、强、弱和电磁相互作用。其中，电磁相互作用和引力相互作用是长程力，它们都与距离的平方成反比，主要在宏观世界中起作用；而弱相互作用与强相互作用是短程力，主要在微观世界中起作用。表 1-1 列出了四种相互作用特征的对比。

目前标准模型不能够很好地描述引力相互作用。但是对于弱相互作用和电磁作用，由标准模型中格拉肖-温伯格-萨拉姆电弱统一理论给出描述，强相互作用则由量

表 1-1 四种相互作用特征对照表

	强相互作用	电磁相互作用	弱相互作用	引力相互作用
源	色荷	电荷	弱超荷	质量
典型作用时间(sec)	$10^{-23}s$	$10^{-16}s$	$10^{-10}s$	—
相互作用常数	$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi\hbar c}$ $\cong 1 \sim 10$	$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ $\cong 1/137$	$\frac{G_F(M_{Pl}c^2)^2}{(\hbar c)^3}$ $\cong 1 \times 10^{-5}$	$\frac{G_N M^2}{4\pi\hbar c}$ $\cong 5 \times 10^{-40}$
力程(fm)	$1 fm$	∞	$1/400 fm$	∞
力的传递者	胶子	光子	中间玻色子(W^\pm, Z^0)	—

子色动力学(QCD) 理论 [3] 描述。

在过去的几十年中，标准模型成功地经受了实验的检验。然而标准模型自身仍旧存在着一些问题，比如其19个自由参数带来的诸多不确定性以及它对引力的忽略等，这些问题需要进一步的研究 [4]。

1.2 强子态

根据组成夸克的数目，强子分为两类：介子和重子。1964年，盖尔曼和兹韦格提出的强子结构的夸克模型，可以很好地解释当前大部分重子和介子的结构。

1.2.1 介子

在夸克模型中，夸克 (q) 和反夸克 (\bar{q}) 组成了介子。假设 L 是介子的轨道角动量，则两个自旋为 $\frac{1}{2}$ 的夸克组成的介子的宇称为 $(-1)^L$ ，当夸克 (q) 和反夸克 (\bar{q}) 是同一种夸克的正反粒子时，此时的电荷共轭宇称为 $(-1)^{L+S}$ ，其中 S 表示的总自旋，且 S 只能为 0 或 1。根据介子的总角动量 J 和宇称是否满足 $(-1)^J$ 的关系，可将其分为：张量介子 (2^+)、矢量介子 (1^-)、轴矢量介子 (1^+)、标量介子 (0^+)、赝标量介子 (0^-) 等。

根据 $SU(3)$ 群理论及其对称性可知，三种轻夸克 s 、 u 、 d 组成一个八重态和一个单态。对于轨道角动量 L 为 0 的介子， J^{PC} 为 0^{-+} 的赝标量介子的八重态和单态如图 1-2 所示； J^{PC} 为 1^{-} 的矢量介子的八重态和单态如图 1-3 所示。

1.2.2 重子

夸克模型认为，三个夸克或者三个反夸克构成重子，这三种夸克的味可以相同

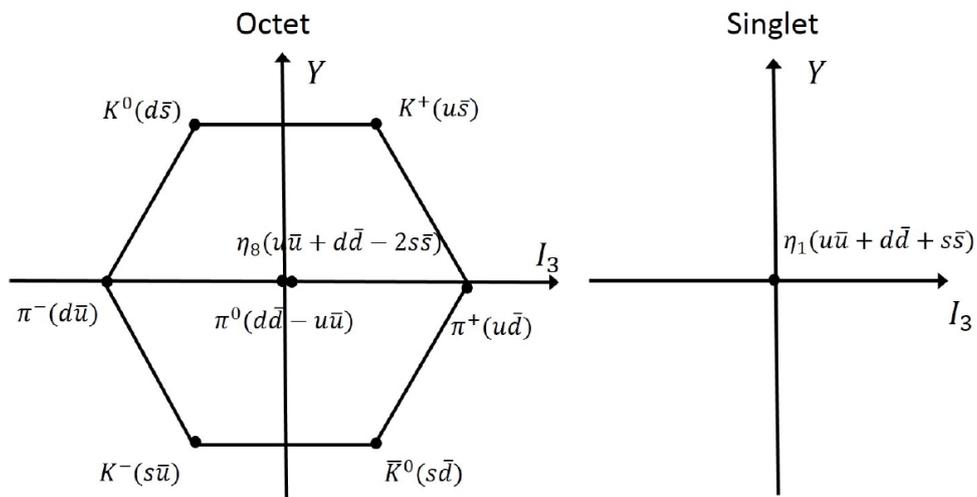


图 1-2 赝标量介子的八重态和单态

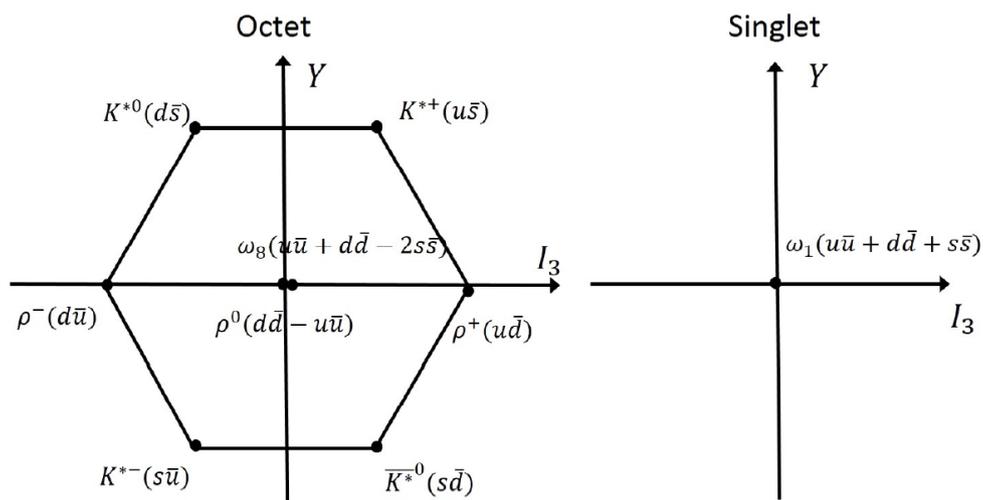


图 1-3 矢量介子的八重态和单态

也可以不同。根据SU(3) 群的不可约表示可知， $3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10$ ，即三种夸克的构成可分为重子单态、八重态以及十重态。重子八重态和十重态的夸克组成如图 1-4所示。当夸克之间的轨道角动量L 为0 时，重子可以分为两组：第一组是八个 J^P 为 $(1/2)^+$ 的重子，此时仅有两个夸克的自旋方向相同；第二组是十个 J^P 为 $(3/2)^+$ 的重子，此时三个夸克的自旋方向都相同。

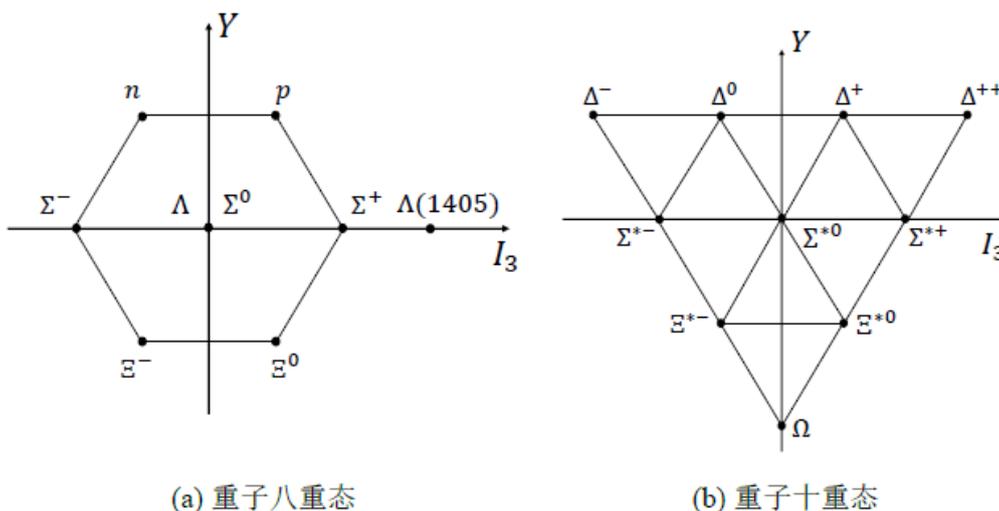


图 1-4 重子八重态和重子十重态

1.2.3 新型强子

由于胶子的自相互作用，QCD 理论预言除了上述所提到的介子和重子外，还存在新型强子态，即：胶子束缚态、混杂态和多夸克态。目前高能实验上仍旧把寻找新型强子态做为验证QCD 理论的目标之一。

1.3 粲偶素和 J/ψ 衰变

1.3.1 粲偶素家族

正粲夸克和反粲夸克通过胶子结合形成的束缚态叫做粲夸克偶素。1964 年，为了将强子八重态结构扩展到更大的对称群，Borken 等人首次提出粲夸克的概念 [5]。1970 年，格拉肖等人为了解决弱衰变过程中奇异数不守恒的难题，提出了GIM 机制 [6]。随后美国布鲁克海文实验室发现了 J/ψ 粒子 [7]，几乎就在同一时刻斯坦福直线加速器也发现了 J/ψ 粒子 [8]，从而证实了粲夸克的存在。之后在SPEAR 上发现了 $\psi(2S)$ 粒子，其它粲夸克家族的成员也相继被发现 [9] [10] [11]。图 1-5 是目前已经被发现的粲偶素家

族图谱。

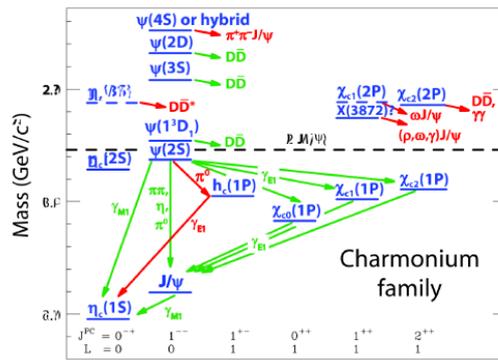


图 1-5 粲偶素能谱

1.3.2 J/ψ 衰变

J/ψ 粒子是 e^+e^- 对撞过程中产生的质量最轻的 $c\bar{c}$ 束缚态。 J/ψ 粒子相较于别的粒子，它的特征是寿命长，宽度窄。它的宽度 $\Gamma_{J/\psi}$ 为 $(91.0 \pm 3.2)\text{keV}$ ，质量 $M_{J/\psi} = (3096.916 \pm 0.011)\text{MeV}/c^2$ 。由动量守恒可知， J/ψ 粒子衰变方式是OZI 压低，它的五种主要衰变方式的费曼图如图 1-6 所示。

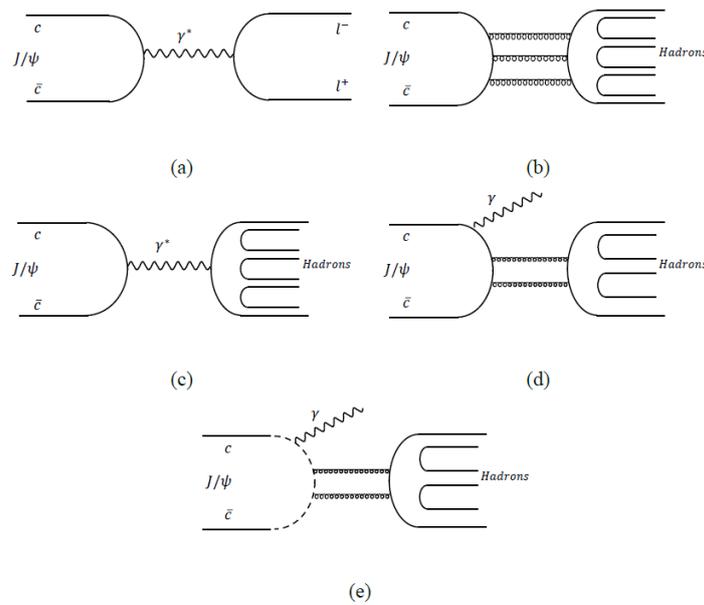


图 1-6 J/ψ 的五种主要衰变方式的费曼图

1.4 论文选题和结构

1.4.1 论文选题的背景和意义

η' 介子自从1964 年被发现以来, 一直是理论和实验研究的热点之一。 η' 介子在标准模型中除了可以参与强相互作用衰变, 还可以验证低能区QCD 理论——手征微扰理论。另外, 由于 η' 介子质量很轻, 衰变过程中本底较低, 所以 η' 的稀有衰变为检验基本对称性提供了理想的场所。目前已经有很多实验组对 η' 介子的内部结构和衰变性质进行了研究, 但由于统计样本的限制导致实验结果的测量精度不够, 因此很难检验理论预言的正确性。北京谱仪III 实验上拥有世界上最大的 J/ψ 样本, 又由于 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'$ 的分支比很大, 可以利用 J/ψ 的辐射衰变为研究 η' 衰变提供干净的 η' 事例, 从而使得北京谱仪III 实验为研究 η' 衰变物理分析提供了最优的环境。本论文主要研究内容包括以下几个部分:

- 利用BESIII 实验采集的 $(10087 \pm 44) \times 10^6$ [12] 个 J/ψ 事例, 精确测量 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的分支比。2014 年, BESIII 合作组利用2009 年和2012 年采集的 1.3×10^9 个 J/ψ 事例, 在 4π 的不变质量谱上观测到了清晰的 η' 信号, 如图 1-7 所示。测得衰变道 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的分支比分别为: $\mathcal{B}(\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-) = (8.53 \pm 0.69 \pm 0.64) \times 10^{-5}$ 和 $\mathcal{B}(\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0) = (1.82 \pm 0.35 \pm 0.18) \times 10^{-4}$ [13]。但由于之前BESIII 实验上测得这两个衰变道的分支比结果与理论预测仅在误差范围内相符合, 可能是实验数据样本不足或者是实验分析的本底估计不充分, 因此本文使用 10087×10^6 个 J/ψ 事例精确测量了这两个衰变道的分支比结果, 并与之前的结果做对比, 从而可以进一步验证手征微扰理论和矢量介子模型的正确性。
- 利用选定的 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 数据样本, 对该过程进行了衰变振幅分析。根据该过程的衰变振幅公式, 提取了类时跃迁形状因子。通过将 ρ 的质量和宽度固定为《粒子数据手册》(PDG) 中的值, 确定了该衰变道共振项贡献与非共振项贡献之比。
- 利用BESIII 实验上采集的 $(10087 \pm 44) \times 10^6$ 个 J/ψ 事例寻找稀有衰变 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 。通过寻找该稀有衰变过程并深入仔细研究, 可以进一步理解基本对称性并且能够验证手征微扰理论和矢量为主模型。很多实验组都曾试图寻找稀有衰

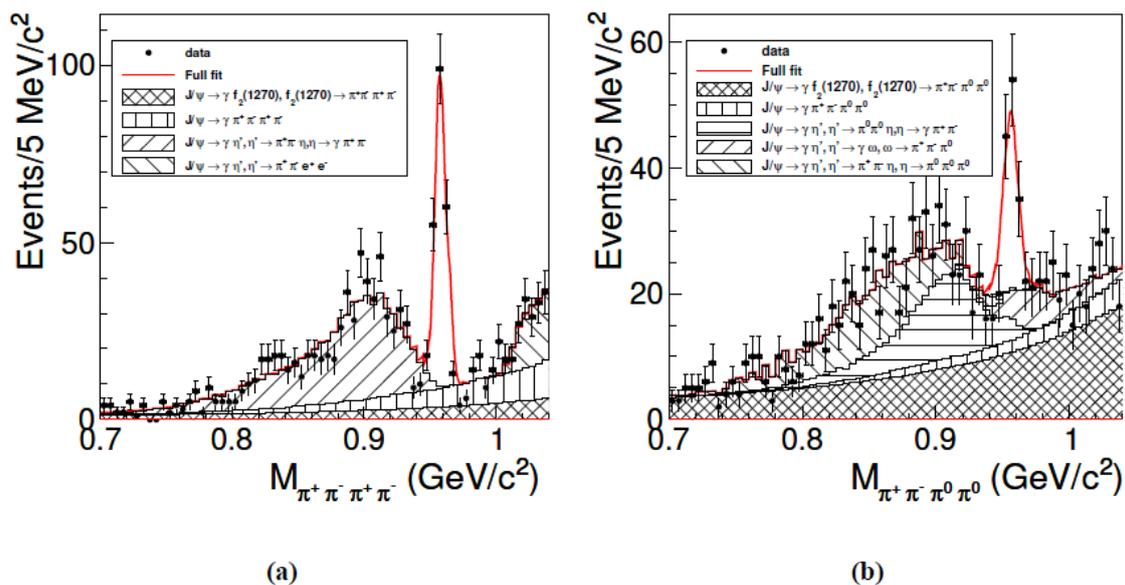


图 1-7 4π 的质量谱的拟合结果。(a) 衰变道 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$; (b) 衰变道 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 。

变 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ ，2020 年，BESIII 实验组利用 1.3×10^9 个 J/ψ 事例，尝试寻找稀有衰变 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ ，未在 $4\pi^0$ 的质量谱上观测到明显的 η' 信号，如图 1-8 所示，最后给出了在 90% 置信度下的分支比上限[14]。本文使用 $(10087 \pm 44) \times 10^6$ 个 J/ψ 事例精确测量了稀有衰变道 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 的分支比上限结果，从而可以为验证手征微扰理论和矢量介子模型提供重要的实验依据。

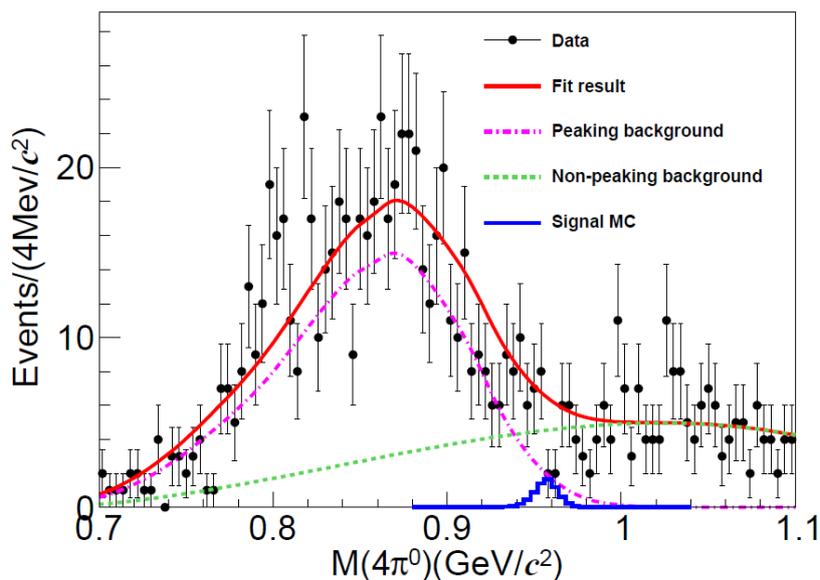


图 1-8 $4\pi^0$ 质量谱的拟合结果。

1.4.2 论文结构

根据研究内容，本论文分为以下几个部分：

- 第一章 介绍了粒子物理标准模型相关的知识、强子态、及粲偶素家族和 J/ψ 衰变，从而引出本论文的选题背景和意义。
- 第二章 介绍了北京正负电子对撞机和北京谱仪III的组成结构和工作原理。
- 第三章 介绍了利用100 亿 J/ψ 事例，对 η' 的三种衰变模式进行分支比测量，并对 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 进行振幅分析。
- 第四章 介绍在分支比测量和振幅分析过程中的所有系统误差。
- 第五章 总结与展望。



第二章 北京正负电子对撞机和北京谱仪

北京正负电子对撞机(BEPCII) 和相对应的北京谱仪III 为研究 τ - 粲物理提供了有利条件。本文所使用到的物理分析的数据都是基于BEPCII 产生的, 经由北京谱仪III 探测采集完成的。本章将详细介绍BEPCII 和BESIII 的结构, 及其工作原理等。

2.1 北京正负电子对撞机(BEPCII)

1984 年10 月, 中国科学院高能物理研究所建立了我国的第一台高能加速器——北京正负电子对撞机(BEPC)。该实验装置促使我国高能物理迅速发展, 凭借其优势中国在 τ -粲物理研究上已经达到国际领先地位。2004 年, 为了保持在研究 τ -粲物理方面的优势, 我国对BEPC 进行了升级, 升级后的对撞机采用的是双环设计方案, 目的是使正负电子在各自的储存环中移动, 最终在束流能量为1.89GeV 时的峰值亮度能达到 $1 \times 10^{33} \text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ 。该项目于2008 年完成, 在2009 年正式开始对撞取数。2016 年, BEPCII 的峰值亮度达到设计值。表格 2-1 是BEPC 升级前后的主要参数对比。

表 2-1 升级前后BEPC的主要涉及指标

设计参数	BEPC	BEPCII
储存环周长(m)	240.4	237.5
质心能量(GeV)	2 ~ 5	2 ~ 4.6
高频频率 (MHz)	199.5	499.8
储存环个数	1	2
在 $2 \times 1.89\text{GeV}$ 处的峰值亮度($\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}$)	$\sim 1 \times 10^{31}$	$\sim 1 \times 10^{33}$
束团间隔(m/ns)	-	2.4/8
束团个数	2×1	2×93
束流流强(A)	2×0.035	2×0.91
束团宽度($\sigma_x; \mu\text{m}$)	~ 840	~ 380
束团高度($\sigma_y; \mu\text{m}$)	~ 37	~ 5.7
束团长度($\sigma_z; \text{cm}$)	~ 5	1.5
相对的能散	5×10^{-4}	5×10^{-4}
对撞点束流夹角 (mrad)	0	± 11

升级后的BEPCII 由四部分 [15]组成, 分别是注入器与储存环、束流输运线、北京谱仪以及同步辐射装置。BEPCII 的外形很像一个巨大的羽毛球拍, 其中, 注入器就是

球拍的把手，它是长为202m 的直线加速器，见图 2-1。对撞实验的整个过程为：通过电子枪产生的负电子，和通过负电子轰击钨靶产生的正电子， e^+e^- 被加速器加速后通过束流运输线运送到储存环中。束流到达储存环后继续积累，存储，加速和对撞，当束流加速到指定的能量时，会在对撞点处发生对撞，随后位于该处的探测器——北京谱仪III 开始采集数据样本。

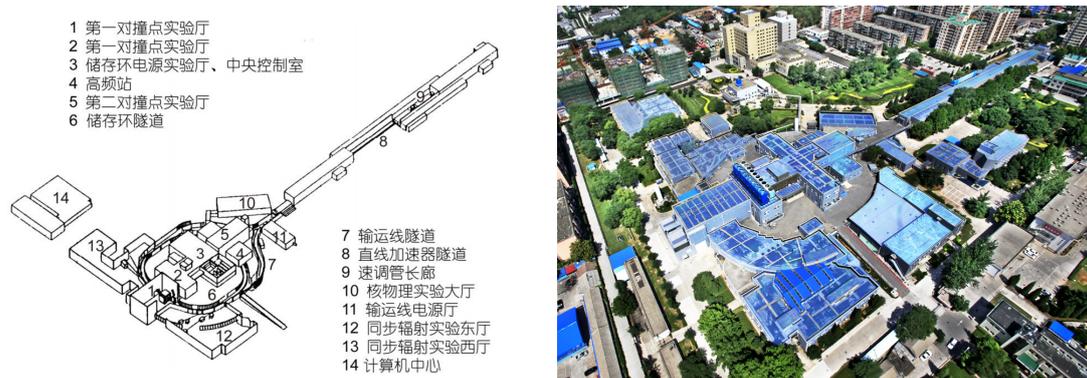


图 2-1 北京正负电子对撞机整体示意图及鸟瞰全景

2.2 北京谱仪III(BESIII)

大型BESIII 探测器位于BEPCII 南对撞点处 [15]，主要运行在 τ - 粲能区，是用来采集对撞机产生的大量对撞数据，从而可以进一步检验轻强子谱物理，粲偶素物理和轻子普适性，也为寻找超出标准模型之外的新物理提供了有利条件。图 2-2 是BESIII 探测器的结构构成图 [15]（从内至外依次是）：主漂移室(MDC)、飞行时间计数器(TOF)、电磁量能器(EMC)、超导磁铁(SSM) 及 μ 子鉴别器(MUC)。接下来将详细介绍各个子探测器结构。

2.2.1 主漂移室(MDC)

主漂移室(MDC) 位于BESIII 最内层，可以精确测量带电粒子的动量和径迹位置，还提供能损信息($\frac{dE}{dx}$)，从而来进行粒子鉴别。

由于漂移室位于BESIII 的最内层，为了减少束流管的高本底对漂移室寿命的影响，将圆柱体的漂移室分为内室和外室两部分，并且内外室之间是相互独立的。为了达到BEPCII 高计数率的目的，MDC 采用的是小单元结构，并且在每个单元中，处于单元中心的是信号丝，8 根场丝围绕在它的周围。其次，为了提高空间分辨和动量分辨，漂移室的工作气体使用的是氦基气体，以减少低动量粒子和工作气体发生多次散

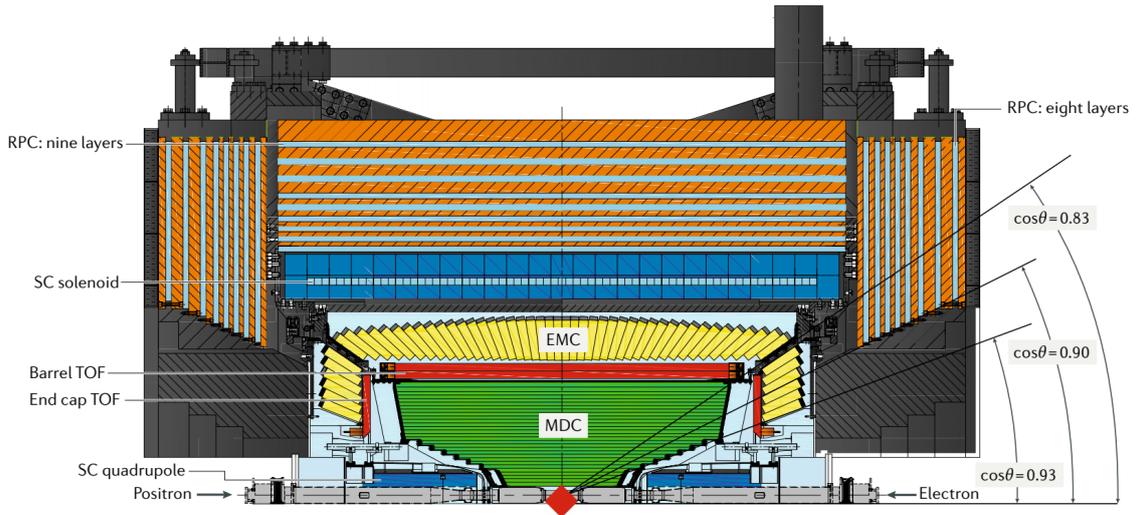


图 2-2 北京谱仪(BESIII)总体结构示意图。

射效应所带来的影响。图 2-3 是漂移室(MDC) 的整体结构。

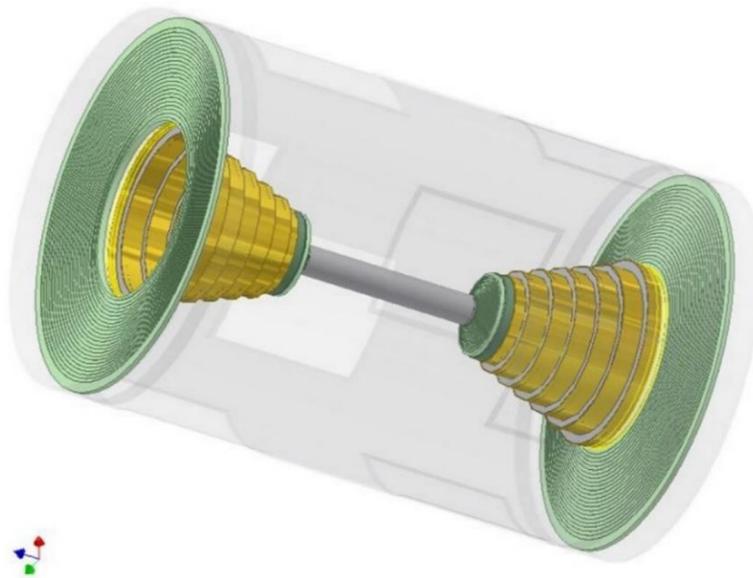


图 2-3 漂移室结构示意图

2.2.2 飞行时间计数器(TOF)

飞行时间探测器(TOF) 是测量带电粒子飞行时间的子探测器，位置处于MDC 和晶体量能器之间，分为端盖和桶部两部分，如图 2-4 所示。其中端盖TOF 和桶部TOF 的立体接受度分别为0.85-0.95 和0.83。桶部TOF 采用双层闪烁体结构，其分辨率能达

到80 ~90 ps，端盖TOF 采用的是单层结构，它的时间分辨率为110 ps。在2015 年的时候对端盖(ETOF) 进行改造升级，升级后时间分辨总计能达到60 ps。飞行时间计数器基本覆盖了MDC 和量能器的接受度，因此在 2σ 鉴别要求下，飞行时间计数器的 K/π 介子的动量分辨可以达到 $0.9\text{GeV}/c$ 。

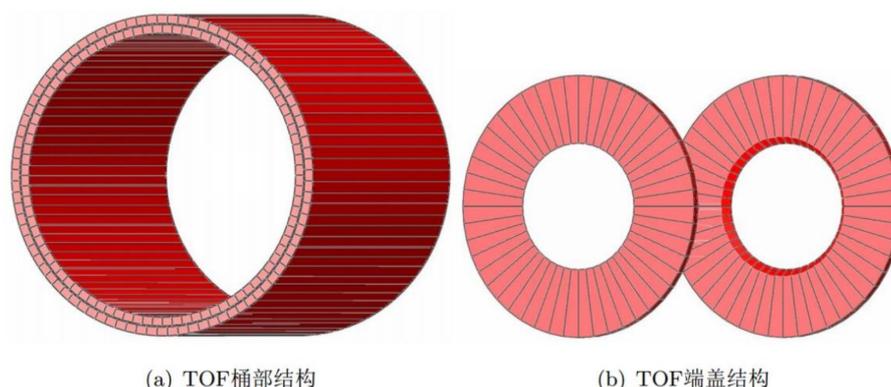


图 2-4 TOF探测器的立体结构

2.2.3 电磁量能器(EMC)

电磁量能器(EMC) 位于MDC 和TOF 外侧，主要作用是通过分析电子和光子产生的电磁簇射来精确测量它们的能量分辨和位置信息；还提供中性(γ) 能量触发。电磁量能器(EMC) 也由端盖和桶部两个部分构成，端盖和桶部的覆盖极角($\cos\theta$) 分别为 $0.86 \sim 0.93$ 和小于 0.83 。BESIII 对比各种材料后，选择采用发光效率高和光电转换率高的6272 块 $C_sI(Tl)$ 晶体来制作电磁量能器，图 2-5 是晶体的排列方式。

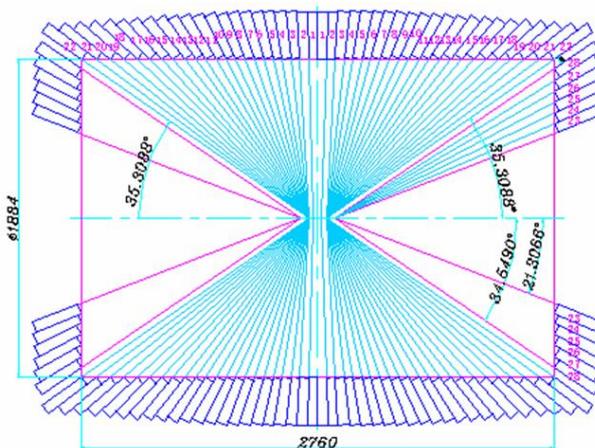


图 2-5 量能器上晶体安排示意图

2.2.4 超导磁铁(SMG)

超导磁铁处于电磁量能器(EMC)和 μ 子鉴别器之间,主要功能是提供整个系统所需要的恒定均匀高强度(1T)的磁场环境。由于带电粒子的偏转半径与磁场强度和带电粒子的自身动量有关,因此可以通过恒定的磁场来得到粒子的径迹和动量信息。但是当磁场强度过高或过低时,带电粒子的重建效率都会降低。综合考虑之下,最终BESIII超导磁铁的强度设计为1T。

2.2.5 μ 子鉴别器(MUC)

μ 子鉴别器(MUC)处于BESIII最外层,它的功能是测量 e^+e^- 对撞后产生的 μ 粒子,根据其角度和动量信息来筛选在MUC中的深度和击中层数等信息,再结合漂移室、飞行时间计数器和电磁量能器中的粒子信息,从而可以精确测量 μ 粒子的信息。探测 μ 粒子的任务主要是由阻性板计数器(RPC)来完成,它是由两层高阻抗的平行电极板构成,两层平行电极板的中间通入的气体是由氩气、四氟乙烷和异丁烷(比例为:50:42:8)混合而成,如图2-6所示。

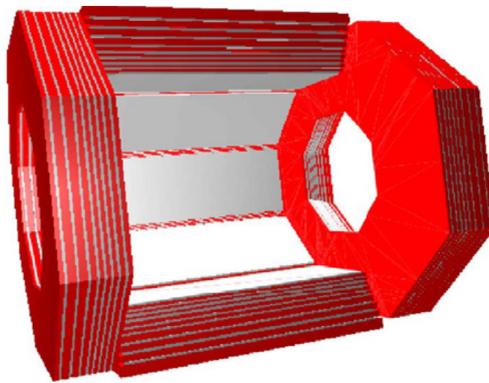


图 2-6 量能器上晶体安排示意图

2.2.6 触发判选系统

为了加快事例选择,北京谱仪III采用触发判选系统。由于北京正负电子对撞机的储存环采用间断的多束团模式,它的束团间隔为8 ns,因此触发判选系统采用流水线方式进行工作。

2.2.7 数据获取系统

BESIII 的数据获取系统以触发系统和前端电子学的硬件系统为基础，可以快速实现处理和输出数据的目标。

2.3 本章小结

本章主要介绍了北京正负电子对撞机(BEPCII) 和北京谱仪(BESIII) 的运行原理和结构设计，以及BESIII 的触发判选系统和数据获取系统。

第三章 $\eta' \rightarrow 4\pi$ 的精确测量

3.1 数据样本和MC模拟样本

3.1.1 数据样本和BOSS版本

本文利用BESIII 采集到的 10087×10^6 个 J/ψ 事例 [12], 对 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 、 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 和 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 进行了详细的分析。表 3-1 展示的是数据样本的详细信息。BOSS 环境版本是7.0.8。

表 3-1 BESIII采集的 J/ψ 数据样本信息。

年份	数据量($\times 10^6$)
2009	224.0
2012	1088.5
2017 – 2019	8774.0

3.1.2 MC模拟样本

蒙特卡洛模拟(MC) 可以实现事例选择的优化、信号效率以及物理本底的估计。基于GEANT4 [16] 开发的BOOST [17] 软件包含了BESIII 探测器的几何结构和制作材料、探测器响应、数字化模型和探测器运行条件等。MC 样本是通过产生子KKMC [18, 19] 产生的事例；对于已知的衰变过程是根据PDG 上的分支比通过EVTGEN [20, 21] 产生、对于未知的过程则是根据LUNDCHARM [22] 产生，这种MC 样本在后文中称之为“单举MC 样本”。MC 产生时考虑了束流发散、初态辐射以及末态辐射的影响，产生的事例中有一部分随机的触发记录的数据事例混合在里面，而这些数据事例则是已经考虑了存在的本底。相空间产生子不能很好地描述数据，因此基于手征微扰理论和矢量介子为主模型，根据文献 [23] 中的振幅公式，分别模拟产生所研究过程的信号MC 样本，表 3-2 是产生的信号道MC 样本的具体信息，包括衰变过程、使用的产生子模型和产生的MC 样本事例数。

表 3-2 产生的信号MC样本信息。

各个衰变道的衰变链(物理模型)			事例数(10^4)
$J/\psi \rightarrow \gamma\eta'$ (HELAMP 1.0 0.0 1.0 0.0),	$\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ (DIY)		225
$J/\psi \rightarrow \gamma\eta'$ (HELAMP 1.0 0.0 1.0 0.0),	$\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ (DIY)	$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	225
$J/\psi \rightarrow \gamma\eta'$ (HELAMP 1.0 0.0 1.0 0.0),	$\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ (DIY)	$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	900

3.2 基本的事例选择

衰变过程 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 、 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ 中 η' 介子是由 J/ψ 衰变得到的, 为了得到干净的候选事例, 末态粒子的基本事例选择条件如下:

3.2.1 带电径迹

带电径迹是由主漂移室(MDC)内的击中信息重建得到的, 要求每条好的带电径迹满足以下两点:

1. 每条带电径迹在MDC内的极角 θ 需满足: $|\cos\theta| < 0.93$;
2. 为了排除宇宙线和束流管中的气体以及束流发生相互作用带来的本底, 顶点要求: $|R_{xy}| \leq 1.0\text{cm}$ 以及 $|R_z| \leq 10.0\text{cm}$, 其中 $|R_{xy}|$ 和 $|R_z|$ 分别表示 $x-y$ 平面内带电径迹到对撞点的横向距离和 z 方向上带电径迹到对撞顶点的纵向距离。

3.2.2 中性径迹

光子是通过EMC中的沉积的电磁簇射团重建得到的, 要求每条“好光子”需满足以下两点:

1. 光子在桶部的沉积能量 $E_\gamma > 25\text{ MeV}$ ($|\cos\theta| \leq 0.8$), 在端盖的沉积能量 $E_\gamma > 50\text{ MeV}$ ($0.86 \leq |\cos\theta| \leq 0.92$)。
2. 对于包含带电径迹的事例, 要求光子在主漂移室(MDC)中的时间与事例最初时间的差(T), 满足条件 $0 \leq T \leq 14(\times 50\text{ns})$; 对于不含有带电径迹的事例, 要求光子与最大能量的光子在电磁量能器(EMC)中的相对簇射时间(T), 满足条件 $-10 \leq T \leq 10(\times 50\text{ns})$ [24]。

3.3 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 的研究

本小节将从事例选择的终选条件、数据分析、本底分析和拟合结果以及振幅分析

等几个方面展开研究。

3.3.1 事例终选

对于 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'$, $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$, 其衰变末态是 $\gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$, 因此要求候选事例中必须具有4条好带电径迹和至少一个好光子, 且带电径迹的总电荷数为0。本分析中, 并没有要求对带电径迹进行粒子鉴别。

为了尽可能压低本底和提高事例选择效率, 对末态进行运动学拟合。如果一个事例中含有2个或者2个以上的好光子, 则对所有的光子进行循环, 并保留运动学拟合结果最小 χ_{4C}^2 对应的候选事例。同时, 根据信噪比 $\frac{S}{\sqrt{S+B}}$ 优化结果, 要求 $\chi_{\gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-}^2 < 35$, 如图 3-1 所示。为了进一步排除多光子组合的影响, 要求 $\chi_{\gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-}^2 < \chi_{\gamma\gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-}^2$ 。

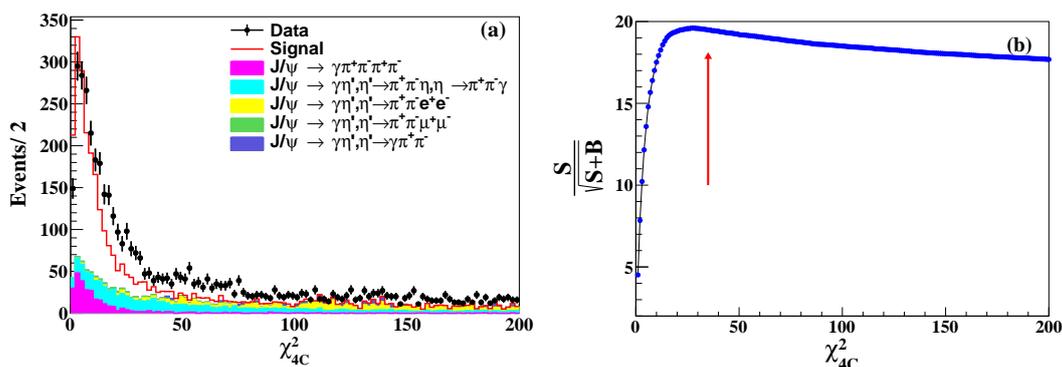


图 3-1 (a) 运动学拟合的 χ_{4C}^2 分布图, 带误差棒的黑点表示数据, 红色直方图来自信号MC样本, 其它不同颜色的直方图代表遍举MC样本。(b) χ_{4C}^2 的优化曲线分布图。

通过上述选择条件后, 我们可以在 $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 的不变质量谱上观测到明显的 η' 信号, 如图 3-2 所示。

3.3.2 本底研究

我们采用 10^{10} 个 J/ψ 单举蒙特卡洛事例, 分析可能的背景道过程。针对这批单举蒙特卡洛样本使用与数据相同的事例选择条件后, 得到剩余主要的背景道, 如表 3-3 所示。其中, 主要的本底可分为两类:

- 峰状本底:

$$- J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$$

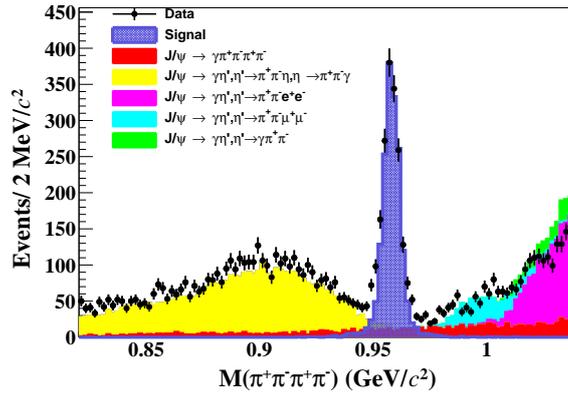


图 3-2 实验数据经过事例选择后 $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 的不变质量谱分布。其中带误差棒的黑点表示数据，蓝色阴影的直方图来自信号MC 样本，其它不同颜色的阴影直方图代表遍举MC 样本。

- $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-e^+e^-$
- $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$
- $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$

• 连续性本底:

- $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$

因为衰变道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$ 中 η 的动量很小，由 η 衰变得到的光子很容易丢失，因此该衰变道很容易被误鉴别为信号道。为了更好的描述数据，模拟产生了 56×10^5 个遍举蒙特卡洛事例。其中，按照文献 [25] 中的达利兹分析的结果来描述 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta$ ，根据文献 [26] 中的衰变振幅公式模拟得到 $\eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$ 。经过与实验数据相同的事例选择条件后，本底道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$ 的 $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 的不变质量谱分布如图 3-3 (a) 所示。

由于 e 和 μ 很有可能被误鉴别为 π ，因此衰变道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-e^+e^-$ 和 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$ 也有可能被误鉴别为信号道。采用与 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-l^+l^-$ [27] 相同的产生子，分别模拟产生了 4×10^6 个遍举蒙特卡洛事例。经过与上述相同的事例选择条件后，这两条对应衰变道的 $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 的不变质量谱分布如图 3-3 (b)(c) 所示。

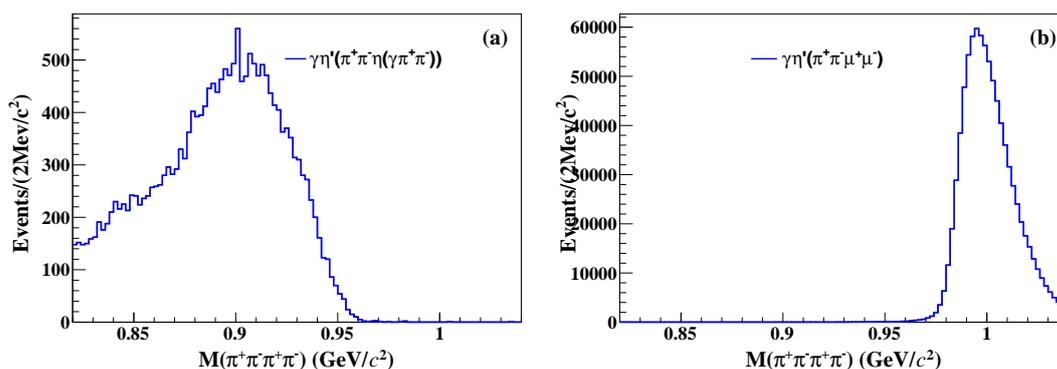
从 J/ψ 和 η' 衰变得到的光子撞击束流管 and 主漂移室的内壁可以被转换成光子对，因此衰变道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-, \gamma \rightarrow e^+e^-$ 也有可能被误鉴别为信号，采用文献

[28] 中考虑了 $\rho - \omega$ 干涉和其它项贡献的DIY 产生子, 模拟产生了 251×10^5 个遍举蒙特卡洛事例。通过与上述相同的事例选择条件后, 该衰变道的 $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 的不变质量谱分布如图 3-3 (d) 所示。

对于相空间本底道 $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$, 它对于 η' 的贡献可以用一条平滑的曲线来描述。经过上述的事例选择条件后, 相空间本底道的 $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 的不变质量谱分布如图 3-3 (e) 所示。

表 3-3 使用 10^{10} 个单举蒙特卡洛事例经过事例选择后剩余的主要本底道。

序号	衰变道	末态粒子	事例数
0	$J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	$\gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	8758
1	$J/\psi \rightarrow \gamma f_0', f_0' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	$\gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	8408
2	$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$	$\gamma\gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	7664
3	$J/\psi \rightarrow \pi^0\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	$\pi^0\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	5274
4	$J/\psi \rightarrow \gamma f_2(1270), f_2(1270) \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	$\gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	3023
5	$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-e^+e^-$	$\gamma\pi^+\pi^-e^+e^-$	2194
6	$J/\psi \rightarrow \gamma K_S^0 K_S^0, K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-, K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$	$\gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	1494
7	$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-e^+e^-$	$\gamma\gamma\pi^+\pi^-e^+e^-$	667
8	$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \gamma e^+e^-$	$\gamma\gamma\pi^+\pi^-e^+e^-$	478
9	$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$	$\gamma\gamma\pi^+\pi^-$	212
10	$J/\psi \rightarrow \gamma\rho^0\rho^0, \rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-, \rho^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$	$\gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	166



3.3.3 拟合 $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 的不变质量谱

经过上述的事例选择条件后, 我们采用unbin 的最大似然方法来拟合 $\pi^+\pi^+\pi^+\pi^-$ 的不变质量谱, 拟合范围是 $(0.82, 1.04)\text{GeV}/c^2$, 拟合中的概率密度函数表示为:

$$PDF = N_{sig} \cdot PDF_{sig} + N_{bkg1} \cdot PDF_{bkg1} + N_{bkg2} \cdot PDF_{bkg2} + N_{bkg3} \cdot PDF_{bkg3}$$

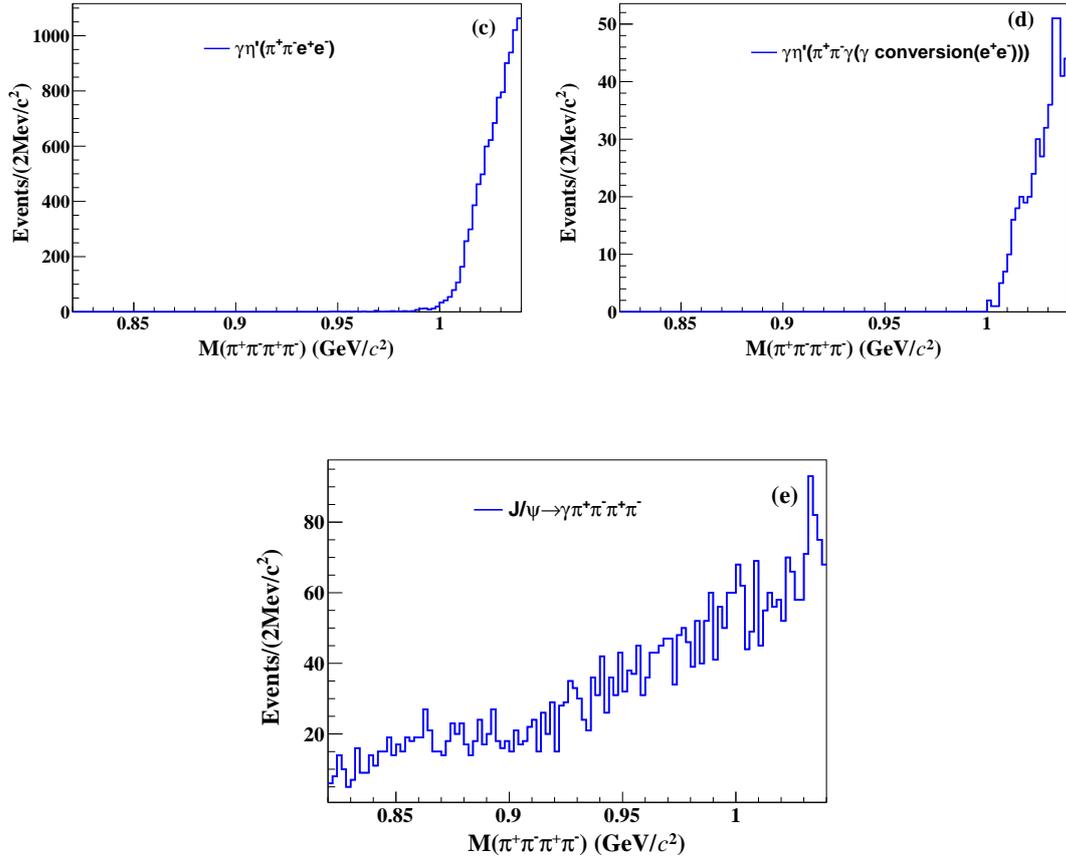


图 3-3 主要本底道的蒙特卡洛样本经过事例选择后的 $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 不变质量谱分布：(a) $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$. (b) $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$. (c) $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-e^+e^-$. (d) $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$. (e) $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$.

$$+ N_{bkg4} \cdot PDF_{bkg4} + N_{bkg5} \cdot PDF_{bkg5} \quad (3-1)$$

其中， N_{sig} 表示信号道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 的事例数， N_{bkgi} 表示第*i*项本底的事例数。在拟合的过程中，信号是由衰变振幅公式 [23] 模拟产生的MC 形状卷积高斯函数来描述的，其中高斯函数表示MC 和数据之间的差异，并且在拟合中高斯函数的中心值和分辨都是自由参数。本底道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$ 、 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$ 、 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-e^+e^-$ 、 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$ 、 $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 都是用蒙特卡洛形状来描述，并且在拟合中不同本底的事例数都是放开的。图 3-4 展示的是拟合结果，拟合中观测到的信号事例数为： $N_{sig} = 1650 \pm 48$ 。

3.3.4 分支比结果

在不考虑系统误差的情况下， $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 过程的分支比结果可通过下式计算

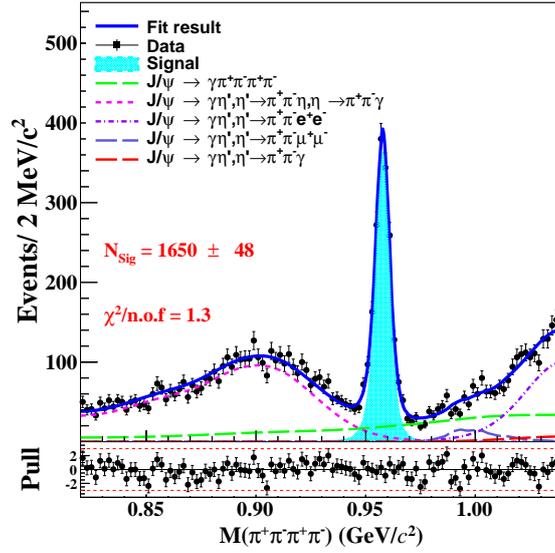


图 3-4 $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 不变质量谱的拟合图。带误差棒的点表示数据，蓝色的曲线表示最终的拟合结果，阴影部分表示信号，其他曲线分别表示各种不同的本底。

得出：

$$\mathcal{B}(\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-) = \frac{N_{sig}}{N_{J/\psi} \cdot \mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta') \cdot \epsilon} = (8.56 \pm 0.25(stat.)) \times 10^{-5} \quad (3-2)$$

其中， N_{sig} 是拟合观测到的 η' 的信号事例数， $N_{J/\psi}$ 是北京谱仪上取得 J/ψ 总事例数 $(10087 \pm 44) \times 10^6$ [12]， ϵ 表示 MC 模拟的探测效率为 36.4%（事例筛选效率流如表 3-4 所示）， $\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta')$ 是相应过程的分支比 [29] 为 $(5.25 \pm 0.07) \times 10^{-3}$ 。

表 3-4 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 信号 MC 样本的筛选效率流。

序号	筛选条件	事例数(累计效率 ϵ)
1	初始产生值	2250000(100%)
2	$N_{Charge} = 4$	1100096(48.9%)
3	$N_\gamma \geq 1$	1055740(46.9%)
4	顶点拟合	1037507(46.1%)
5	$\chi_{4C}^2 < 35$	824378(36.6%)
6	$\chi_{4C}^2(\gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-) < \chi_{4C}^2(\gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-)$	819859(36.4%)

3.3.5 形状因子的测量

1. $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 的振幅分析： $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 的衰变振幅公式 [23] 表示为：

$$\mathcal{A}(\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-) \approx \frac{N_c \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}}{16\sqrt{3}\pi^2 F_\pi^5} p_1^\mu p_2^\nu p_3^\alpha p_4^\beta \left((c_1 - c_2) \left[\frac{s_{12}}{D_\rho(s_{12})} + \frac{s_{34}}{D_\rho(s_{34})} - \frac{s_{14}}{D_\rho(s_{14})} - \frac{s_{23}}{D_\rho(s_{23})} \right] \right)$$

$$+ c_3 \left[\frac{m_\rho^2(s_{12} + s_{34})}{D_\rho(s_{12})D_\rho(s_{34})} - \frac{m_\rho^2(s_{14} + s_{23})}{D_\rho(s_{14})D_\rho(s_{23})} \right] \quad (3-3)$$

形状因子 $F(s_{12}, s_{34})$ 表示为:

$$F(s_{12}, s_{34}) = \left[\frac{s_{12}}{D_\rho(s_{12})} + \frac{s_{34}}{D_\rho(s_{34})} - \frac{s_{14}}{D_\rho(s_{14})} - \frac{s_{23}}{D_\rho(s_{23})} \right] + \frac{c_3}{c_1 - c_2} \left(\frac{m_\rho^2(s_{12} + s_{34})}{D_\rho(s_{12})D_\rho(s_{34})} - \frac{m_\rho^2(s_{14} + s_{23})}{D_\rho(s_{14})D_\rho(s_{23})} \right) \quad (3-4)$$

其中

$$D_\rho(s) = m_\rho^2 - s - im_\rho\Gamma_\rho(s), \quad (3-5)$$

$$\Gamma_\rho(s) = \frac{m_\rho}{\sqrt{s}} \left(\frac{s - 4m_\pi^2}{m_\rho^2 - 4m_\pi^2} \right)^{3/2} \Gamma_\rho \quad (3-6)$$

这里 Γ_ρ 表示 ρ 的宽度; N_c 是颜色自由度, 这里的值取3; F_π 表示 π 的衰变常数, $F_\pi = 92.2\text{MeV}$; $s_{ij} = (p_i + p_j)^2, i, j = 1, \dots, 4$, 其中 p_i 表示第 i 个 π 粒子的四动量。参数 c_{1-3} 的值依赖于模型, 用于确定不同交互作用项的贡献。

在拟合中, 只有 $\frac{c_3}{c_1 - c_2}$ 的值在归一化后才有意义, 因此在后续的振幅分析中定义一个量 $\alpha = \frac{c_3}{c_1 - c_2}$ 。

2. 拟合方法: 以测量值 ξ_i 为特征的第 i 个事件的概率为:

$$P(\xi_i) = \frac{\omega(\xi_i)\epsilon(\xi_i)}{\int d\xi\omega(\xi)\epsilon(\xi)}, \quad (3-7)$$

其中 $\epsilon(\xi_i)$ 是探测效率, $\omega(\xi_i) \equiv \left(\frac{d\sigma}{d\phi}\right)_i$ 是微分截面。 $\int d\xi\omega(\xi)\epsilon(\xi)$ 为实际测量的总截面。横截面为:

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = |\mathcal{A}|^2, \quad (3-8)$$

这里的 \mathcal{A} 表示振幅, 如公式3-4所示。 $d\phi$ 是相空间的标准元。

在数据样本中, N 个事例的联合概率密度为:

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^N P(\xi_i) = \prod_{i=1}^N \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\phi}\right)_i \epsilon(\xi_i)}{\sigma'}. \quad (3-9)$$

最小化 $S = -\ln\mathcal{L}$ 后, 对于给定的数据集有:

$$S = -\ln\mathcal{L} = -\sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\phi}\right)_i}{\sigma'} \right) - \sum_{i=1}^N \ln \epsilon(\xi_i), \quad (3-10)$$

其中，第二项是常数，对振幅参数的确定以及 S 值的相对变化没有影响。在拟合中， S 被定义为：

$$S = - \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\phi}\right)_i}{\sigma'} \right) = - \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{d\sigma}{d\phi} \right)_i + N \ln \sigma'. \quad (3-11)$$

通过MINUIT [30]优化自由参数，使用蒙特卡洛技术对测量的总横截面 σ' 进行评估。MC样本生成信号事例，这些信号事例均匀分布在相空间中。 N_{gen} 表示经过选择条件后的事例数。最终，归一化积分的计算公式表示为：

$$\int d\xi \omega(\xi) \epsilon(\xi) = \sigma' \rightarrow \frac{1}{N_{gen}} \sum_{k=1}^{N_{acc}} \left(\frac{d\sigma}{d\phi} \right)_k. \quad (3-12)$$

3. 背景处理：关于背景道的详细讨论见3.3.2节。在对数似然计算中，由于数据的对数似然值是信号事例和背景事例的对数似然值之和，因此背景事例数的似然值被赋予负权重，将其从数据中去除：

$$S = - \left(\ln \mathcal{L}_{data} - \sum \ln \mathcal{L}_{background} \right). \quad (3-13)$$

4. 形状因子的测量结果：在 η' 的质量区间内要求 $M_{\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-} \in [0.94, 0.97] \text{ GeV}/c^2$ 后，数据样本的候选事例为 2047 ± 45 。根据上述的MC研究，在 η' 信号区间内的背景道贡献主要来自于 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$ 和 $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ ，两条背景道的事例数估计分别为： 166.1 ± 12.9 和 284.8 ± 16.9 。

首先考虑最简单的情况：将 ρ 的质量和宽度固定为PDG中的值去进行拟合，即： $M_\rho = 775.11 \text{ MeV}$ ， $\Gamma_\rho = 149.1 \text{ MeV}$ 。拟合得到的 α 值为 1.220 ± 0.285 ，这里仅考虑统计误差。 $\pi^+\pi^-$ 不变质量谱的拟合投影如图3-5所示，这表明振幅分析结果可以很好地描述数据。

之后尝试将 ρ 的质量和宽度作为自由参数去进行拟合，拟合结果为： $M_\rho = 671.9 \text{ MeV}$ ， $\Gamma_\rho = 233.7 \text{ MeV}$ ，与PDG中的值有明显的偏差，这可能是统计量有限造成的。然而，在这种情况下，拟合得到的 α 值非常不稳定，并且可以是任何值。我们进行了仔细的检查，发现这是因为振幅中含 α 项的贡献与不含 α 项的贡献具有相似的形状，如图3-6所示。

因此，为了与理论预测相比较，选择将 ρ 的质量和宽度固定为PDG中的值。在文献 [23]中，假设 $c_1 - c_2 = 1$ ，此时 c_3 的值与参数 α 的值相同，为 1.220 ± 0.285 ，这与文献 [23] 中使用的参数值相一致。

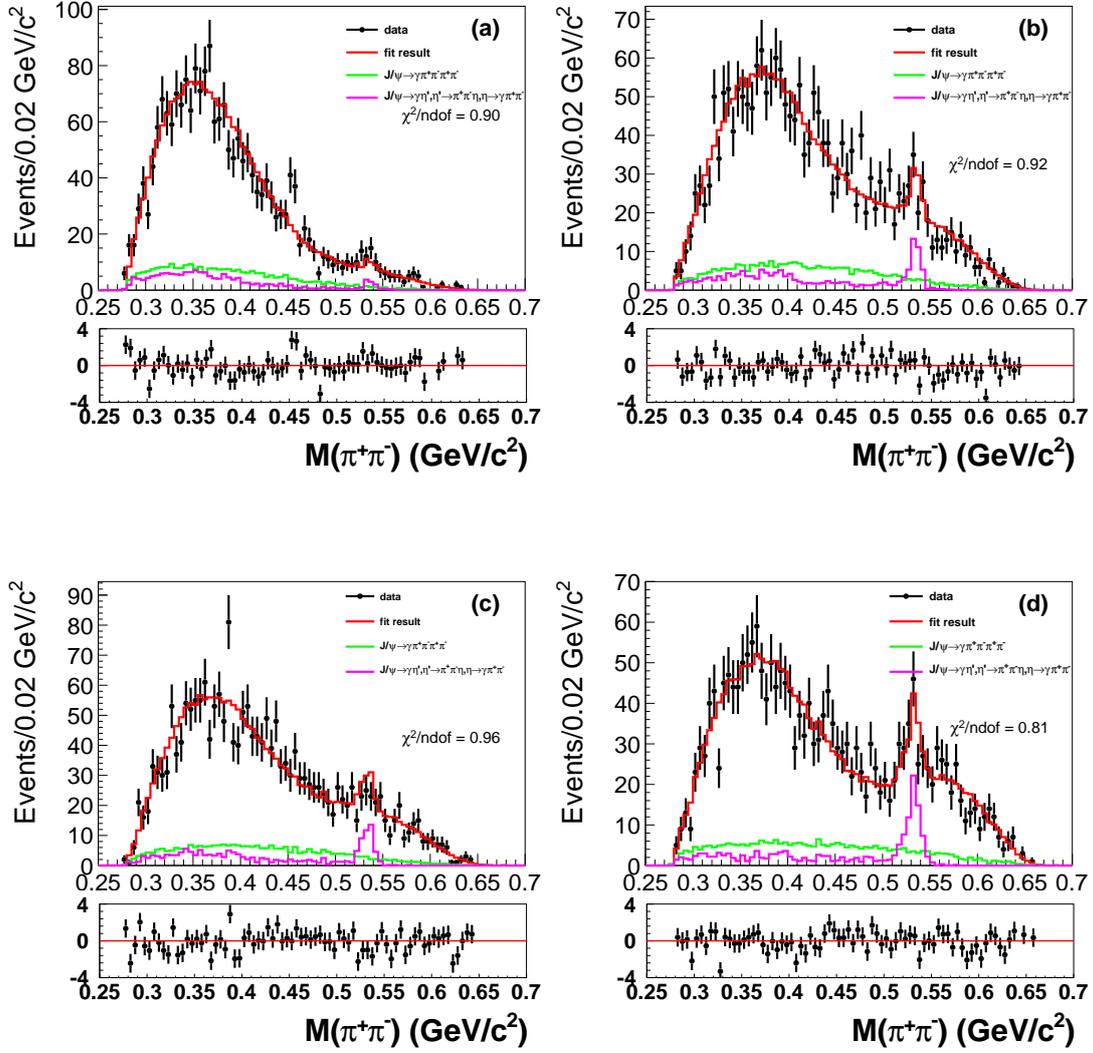


图 3-5 (a)(b)(c)(d) 当 $c_1 - c_2 = 1$ ， c_3 为自由参数时， $M(\pi^+\pi^-)$ 不同组合的拟合结果。带误差棒的点表示数据，红色直方图代表拟合结果，绿色直方图表示背景道 $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 的贡献，粉红色背景道表示背景道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$ 的贡献。

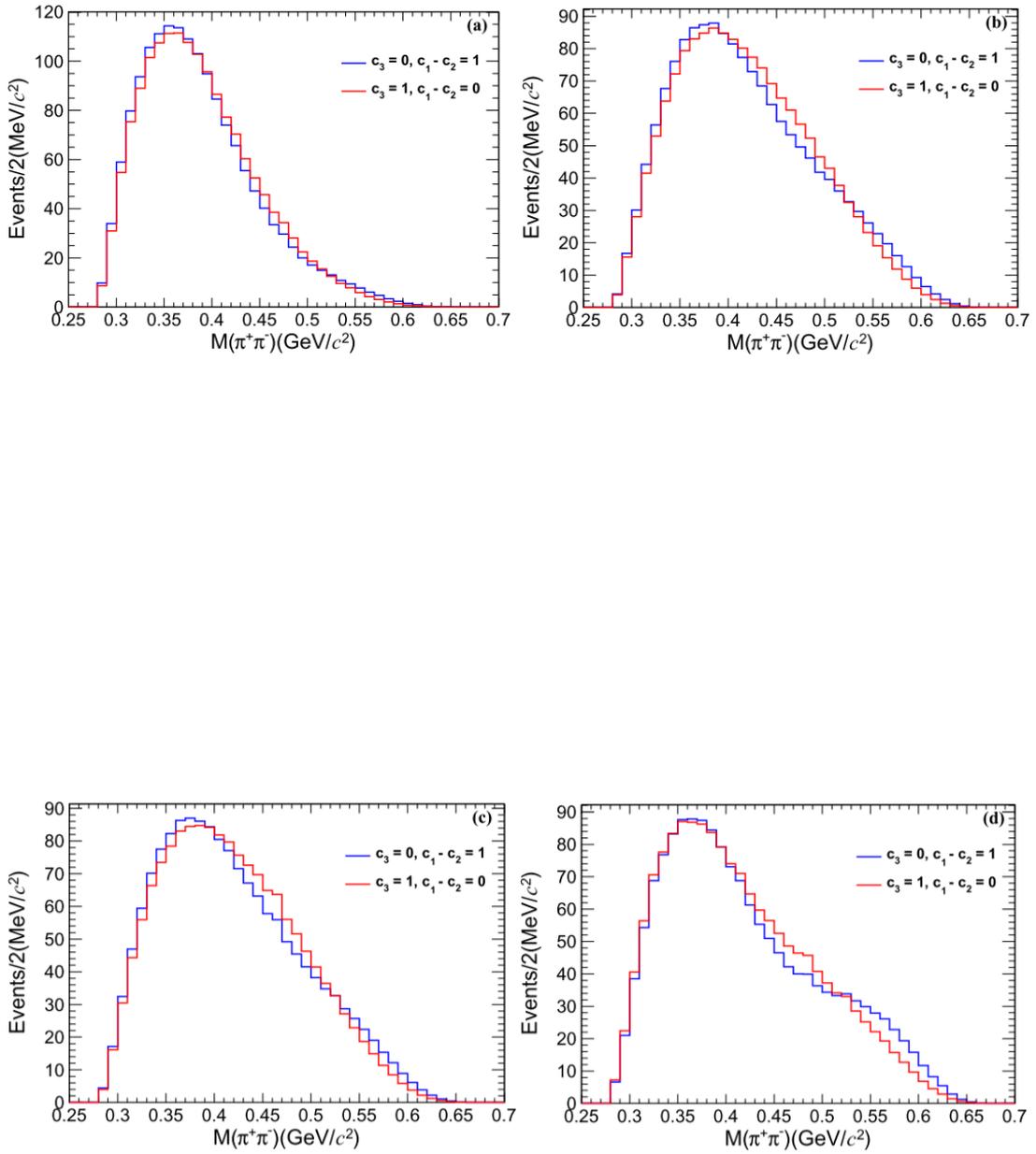


图 3-6 (a)(b)(c)(d) $M(\pi^+\pi^-)$ 不同组合的拟合结果的比较。蓝色的直方图表示 $c_1 - c_2$ 项的贡献，红色的直方图表示 c_3 项的贡献。

3.4 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的研究

3.4.1 事例终选

对于 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$, 其衰变末态为 $\gamma\gamma\gamma\gamma\pi^+\pi^-$, 因此要求事例中必须有2条好带电径迹, 且好带电径迹的总电荷数为0, 同时要求至少有5个好光子。

为了尽可能压低本底和提高事例选择效率, 对末态粒子进行1C运动学拟合和6C运动学拟合。由于 π^0 粒子是由两个光子重建而来的, 将任意两个光子的不变质量约束在 π^0 的不变质量上, 并要求 $\chi_{1C}^2 < 50$ 。如果候选事例中有5个以上的好光子, 则取最小 χ_{6C}^2 对应的候选者。同时, 如图3-7所示, 根据信噪比 $\frac{S}{\sqrt{S+B}}$ 优化结果, 要求 $\chi_{6C}^2 < 35$ 。为了压低包含相同带电径迹末态的多光子末态, 进一步要求 $\chi_{6C}^2(\gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0) < \chi_{6C}^2(\gamma\gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0)$ 。

经过上述的事例选择条件后, 通过循环候选事例中 π^0 的数目, 分别将 $M(\pi^+\pi^-\pi^0)$ 离 m_η 和 m_ω 最近的组合都保存下来, 得到的 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 的不变质量谱如图3-8(a)和(b)所示, 从图中可以看到明显的 η 和 ω 信号。因此为了去除 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 的不变质量谱含有 η 和 ω 的信号, 要求 $|M(\pi^+\pi^-\pi^0) - m_\eta| > 0.007\text{GeV}/c^2$ 和 $|M(\pi^+\pi^-\pi^0) - m_\omega| > 0.02\text{GeV}/c^2$ 。

经过所有事例选择条件后, $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的不变质量谱分布如图3-9所示, 从图中可以看到明显的 η' 信号。

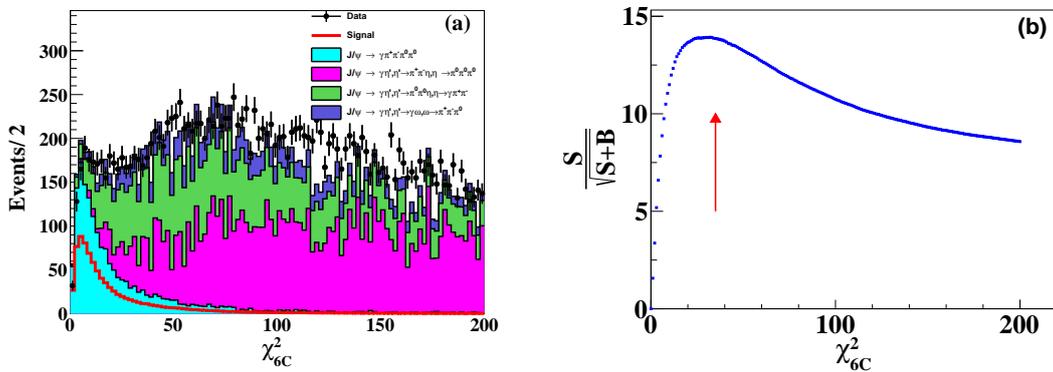


图 3-7 (a) 运动学拟合的 χ_{6C}^2 分布图, 带误差棒的黑点表示数据, 红色直方图来自信号MC样本, 其它不同颜色的直方图代表遍举MC样本。(b) χ_{6C}^2 的优化曲线分布图。

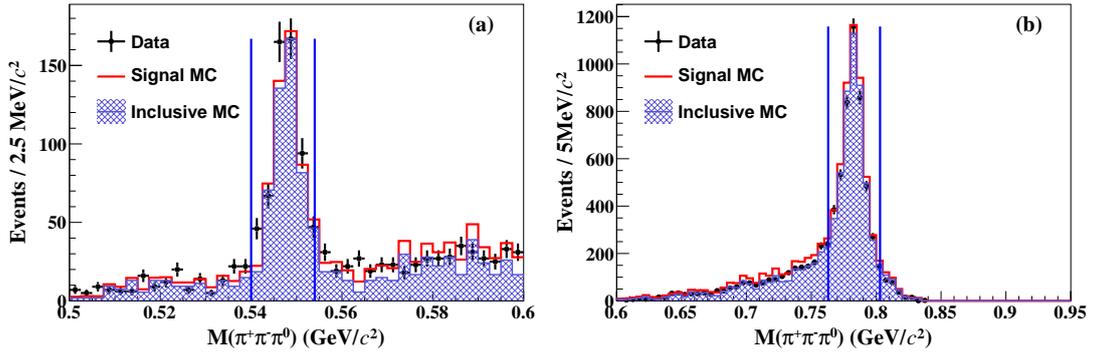


图 3-8 $\pi^+\pi^-\pi^0$ 不变质量谱分布。带误差棒的点表示数据，红色的直方图表示信号MC 样本，蓝色阴影部分代表单举MC 样本。(a)图中的峰来自 η ，(b)图中的峰来自 ω 。

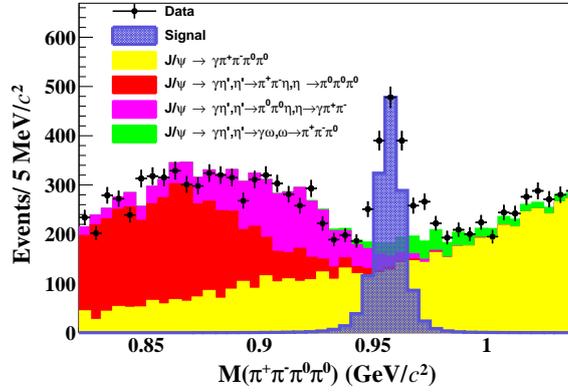


图 3-9 实验数据经过事例选择后 $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的不变质量谱分布。其中带误差棒的黑点表示数据，蓝色阴影的直方图来自信号MC 样本，其它不同颜色的阴影直方图代表遍举MC 样本。

3.4.2 本底研究

我们采用 10^{10} 个 J/ψ 单举蒙特卡洛事例，分析可能的背景道过程。针对这批单举蒙特卡洛样本使用与数据相同的事例选择条件后，得到剩余主要的背景道，如表3-3所示。其中，主要的本底可分为两类：

- 峰状本底:

- $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$
- $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$
- $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \gamma\omega, \omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$

- 连续性本底:

$$- J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$$

衰变道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$ 中 η 的动量很小, 由它衰变而来的光子极易丢失, 因此该衰变道极易被鉴别为信号道。针对这条背景道, 模拟产生了 56×10^5 个遍举蒙特卡洛事例。其中, $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta$ 是按照文献 [25] 中的达利兹分析结果来描述的。经过上述的事例选择条件后, 该衰变道的 $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 不变质量谱分布如图 3-10 (b) 所示。

由于衰变道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ 比衰变道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$ 多了个光子, 因此也很容易被鉴别为信号道, 并且动量丢失会更大。为了更好的描述数据, 模拟产生了 945×10^4 个遍举蒙特卡洛事例, 其中 $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ 是按照矩阵元的测量结果 [31] 来描述的。衰变道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ 经过上述事例选择条件后, $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的不变质量谱分布如图 3-10 (a) 所示。

衰变道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \gamma\omega, \omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ 比信号道少了一个光子, 因此也很容易被鉴别为信号道。为了更好的描述数据, 模拟产生了 4×10^6 个遍举蒙特卡洛事例。其中 $\eta' \rightarrow \gamma\omega$ 根据 SVP-HELAMP 模型进行模拟, $\omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ 是根据文献 [32] 中第 3.2.1 节的衰变振幅公式进行模拟。衰变道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \gamma\omega, \omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ 经过上述事例选择条件后, $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的不变质量谱分布如图 3-10 (c) 所示。

对于相空间本底道 $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$, 它对 η' 的贡献可以用一条平滑的曲线来描述。经过上述的事例选择条件后, 相空间本底道的 $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的不变质量谱分布如图 3-10 (d) 所示。

表 3-5 使用 10^{10} 个单举蒙特卡洛事例经过事例选择后剩余的主要本底道。

序号	衰变道	末态粒子	事例数
0	$J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	$\gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	6312
1	$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$	$\gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0\pi^0$	3242
2	$J/\psi \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0\pi^0$	$\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0\pi^0$	3016
3	$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$	$\gamma\gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	2974
4	$J/\psi \rightarrow \gamma f'_0, f'_0 \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	$\gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	2037
5	$J/\psi \rightarrow \gamma f_2(1270), f_2(1270) \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	$\gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	1829
6	$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$	$\gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0\pi^0$	1153
7	$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \gamma\omega, \omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$	$\gamma\gamma\pi^+\pi^-\pi^0$	901
8	$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \gamma\gamma$	$\gamma\gamma\gamma\pi^+\pi^-$	793
9	$J/\psi \rightarrow \gamma K_S^0 K_S^0, K_S^0 \rightarrow \pi^0\pi^0, K_S^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$	$\gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	688

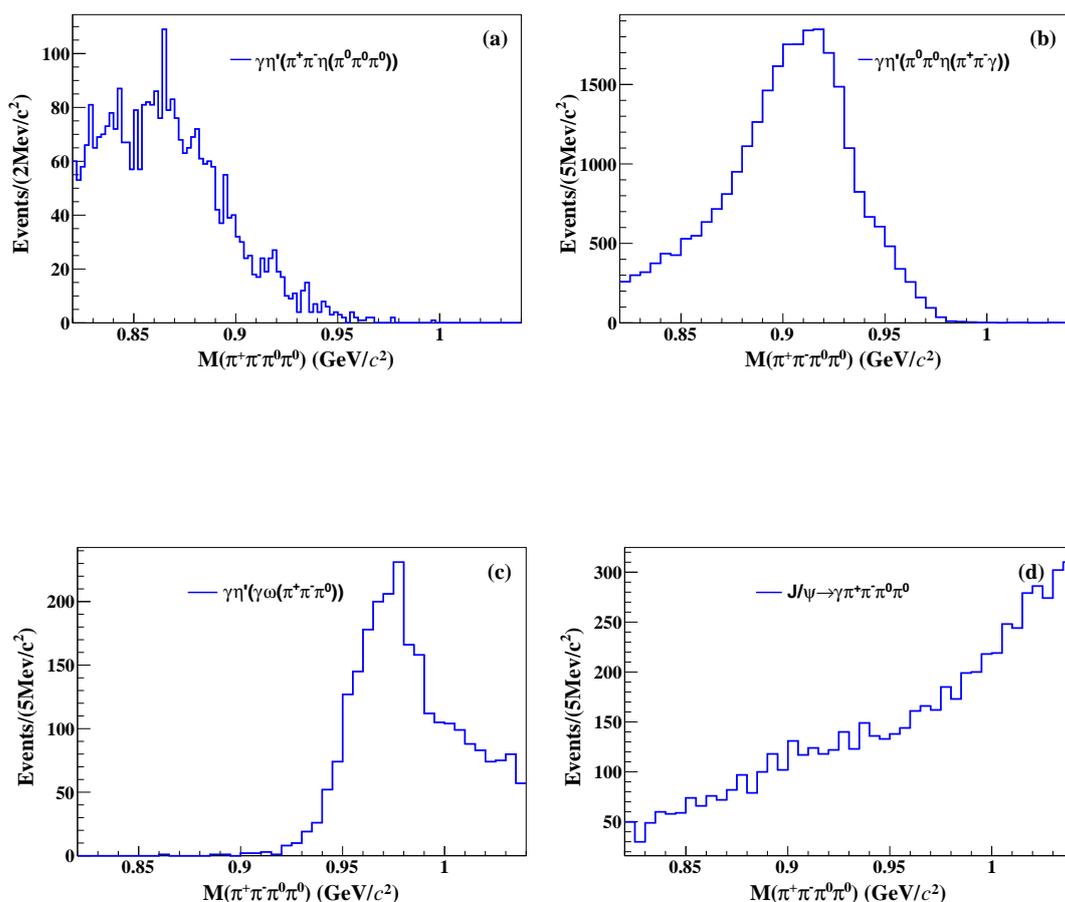


图 3-10 主要本底道的蒙特卡洛样本经过事例选择后的 $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 不变质量谱分布：(a) $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$. (b) $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$. (c) $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \gamma\omega, \omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$. (d) $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$.

3.4.3 拟合 $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的不变质量谱

与3.3.3节一样，采用unbin的最大似然方法来拟合 $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的不变质量谱，拟合范围是 $(0.82, 1.04) \text{ GeV}/c^2$ 。在拟合的过程中，信号是由衰变振幅公式[23]模拟产生的MC形状卷积高斯函数来描述的，其中高斯函数表示MC和数据之间的差异，并且在拟合中高斯函数的中心值和分辨都是自由参数。本底道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ 、 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$ 、 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \gamma\omega, \omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ 、 $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 都是用蒙特卡洛形状进行描述，并且在拟合中不同的本底事例数都是放开的。图3-11展示的是拟合结果，拟合得到的信号事例数

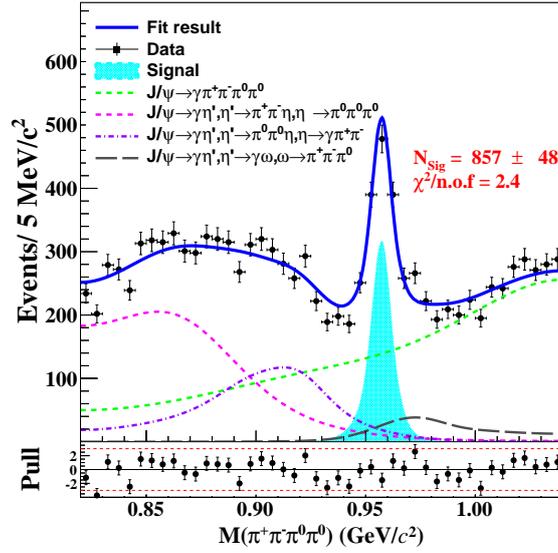


图 3-11 $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 不变质量谱的拟合图。带误差棒的点表示数据，蓝色的曲线表示最终的拟合结果，阴影部分表示信号，其他曲线分别表示各种不同的本底。

为: $N_{sig} = 857 \pm 48$ 。

3.4.4 分支比结果

在不考虑系统误差的情况下， $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 过程的分支比结果可通过下式计算得出：

$$\mathcal{B}(\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0) = \frac{N_{sig}}{N_{J/\psi} \cdot \mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta') \mathcal{B}^2(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \cdot \epsilon} = (2.16 \pm 0.12(stat.)) \times 10^{-4} \quad (3-14)$$

其中， N_{sig} 是拟合观测到的 η' 的信号事例数， $N_{J/\psi}$ 是北京谱仪上取得 J/ψ 总事例数 $(10087 \pm 44) \times 10^6$ [12]， ϵ 表示MC模拟的探测效率为7.8%（事例筛选效率流如表3-6所示）， $\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta')$ 是相应过程的分支比 [29]为 $(5.25 \pm 0.07) \times 10^{-3}$ ， $\mathcal{B}(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ 是相应过程的分支比 [29] 为 $(98.82 \pm 0.034) \times 10^{-2}$ 。

表 3-6 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 信号MC样本的筛选效率流。

序号	筛选条件	事例数(累计效率 ϵ)
1	初始产生值	2250000(100%)
2	$N_{Charge} = 2$	1495569(66.5%)
3	$N_\gamma \geq 5$	568209(25.3%)
4	6C-运动学拟合	349321(15.5%)
5	$\chi_{6C}^2 < 35$	258558(11.5%)
6	$\chi_{6C}^2(\gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0) < \chi_{6C}^2(\gamma\gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0)$	252763(11.2%)
7	排除 η 背景	181046(8.0%)
8	排除 ω 背景	175607(7.8%)

3.5 $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ 的研究

3.5.1 事例终选

衰变过程 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ ，其衰变末态是9个光子，因此要求事例中的好光子数大于8 小于13。

为了进一步压低本底和提高事例选择效率，对末态粒子进行1C 运动学拟合和8C 运动学拟合。由于 π^0 粒子是由两个光子重建而来的，将任意两个光子的不变质量约束在 π^0 的不变质量上，并要求 $\chi_{1C}^2 < 10$ 。之后对共振态 J/ψ 能量动量守恒和四个 π^0 的不变质量进行8C 的运动学约束，取运动学拟合结果 χ_{8C}^2 最小的一组作为候选事例。根据信噪比 $\frac{S}{\sqrt{S+B}}$ 优化结果，要求 $\chi_{8C}^2 < 40$ 。为了压低 10γ 和 11γ 多光子末态组合，进一步要求 $\chi_{4C}^2(9\gamma) < \chi_{4C}^2(10\gamma)$ 和 $\chi_{4C}^2(9\gamma) < \chi_{4C}^2(11\gamma)$ 。 χ_{8C}^2 的分布和优化结果如图 3-12 所示。

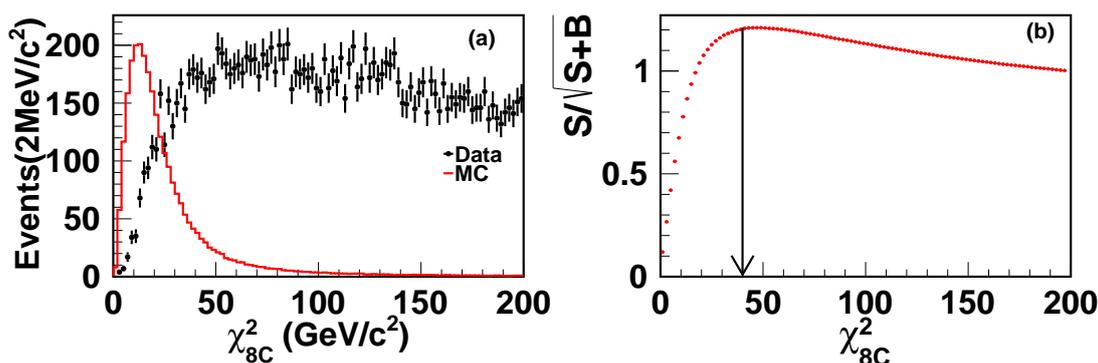


图 3-12 (a) 8C 运动学拟合在 η' 信号区间的 χ_{8C}^2 分布图，带有误差棒的点表示数据，直方图表示信号MC 样本的分布。(b) χ_{8C}^2 的优化曲线分布图。

如图 3-13所示，在 $\pi^0\pi^0\pi^0$ 的不变质量谱上可以看到明显的 η 信号，通过对 $M(\pi^0\pi^0\pi^0)$ 质量窗进行限制来压低 η 背景。要求最接近 m_η 的组合不在 η 的质量区间内，即： $|M(\pi^0\pi^0\pi^0) - m_\eta| > 0.02 \text{ GeV}/c^2$ 。

3.5.2 本底研究

我们采用 10^{10} 个 J/ψ 单举蒙特卡洛事例，分析可能的背景道过程。针对这批单举蒙特卡洛样本使用与数据相同的事例选择条件后，得到剩余主要的背景道，如表3-7所示。其中，主要的本底可分为两类：

- 峰状本底：

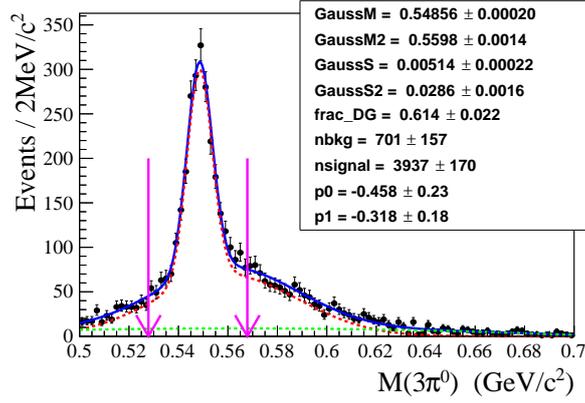


图 3-13 η 的拟合结果。红色的虚线表示双高斯函数，绿色的虚线表示多项式。

$$- J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$$

• 连续性本底:

$$- J/\psi \rightarrow \gamma\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$$

对于衰变道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ ，模拟产生了 1.53×10^7 个遍举蒙特卡洛事例。其中 $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta$ 和 $\eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ 是根据 BESIII 上矩阵元结果 [25] [31] 进行模拟。衰变道 $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ 则是由相空间产生子 (PHSP) 描述。图 3-14 是经过所有事例选择条件后， $4\pi^0$ 的不变质量谱分布，没有观测到清楚的 η' 信号。图 3-15 是经过所有事例选择条件后， $2\pi^0$ 的不变质量谱分布，图中蓝色的直方图表示为所有本底贡献的总和，带误差棒的点表示数据，可以看出总的本底贡献与数据符合得较好。

表 3-7 使用 10^{10} 个单举蒙特卡洛事例经过事例选择后剩余的主要本底道。

序号	衰变道	末态粒子	事例数
0	$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$	$\gamma\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$	1874
1	$J/\psi \rightarrow K_S^0 K_S^0 \gamma, K_S^0 \rightarrow \pi^0\pi^0, K_S^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$	$\gamma\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$	308
2	$J/\psi \rightarrow \gamma f_2(1270), f_2(1270) \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$	$\gamma\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$	1
3	$J/\psi \rightarrow \gamma f_0(2100), f_0(2100) \rightarrow \eta\eta, \eta \rightarrow \gamma\gamma, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$	$\gamma\gamma\gamma\pi^0\pi^0\pi^0$	7
4	$J/\psi \rightarrow \eta\omega, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0, \omega \rightarrow \pi^0\gamma$	$\gamma\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$	2
5	$J/\psi \rightarrow \gamma f_1(1285), f_1(1285) \rightarrow \pi^0 a_0^0, a_0^0 \rightarrow \pi^0\eta, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$	$\gamma\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$	2
6	$J/\psi \rightarrow \pi^0 \rho(2S)^0, \rho(2S)^0 \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$	$\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$	14
7	$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \gamma\gamma$	$\gamma\gamma\gamma\pi^0\pi^0$	16
8	$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \pi^0\gamma\gamma$	$\gamma\gamma\gamma\pi^0\pi^0\pi^0$	11

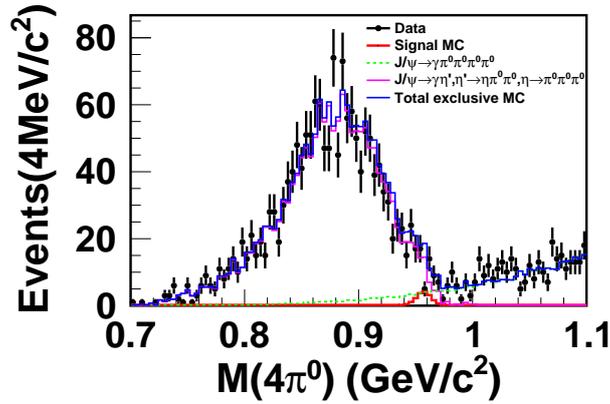


图 3-14 $4\pi^0$ 的不变质量谱分布图。带误差棒的点表示数据，蓝色直方图代表所有本底的总贡献，绿色的虚线表示本底道 $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ 的贡献，粉色的直方图表示本底道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow 3\pi^0$ 的贡献，红色直方图代表信号的形状，其对于数据的归一化因子是任意取得。

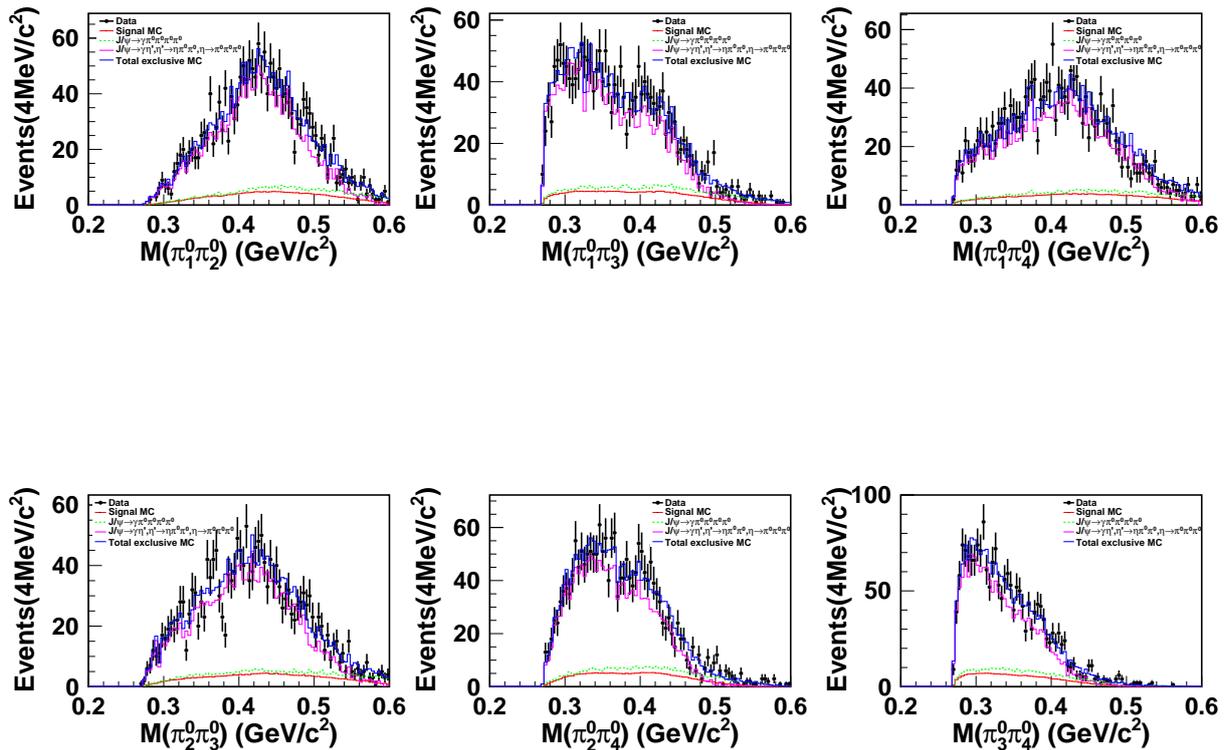


图 3-15 总的遍举MC 样本和数据的 $2\pi^0$ 的不变质量谱对比图。带误差棒的点表示数据，蓝色直方图代表所有本底的总贡献，绿色的虚线表示本底道 $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ 的贡献，粉色的直方图表示本底道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow 3\pi^0$ 的贡献，红色直方图代表信号的形状，其对于数据的归一化因子是任意取得。

3.5.3 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 的分支比上限

由于在 $4\pi^0$ 的不变质量谱上没有观测到明显的 η' 信号，采用贝叶斯方法 [33]确定在90% 置信度下的事例数上限。为了确定 η' 信号的事例数上限值，对 $4\pi^0$ 的不变质量谱做了一系列的不分bin 的极大似然拟合，分别固定信号的事例数为不同的数值。在拟合的过程中，信号是由衰变振幅公式 [23]模拟产生的MC 形状来描述，两条本底都是用蒙特卡洛的形状来描述，其中，峰状本底的事例数是固定的，连续性本底的事例数是放开的。最终得到 $4\pi^0$ 不变质量谱的拟合结果如图 3-16(a)所示。在90% 置信度下的事例数上限为7.95，如图 3-16(b) 所示。

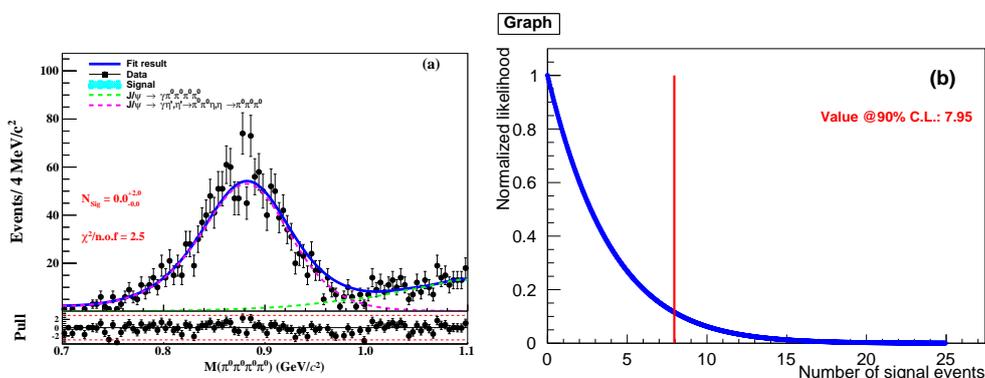


图 3-16 (a) ($4\pi^0$)不变质量谱的拟合图，带误差棒的点表示数据，蓝色曲线表示拟合结果，粉色虚线表示峰状本底的贡献，绿色虚线表示连续性本底的贡献。(b) 90%置信度下的信号事例数上限。

3.5.4 结果

在不考虑系统误差的情况下， $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 过程的分支比上限可通过下式计算得出：

$$\mathcal{B}(\eta' \rightarrow 4\pi^0) = \frac{N}{N_{J/\psi} \cdot \mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta') \mathcal{B}^4(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \cdot \epsilon} < 1.01 \times 10^{-5} \quad (3-15)$$

其中， N 是拟合 $4\pi^0$ 的质量谱在90% 置信度下得到的信号事例数上限， $N_{J/\psi}$ 是北京谱仪上取得 J/ψ 总事例数 $(10087 \pm 44) \times 10^6$ [12]， ϵ 表示MC 模拟的探测效率为1.61%（事例筛选效率流如表 3-8 所示）， $\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta')$ 是相应过程的分支比 [29]为 $(5.25 \pm 0.07) \times 10^{-3}$ ， $\mathcal{B}(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ 是相应过程的分支比 [29] 为 $(98.82 \pm 0.034) \times 10^{-2}$ 。

表 3-8 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ 信号MC 样本的筛选效率流。

序号	筛选条件	事例数(累计效率 ϵ)
1	初始产生值	9000000(100%)
2	$N_{Charge} = 0$	8322874(92.47%)
3	$N_\gamma \geq 9$	708335(7.87%)
4	$N_{\pi^0} \geq 4$	618830(6.88%)
5	8C-运动学拟合	243628(2.71%)
6	$\chi_{8C}^2 < 40$	194297(2.16%)
7	$\chi_{4C}^2(9\gamma) < \chi_{4C}^2(10\gamma)$	190299(2.11%)
8	$\chi_{4C}^2(9\gamma) < \chi_{4C}^2(11\gamma)$	190279(2.10%)
9	排除 η 背景	147612(1.64%)
10	$0.7\text{GeV}/c^2 < M(4\pi^0) < 1.1\text{GeV}/c^2$	145269(1.61%)

3.6 本章小结

本章主要阐述了三个分析过程所使用的数据和MC 样本，详细说明了事例的筛选条件及本底分析过程。最终给出了三个衰变过程在不考虑系统误差的情况下得到的分支比结果。



第四章 系统误差

本章主要研究测量分支比和形状因子的过程中所引起的系统误差。下面将对每一项误差进行详细介绍。

4.1 分支比结果测量的系统误差

测量 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 、 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 和 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 的分支比和分支比上限的过程中，系统误差的来源主要来自于：带电径迹的重建、光子的探测效率、运动学拟合、连续性本底形状、峰状本底形状、峰状本底事例数、信号形状、 η 和 ω 质量窗的影响、产生子模型、中间共振态的分支比、 J/ψ 事例数。下面将对每一项系统误差进行详细介绍。

4.1.1 带电径迹的重建

来自带电径迹 π 的径迹重建的系统误差通常是用控制样本 $J/\psi \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ [34]来估计。相同的选择条件下，数据与MC之间带电径迹重建效率的差异为每条 π 径迹为0.5%。因此，信号过程 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 来自带电径迹重建的系统误差分别为2%和1%。

4.1.2 光子的探测效率

BESIII实验中通过研究衰变过程 $e^+e^- \rightarrow \gamma\mu^+\mu^-$ [35]来估计来自光子探测效率的系统误差，数据与MC之间的差异为每条光子径迹0.5%。因此，信号过程 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 、 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 和 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 来自光子探测效率的系统误差分别为0.5%、2.5%和4.5%。

4.1.3 运动学拟合

- $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^{+(0)}\pi^{-(0)}$

通过修正螺旋线径迹参数，来减少数据与MC之间的差异，其中，修正所用到的参数是从文献[36]中获得。修正前后探测效率的差异作为运动学拟合的系统误差，即为： $\frac{|\epsilon_1 - \epsilon_2|}{2\epsilon_1}$ ，这里 ϵ_1 表示修正后的效率， ϵ_2 表示修正前的效率。探测

效率修正前后在 η' 的信号区间内的 χ_{4C}^2 和 χ_{6C}^2 分布如图4-1所示。最后，信号过程 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 来自运动学拟合的系统误差分别为0.6%和0.2%。

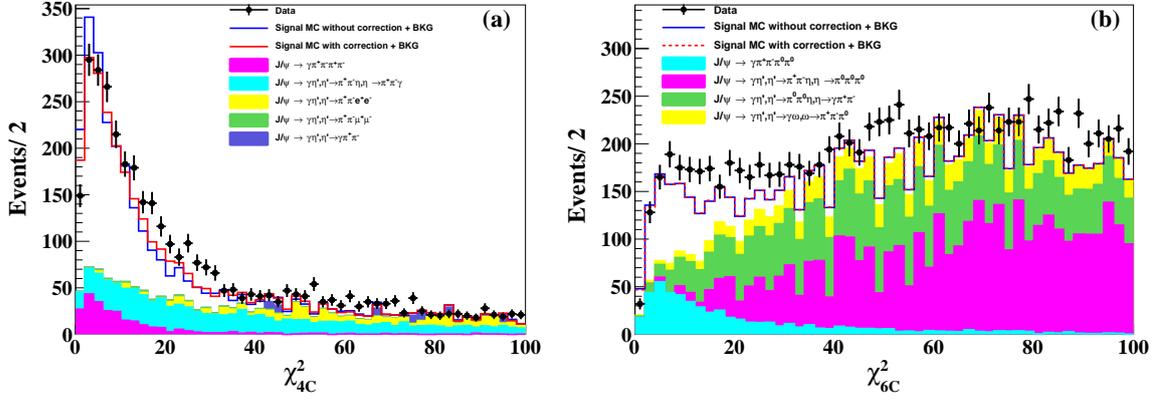


图 4-1 (a)(b)在 η' 信号区间内修正前和修正后的MC 样本的 χ_{4C}^2 和 χ_{6C}^2 分布图。带有误差棒的点表示数据。红色直方图表示修正后的信号MC 分布，蓝色直方图表示修正前的信号MC 分布，它们都是叠加背景后的分布。

- $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$

信号过程 $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ 中不含有带电径迹，只有9个光子，因此8C运动学拟合的系统误差是通过修正光子能量的误差矩阵[37]得到的。通过研究衰变过程 $\psi(3686) \rightarrow \gamma\chi_{c1}(\chi_{c1} \rightarrow 4\pi^0)$ [38]可知，光子在数据中的能量分辨比在MC模拟中的能量分辨大4%，因此我们把运动学拟合中光子的误差矩阵改变 $(1+4\%) \times dE$ 得到修正后的事例选择效率，修正前后的事例选择效率差异作为8C运动学拟合的系统误差，如表格4-1所示。

表 4-1 信号MC修正前后的事例选择效率以及8C运动学拟合的系统误差。

	总的事例数	剩余事例数	选择效率	运动学拟合的系统误差
修正前的样本	900000	125767	1.61%	5.6%
修正后的样本	900000	153744	1.70%	

4.1.4 连续性本底形状

- $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^{+(0)}\pi^{-(0)}$

信号过程 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 对应的连续性本底为 $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 。为了估计来自连续性本底形状的系统误差，利用三阶切比雪夫多项式代替蒙特卡洛形状来描述相空间本底道，得到新的拟合结果与最初拟合结果之间的差异作为连续性本底的系统误差，如表格4-2所示。 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 来自连续性本底的系统误差分别为0.2%和1.4%。

表 4-2 连续性本底的系统误差。

衰变道	N_{signal}	系统误差(%)
$\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	1639 ± 48	0.2
$\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	851 ± 49	1.6

- $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$

信号过程 $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ 对应的连续性本底为 $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ 。为了估计来自连续性本底形状的系统误差，利用二阶多项式代替蒙特卡洛形状描述相空间本底道，得到 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 在90%置信度下的分支比上限为 $\mathcal{B}^{UL} = 1.0 \times 10^{-5}$ 。

4.1.5 峰状本底形状

- $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$

信号过程 $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ 对应的峰状本底为 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ 。为了估计来自峰状本底形状的系统误差，利用蒙特卡洛形状卷积高斯函数代替蒙特卡洛形状描述峰状本底道，其中高斯函数的中心值和分辨是放开的，得到 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 在90% 置信度下的分支比上限为 $\mathcal{B}^{UL} = 1.26 \times 10^{-5}$ 。

4.1.6 峰状本底的事例数

- $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^{+(0)}\pi^{-(0)}$

在原来的分析中，峰状本底的事例数在拟合中是放开的。为了估计峰状本底事例数带来的系统误差，将峰状本底的事例数固定，这里固定的事例数是通过相应的分支比和事例选择效率归一到 J/ψ 数据上得到的。信号过程 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 固定不同的峰状本底的事例数得到新的两组拟合结

果，与原来拟合结果之间的差异被当作系统误差，如表格4-3和4-4所示。最终作为保守估计，信号过程 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 来自峰状本底的系统误差分别为0.4%和0.09%。

表 4-3 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 分支比计算中来自于峰状本底事例数的系统误差。

峰状本底衰变道	系统误差(%)
$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$	0.2
$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-e^+e^-$	0.4
$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$	0.3
$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$	0.1

表 4-4 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 分支比计算中来自于峰状本底事例数的系统误差。

峰状本底衰变道	系统误差(%)
$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$	0.09
$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$	0.05
$J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \gamma\omega, \omega \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$	0.02

- $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$

在原来的分析中，信号道 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 峰状本底的事例数是按照事例选择效率和分支比归一到 J/ψ 数据上的，因此为了估计峰状本底事例数带来的系统误差，将衰变道 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\eta, \eta \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ 各个子衰变道的分支比变化一倍的标准差，多次拟合后，最终作为保守估计得到 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 在90%置信度下的分支比上限为 $\mathcal{B}^{UL} = 1.26 \times 10^{-5}$ 。

4.1.7 信号形状

- $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^{+(0)}\pi^{-(0)}$

在原来的分析中，信号过程 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的信号形状是用蒙特卡洛形状卷积高斯函数来描述，为了估计信号形状的系统误差，利用蒙特卡洛形状代替蒙特卡洛形状卷积高斯函数来描述信号，得到新的拟合结果与最初拟合结果之间的差异作为信号形状的系统误差。 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 来自信号形状的系统误差分别为0.6%和0.1%。

- $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$

在原来的分析中，信号道 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 信号形状是用蒙特卡洛形状描述。为了估计信号形状的系统误差，利用蒙特卡洛形状卷积高斯函数代替蒙特卡洛形状描述信号，得到 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 在90%置信度下的分支比上限为 $\mathcal{B}^{UL} = 1.02 \times 10^{-5}$ 。

4.1.8 中间共振态的分支比

由于本分析中 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'$ 和 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ 的分支比都是引用的PDG中的结果 [29]，因此 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'$ 和 $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ 的分支比的系统误差分别为1.3%和0.03%。

4.1.9 $\eta(\omega)$ 质量窗的影响

- $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$

测量信号道 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 分支比的过程中，通过改变 η 和 ω 的质量窗范围确定来自 η 和 ω 的质量窗的系统误差，结果如表4-5所示。这里我们选择差别最大的2.8%作为 η 、 ω 质量窗的系统误差。

表 4-5 来自 η 和 ω 质量窗的系统误差。

$\eta(\omega)$ 质量窗	信号事例数($\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$)	系统误差(%)
$ M(\pi^+\pi^-\pi^0) - m_\eta > 0.009 \text{ GeV}/c^2$	850±48	1.8
$ M(\pi^+\pi^-\pi^0) - m_\omega > 0.022 \text{ GeV}/c^2$		
$ M(\pi^+\pi^-\pi^0) - m_\eta > 0.005 \text{ GeV}/c^2$	921±50	2.8
$ M(\pi^+\pi^-\pi^0) - m_\omega > 0.018 \text{ GeV}/c^2$		

- $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$

为了确定来自 η 质量窗的系统误差，通过改变不变质量谱 $M(\pi^0\pi^0\pi^0)$ 的质量窗相对标准误差 $\pm 2 \text{ MeV}/c^2$ ，将分支比结果改变最大时的差异，3%，作为 η 质量窗的系统误差。

4.1.10 J/ψ 事例数

在分支比测量的过程中，使用的是BESIII探测器上至今采集的 $(10087 \pm 44) \times 10^6$ [12] 个事例，对应的系统误差为0.44%。

4.1.11 拟合范围

- $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$

通过扩大或缩小拟合范围 $\pm 5\text{MeV}/c^2$ ，分别进行5次不同的拟合，得到不同情况下的分支比上限结果，如表格4-6所示。

表 4-6 不同拟合范围得到的 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 在90%置信度下的分支比上限。

拟合范围/(GeV/ c^2)	$\mathcal{B}^{UL} \times 10^{-5}$
0.7 - 1.095	1.01
0.7 - 1.105	1.02
0.705 - 1.1	1.01
0.705 - 1.095	1.01
0.705 - 1.105	1.02

4.1.12 信号产生子模型

- $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^{+(0)}\pi^{-(0)}$

信号过程 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的探测效率是通过衰变振幅 [23]模拟得到的，而信号产生子模型对探测效率有影响。因此通过改变VMD模型中的参数值($c_1 - c_2$ 和 c_3 的值)，产生一系列的蒙特卡洛样本，从而得到相对应的探测效率，新的探测效率与原来探测效率之间的差异被称为信号产生子模型的系统误差。我们选择探测效率改变最大时的差异，0.8%和0.6%，分别作为信号过程 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 来自信号产生子的系统误差。

- $\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$

在之前的分析中，通过衰变振幅公式模拟产生得到 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 的MC样本，从而得到该衰变过程的探测效率。在这里改用相空间产生子模拟产生MC样本得到相对应的探测效率和分支比上限，新的分支比上限结果与原分支比上限结果之前的差异作为产生子模型的系统误差。信号过程 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 关于信号产生子的系统误差为0.1%。

4.1.13 总结分支比测量过程中的系统误差

对于信号道 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^{+(0)}\pi^{-(0)}$ ，表格4-7列举了所有的系统误差的来源，假设表格里的每项系统误差是独立的，则总的系统误差是每项系统误差的平方和开根号。

针对信号道 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 分支比上限的系统误差，可分为可加性系统误差和可乘性系统误差。其中，可加性系统误差为：峰状本底形状、拟合范围、连续性本底形状、信号形状和峰状本底事例数，如表格4-8所示。作为保守估计，我们选取 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 对应分支比上限结果最大($B^{UL} = 1.26 \times 10^{-5}$)的拟合模型来计算90%置信度下的分支比上限。可乘性系统误差包括：光子探测效率、运动学拟合、 η 质量窗、各个中间共振态的分支比、 J/ψ 事例数和产生子模型，表格4-9展示了全部的可乘性系统误差，假设表格里的每项系统误差是独立的，则总的系统误差是每项系统误差的平方和开根号。

表 4-7 信号道 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的系统误差总结(%)。

误差来源	$\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ (%)	$\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ (%)
带电径迹的重建	2	1
光子的探测效率	0.5	2.5
运动学拟合	0.6	0.2
峰状本底事例数	0.4	0.09
连续性本底形状	0.2	1.6
信号形状	0.6	0.1
$\eta(\omega)$ 质量窗	—	2.8
$\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta')$	1.3	1.3
$\mathcal{B}(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$	—	0.06
J/ψ 事例数	0.44	0.44
信号产生子模型	0.8	0.6
总计	2.8	4.5

表 4-8 不同情况下， $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 在90%置信度下的分支比上限。

拟合范围/(GeV/ c^2)	$B^{UL} \times 10^{-5}$
0.7 - 1.095	1.01
0.7 - 1.105	1.02
0.705 - 1.1	1.01
0.705 - 1.095	1.01
0.705 - 1.105	1.02
信号形状	
MC 形状卷积高斯函数	1.02
连续性本底形状	
二阶多项式	1.0
峰状本底形状	
MC 形状卷积高斯函数	1.26
峰状本底的数目	
1465	1.15

表 4-9 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 分支比上限测量过程中的所有可乘性误差(%)。

误差来源	$\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$ (%)
光子探测效率	4.5
运动学拟合	5.6
η 质量窗	3.0
$\mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta')$	1.3
$\mathcal{B}(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$	0.12
J/ψ 事例数	0.44
信号产生子模型	0.1
总计	8.0

4.1.14 数值结果

根据上述的拟合结果和系统误差，可以得到本分析中 η' 三种衰变过程的最终数值结果。对于衰变过程 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ ，其结果为：

$$\mathcal{B}(\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-) = (8.56 \pm 0.25(stat.) \pm 0.24(sys.)) \times 10^{-5} \quad (4-1)$$

对于衰变过程 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ ，其结果为：

$$\mathcal{B}(\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0) = (2.16 \pm 0.12(stat.) \pm 0.10(sys.)) \times 10^{-4} \quad (4-2)$$

对于衰变过程 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ ，并没有观测到明显的 η' 信号，因此利用贝叶斯方法 [39]得到在90% 置信度下的分支比上限结果。为了保守估计 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ 的分支比上限，利用高斯概率密度函数卷积似然值分布[40]，其中高斯函数的参数与总的可乘性系统误差相关联，总的可乘性误差根据公式 4-3代入到分支比计算过程中：

$$L'(N) = \int_0^1 L\left(\frac{S}{\hat{S}}N\right) \exp\left[-\frac{(S-\hat{S})^2}{2\sigma_S^2}\right] dS \quad (4-3)$$

其中， L 和 L' 分别表示卷积前后的极大似然值， \hat{S} 表示标准效率值， S 表示探测效率值， σ_S 是总的系统误差。图 4-2表示考虑总系统误差后的极大似然值分布图，并通过下式计算出90% 置信度下的分支比上限结果：

$$\mathcal{B}(\eta' \rightarrow 4\pi^0) < \frac{N^{UP}}{N_{J/\psi} \cdot \mathcal{B}(J/\psi \rightarrow \gamma\eta') \cdot \mathcal{B}^4(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) \cdot \varepsilon} = 1.28 \times 10^{-5} \quad (4-4)$$

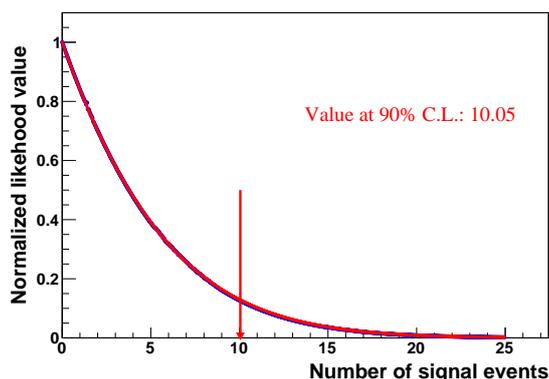


图 4-2 蓝色的点表示未考虑系统误差的归一化后的极大似然值分布，红色的点表示考虑系统误差后的归一化后的极大似然值分布。

4.2 形状因子测量的系统误差

4.2.1 带电径迹的重建

文献[34]中使用控制样本 $J/\psi \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ 研究带电径迹 π 数据与MC 之间的差异。在这种情况下，数据与MC 之间的差异 ($\Delta_{syst.}$) 作为粒子动量与极角余弦的函数。随后，蒙特卡洛样本中的每个事例都按权重因子 $(1 + \Delta_{syst.})$ 进行加权，重新加权后的蒙特卡洛样本用于MC 积分，随后使用第3.3.5 节提到的拟合方法进行拟合，得到的拟合结果与原始拟合结果之间的差异 (0.08%) 作为带电径迹重建的系统误差。

4.2.2 ρ 的宽度

在原来的分析中， ρ 的宽度被固定为PDG 中的值，即： $\Gamma_\rho = 149.1$ MeV。为了估计拟合过程中 ρ 的宽度带来的系统误差，将固定的 ρ 的宽度值变化一倍的标准差去进行拟合，得到的拟合结果与原始拟合结果差异最大的一组作为 ρ 的宽度带来的系统误差，如表格4-10所示。

表 4-10 测量 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 形状因子过程中 ρ 的宽度带来的系统误差。

	α	系统误差(%)
$\Gamma_\rho = 149.9\text{MeV}$	1.218 ± 0.284	0.2
$\Gamma_\rho = 148.3\text{MeV}$	1.222 ± 0.285	0.2
原始拟合结果	1.220 ± 0.285	-

4.2.3 ρ 的质量

在原来的分析中， ρ 的质量被固定为PDG 中的值，即： $m_\rho = 775.11$ MeV。为了估计拟合过程中 ρ 的质量带来的系统误差，将固定的 ρ 的质量变化一倍的标准差去进行拟合，得到的拟合结果与原始拟合结果差异最大的一组作为 ρ 的质量带来的系统误差，如表格4-11所示。

表 4-11 测量 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 形状因子过程中 ρ 的质量带来的系统误差。

	α	系统误差(%)
$m_\rho = 775.45\text{MeV}$	1.214 ± 0.284	0.5
$m_\rho = 774.77\text{MeV}$	1.229 ± 0.287	0.7
原始拟合结果	1.220 ± 0.285	-

4.2.4 运动学拟合

通过螺旋线修正的方法[36]来估计运动学拟合带来的系统误差，我们使用修正后的蒙特卡洛样本进行MC 积分，再利用第3.3.5 节提到的拟合方法进行拟合，拟合得到的新的结果与原始结果之间的差异（0.5%）作为运动学拟合的系统误差。

4.2.5 连续性本底

在原来的分析中，利用连续性本底的蒙特卡洛形状进行MC 积分。为了估计连续性本底的形状带来的系统误差，改用三阶切比雪夫多项式代替蒙特卡洛形状进行MC 积分，此时本底道 $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$ 的事例数分别为 273.1 ± 16.5 和 174.4 ± 13.2 。随后利用第3.3.5 节提到的拟合方法进行拟合，拟合得到的新的结果与原始结果之间的差异（2.0%）作为连续性本底带来的系统误差。

4.2.6 峰状本底

为了估计峰状本底的系统误差，通过固定峰状本底的事例数进行MC 积分，此时本底道 $J/\psi \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta', \eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\eta, \eta \rightarrow \gamma\pi^+\pi^-$ 的事例数分别为 268.9 ± 16.4 和 177.6 ± 13.3 。利用第3.3.5 节提到的拟合方法进行拟合，拟合得到的新的结果与原始结果之间的差异（2.9%）作为峰状本底形状带来的系统误差。

4.2.7 总结形状因子测量过程中的系统误差

表格4-12列举了测量 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 形状因子过程中的所有系统误差，假设表格里的每项系统误差是独立的，则每项系统误差的平方和开根号得到总的系统误差。

表 4-12 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 形状因子的系统误差总结。

来源	$\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ (%)
带电径迹的重建	0.08
ρ 的宽度	0.2
ρ 的质量	0.7
4C-运动学拟合	0.5
连续性本底	2.0
峰状本底	2.9
总计	3.6



第五章 总结与展望

本文根据BESIII 探测器中采集到的 $(10087 \pm 44) \times 10^6 J/\psi$ 事例[12]，通过 $J/\psi \rightarrow \gamma\eta'$ 挑选的干净的 η' 样本，对 $\eta' \rightarrow 4\pi$ 开展深入的研究。在 $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的质量谱中分别观测到了明显的 η' 信号，测量得到相应的分支比分别为： $(8.56 \pm 0.25(stat.) \pm 0.24(sys.)) \times 10^{-5}$ 和 $(2.16 \pm 0.12(stat.) \pm 0.10(sys.)) \times 10^{-4}$ 。测量结果与先前BESIII 测量的结果一致，并且精度显著提高，进一步验证了手征微扰理论的正确性。而对于 $\eta' \rightarrow 4\pi^0$ ，未观测到明显的 η' 信号，所以给出了在90% 置信度下的分支比上限为： $\mathcal{B}(\eta' \rightarrow 4\pi^0) < 1.28 \times 10^{-5}$ ，这项结果比之前BESIII 实验测量精度提高了3倍，为验证手征微扰理论和理解基本对称性提供了更加精确的实验信息。以上过程的结果都列在表 5-1 中。

本文利用挑选后干净的 $\pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 数据样本，并根据文献[23]中的衰变振幅公式进行振幅分析，首次提取了 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 中类时形状因子。通过将 ρ 的质量和宽度固定为PDG 中的值，测得参数 α （对应文献[23]中 $\frac{c_3}{c_1-c_2}$ 的比值）为： $1.220 \pm 0.285(stat.) \pm 0.04(sys.)$ ，这项结果与理论计算中使用的值相一致。

BESIII 实验能够从不同的方面研究 η' 衰变，因此可以更深入理解 η' 衰变机制、基本对称性和验证手征微扰理论等。

表 5-1 三种 η' 衰变道的数值结果及其与先前测量结果的比较。

衰变模式	N_{sig}	效率 ε (%)	$\mathcal{B}(\eta' \rightarrow X)$	先前BESIII 实验结果[13][14]
$\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$	1650 ± 48	36.4	$(8.56 \pm 0.25(stat.) \pm 0.24(sys.)) \times 10^{-5}$	$(8.53 \pm 0.69(stat.) \pm 0.64(sys.)) \times 10^{-5}$
$\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$	857 ± 48	7.8	$(2.16 \pm 0.12(stat.) \pm 0.10(sys.)) \times 10^{-4}$	$(1.82 \pm 0.35(stat.) \pm 0.18(sys.)) \times 10^{-4}$
$\eta' \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0\pi^0$	< 10.05	1.6	$< 1.28 \times 10^{-5}$	$< 4.94 \times 10^{-5}$



参考文献

- [1] 肖振军, 吕才典. 粒子物理学导论[M]. 北京:科学出版社, 2016.
- [2] 章乃森. 粒子物理学[M]. 科学出版社, 1987.
- [3] H. Fritzsch, M. Gell-Mann and H. Leutwyler, Phys. Lett. B **47**, 365 (1973).
- [4] 郑志鹏, 朱永生. 北京谱仪正负电子物理[M]. 广西科学技术出版社, 1998.
- [5] B.J.Borken and S.L.Glashow, Phys. Lett. B **11**, 255 (1964).
- [6] S.L.Glashow *et al.*, Phys. Rev. D **2**, 1285.
- [7] J.J.Aubert *et al.*, Phys. Rev. Lett **33**, 1404(1974).
- [8] J.E.Augustin *et al.*, Phys. Rev. Lett **33**, 1406(1974).
- [9] W.Braunschwig *et al.*, Phys. Lett. B **57**, 407(1975).
- [10] J.S.Whittaker *et al.*, Phys. Rev. Lett **37**, 1596(1976).
- [11] W.Tanenbaum *et al.*, Phys. Rev. D **10**, 897(1974).
- [12] H. X. Yang *et al.*, Chin. Phys. C **46**, 074001 (2022).
- [13] M. Ablikim *et al.*, (BESIII Collaboration), Phys. Rev. Lett. **112**, 251801 (2014).
- [14] M. Ablikim *et al.*, (BESIII Collaboration), Phys. Rev. D **101**, 032001 (2020).
- [15] 张闯. 北京正负电子对撞机及其重大改造工程[J]. 物理, 2005,34(4):262-269.
- [16] S. Agostinelli *et al.* [GEANT4 Collaboration], Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A **506**, 250 (2003).
- [17] Z. Y. Deng *et al.*, Chin. Phys. C **30**, 371 (2006).
- [18] S. Jadach, B. F. L. Ward, and Z. Was, Comput. Phys. Commun. **130**, 260 (2000).
- [19] S. Jadach, B. F. L. Ward, and Z. Was, Phys. Rev. D **63**, 113009 (2001).

-
- [20] R. G. Ping, Chin. Phys. C **32**, 599 (2008).
- [21] D. J. Lange, Nucl. Instrum. Meth. A **462**, 152 (2001).
- [22] J. C. Chen, G. S. Huang, X. R. Qi, D. H. Zhang, and Y. S. Zhu, Phys. Rev. D **62**, 034003 (2000).
- [23] F. K. Guo, K. Bastian *et al.*, Phys. Rev. D **85**, 014014 (2012).
- [24] M. Ablikim *et al.*, (BESIII Collaboration), Phys. Rev. D **97**, 012003 (2018).
- [25] M. Ablikim *et al.*, (BESIII Collaboration), Phys. Rev. D **97**, 012003 (2018).
- [26] T. Petri. arXiv:1010.2378.
- [27] M. Ablikim *et al.*, (BESIII Collaboration), Phys. Rev. D **87**, 092011 (2013).
- [28] M. Ablikim *et al.*, (BESIII Collaboration), Phys. Rev. Lett. **120**, 242003 (2018).
- [29] P.A. Zyla *et al.* [Particle Data Group], Prog. Theor. Exp. Phys. **2020**, 083C01 (2020).
- [30] F. James and M. Roos, Comput. Phys. Commun. **10**, 34 (2018).
- [31] M. Ablikim *et al.*, (BESIII Collaboration), Phys. Rev. D **92**, 012014 (2015).
- [32] 李会娟, 硕士学位论文, BESIII 上 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ 和 $\eta' \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0\pi^0$ 的研究, 河南师范大学, 2014.
- [33] Y. S. Zhu, Chin. Phys. C **32**, 363 (2008).
- [34] Fang Liu *et al.*, BESIII. Analysis. Memo-00504.
- [35] V. Prasad, M. Ablikim, BESIII. DocDB. 765(2020).
- [36] M. Ablikim *et al.*, (BESIII Collaboration), Phys. Rev. D **87(1)**: 012002 (2013).
- [37] M. Ablikim *et al.*, (BESIII Collaboration), Phys. Rev. D **94**, 072005 (2016).
- [38] M. Ablikim *et al.*, (BESIII Collaboration), Phys. Rev. Lett. **104**, 132002 (2010).
- [39] Feldman, Gary J. and Cousins, Robert D. Phys. Rev. D **57**, 3873(1998).
- [40] K. Stensons., arXiv:physics/0605236[hep-ex].

致 谢

转眼间，三年硕士生涯已接近尾声，在过去的三年中，有喜悦、有彷徨、有惆怅，但也有希望。值此毕业之际，我要向曾经帮助过我的每一个人致以真诚的谢意。

首先诚挚地感谢我的导师常钦教授和我的高能所联合培养导师房双世研究员。常老师平时在科研和工作中严格要求，在生活和学习中无私帮助，让我不仅学到了粒子物理专业知识，更养成了一丝不苟的科研习惯，尤其是常老师渊博的理论知识、严谨的治学态度令我钦佩，值得我终身学习。2021年7月，常老师将我送至高能物理研究所进行联合培养，在这里我有幸结识了高能所的房双世研究员，房老师有着丰富的科研经验，对问题的分析很透彻，具有很高的学术素养。房老师平时为人随和，平易近人，每次我在科研工作中受阻时，房老师都能以他扎实的基础和丰富的经验给我指引方向，让我少了很多迷茫。房老师平时鼓励我们多做报告，练习英语，也非常善于启发鼓励我们独立思考。在跟随房老师学习的这两年中，小到ppt和memo的修改，大到实验分析方法的指导，都使我受益匪浅。我在硕士期间取得的任何成绩与进步都离不开两位导师的帮助与指导，在此向两位恩师表示由衷的感谢和祝福。

感谢高能所的刘芳副研究员对我的耐心指导，刘老师平易近人，每次向刘老师请教问题的时候，她总是不厌其烦地给我讲解。刘老师对我的分析工作提出了很多建议和帮助，也让我学着独立思考和解决问题。

感谢河师大重味物理组的孙俊峰教授、杨悦玲教授、姬清平副教授、李惠静副教授、宋娇娇老师的教诲和学术把关，在跟随老师们的学习和交流中，我学到了很多理论与实验的知识。

感谢朱莹春副教授、秦丽清老师、刘良辰博士三位referee对我工作的帮助。三位referee从不同的角度对我的工作提出了很多指导性的宝贵意见，因此我的工作才得以顺利进行，感谢三位referee 的付出。

感谢吉钰瑶师姐、袁晓庆师姐、朱林师兄、陈通师兄、王雨晴师姐、王石师兄、师荣盛师兄、刘露师姐在我初到高能所时对我的照顾，并教会我基本的命令和分析用到的各种方法，他们在数据分析和编写程序方面给予了我很多帮助和建议。感谢轻强子组同导师的张艳雪、郑文静、苏闪闪、关志林、蒋庭俊、张景旭、向本后、李凯

璐、于勇超、李美琦、孙源，和他们一起学习工作玩耍很开心，在他们身上也学到了很多。感谢高能所的伙伴陶璐燕、张艳雪、申悦名、隋泽萱、张依桐、张宁，在 高能所的日子里大家彼此相依相伴，不仅让我的业余生活变得丰富多彩，更让我收获了珍贵的友谊。感谢河师大粒子组同导师的陈丽丽师姐、王晓琳师姐、张云云师姐、王丽婷师姐、任玉宛师姐、赵萌非师兄、杨雷师兄、张朋龙师兄、康悦杨同学、张亮辉师弟、乔家辉师弟、程清峰师弟，和他们度过了开心又丰富多彩的研一生活，感谢他们在学习和生活中给予我的帮助。感谢河师大的室友骆晴晴同学、刘宁馨同学和学校的挚友王言同学，在我需要帮助的时候，她们总是不遗余力地为我提供帮助。感谢好友张华杰、马琳在北京时的陪伴、关怀和照顾。

最后特别感谢我的家人和我的男朋友朱浩棋同学一直以来对我的支持和鼓励，让我没有后顾之忧专心钻研学术，感谢你们对我的包容与关爱，给了我战胜困难的勇气，我爱你们。

赵子涵

二〇二三年三月

攻读学位期间发表的学术论文目录

- **Improved measurement of $\eta' \rightarrow 4\pi$. BAM-622.**

Zihan Zhao, Qin Chang, Shuangshi Fang *et al.*



独创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写的研究成果，也不包含为获得河南师范大学或其他教育机构的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签名：_____ 日期：_____

关于论文使用授权的说明

本人完全了解河南师范大学有关保留、使用学位论文的规定，即：有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权河南师范大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

签名：_____ 导师签名：_____ 日期：_____