

单位代码	10476
学号	2002183043
分类号	O572.2

硕士学位论文

光前夸克模型和QCD因子化框架下 $B \rightarrow SS$ 衰变唯象研究

学科、专业：物理学、粒子物理
研究方向：粒子物理理论
申请学位类别：理学硕士
申请人：康悦杨
指导教师：常钦教授
陈丽丽副教授

二〇二三年三月

PHENOMENOLOGICAL STUDIES OF $B \rightarrow SS$
DECAY IN QCD FACTORIZATION AND
LIGHT-FRONT QUARK MODEL

A Dissertation Submitted to
the Graduate School of Henan Normal University
in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science

By

Yue-Yang Kang

Supervisor: Prof. Qin Chang

Associate Prof. Lili Chen

March, 2023

摘 要

随着国际高能物理实验的深入开展, B介子的两体非轻衰变在检验粒子物理标准模型以及相关理论计算方法、探寻新物理的间接迹象等方面发挥着越来越重要的作用。在QCD 因子化框架下, $B \rightarrow PP, PV, VV$ 等过程都在以往的工作中被系统地研究。本文将采用QCD 因子化方法, 对 $B \rightarrow SS$ 衰变进行唯象研究。

在对 $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 衰变进行研究时, 形状因子、衰变常数和分布振幅都是非常重要的非微扰输入参数。因此, 本文在光前方法框架下, 分别采用标准光前和协变光前方法对 $P \rightarrow (P, S, A)$ 跃迁过程进行研究, 计算了 $P \rightarrow (P, S, A)$ 跃迁过程的形状因子, 并且还研究了标量介子的衰变常数和分布振幅, 给出了数值结果, 这些数值结果将用于 $B \rightarrow SS$ 衰变的具体计算中。

利用得到的非微扰输入, 我们进一步在QCD因子化框架下, 对 $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 衰变进行了计算和唯象研究。为了研究标量介子的内部结构, 我们分别假设这些标量介子作为两夸克的基态 (S2) 和激发态 (S1) 对 $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 衰变进行系统地分析, 给出了这些过程的分支比和CP破坏, 并且研究了湮灭图贡献的影响。结果表明, 这些衰变过程有着较大的分支比 ($10^{-7} - 10^{-5}$), 有望在Belle-II和LHCb实验中被观测到。通过和实验结果的对比, 有利于进一步判断 $K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 是两夸克基态还是激发态。

关键词: B介子, 光前夸克模型, QCD因子化

ABSTRACT

With the development of international high energy physics experiments, the nonleptonic two-body B meson weak decay is very important in testing the standard model (SM) of particle physics, searching for the possible hints of new physics, and investigating the approaches of dealing with the hadronic matrix element in phenomenological study of heavy flavor physics. In the frame of QCD factorization, the processes of $B \rightarrow PP, PV, VV$ have been systematically studied in previous work. In this paper, we investigate the $B \rightarrow SS$ decays with the QCD factorization.

In the case of $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ decays when investigated, the form factors, decay constants and distribution amplitudes are very important non-perturbative input parameters. In this paper, the $P \rightarrow (P, S, A)$ transition form factors, the decay constants and distribution amplitudes of scalar mesons are studied within standard light-front and covariant light-front approach respectively. And the numerical results are given, which will be used in the specific calculation of $B \rightarrow SS$ decay.

Using the non-perturbative inputs, we study the $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ decay with the QCD factorization. To understand the internal structure of scalar mesons, we systematically study the $B \rightarrow SS$ with assuming these scalar mesons as the ground states of two quarks (S2) and excited of quarks(S1) respectively. The branching fractions, CP asymmetries are given, and the annihilation contribution are studied. It is found that the branching fractions are in a range of $10^{-5} - 10^{-7}$, and some of the decay channels can hopefully be tested in the running Belle-II and LHCb experiments. By comparing with the results of experiments, it is hopefully to determine whether the $K_0^*(1430)$ and $a_0(1450)$ are ground states or excited states.

KEY WORDS: B meson, the light-front quark model, QCD factorization

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
第一章 引言	1
第二章 基础理论框架	5
2.1 庞加莱群与Dirac动力学	5
2.1.1 庞加莱群	5
2.1.2 Dirac动力学	6
2.2 QCD光前量子化	8
2.2.1 阿贝尔规范理论: QED	8
2.2.2 非阿贝尔规范理论: QCD	10
2.2.3 QCD光前量子化	10
2.2.4 光前形式中的标量场	11
2.2.5 光前形式中的旋量场	12
2.2.6 光前形式中的矢量场	13
2.3 光前夸克模型	15
2.3.1 标准光前 (SLF) 夸克模型	15
2.3.2 协变光前 (CLF) 夸克模型	18
2.4 QCD因子化	21
2.4.1 低能有效理论	21
2.4.2 QCD因子化方法	22
第三章 $P \rightarrow (P, S, A)$ 跃迁形状因子的研究	23
3.1 研究动机	23
3.2 $P \rightarrow P$ 和 $P \rightarrow S$ 跃迁形状因子的结果及讨论	23
3.2.1 SLF夸克模型下的理论结果	24
3.2.2 CLF夸克模型下的理论结果	25

3.2.3 数值结果及其分析	25
3.3 $P \rightarrow A(A = {}^1A, {}^3A)$ 跃迁形状因子的结果及讨论	32
3.3.1 SLF夸克模型下的理论结果	32
3.3.2 CLF夸克模型下的理论结果	34
3.3.3 数值结果及讨论	37
3.4 小结	38
第四章 $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 衰变的研究	39
4.1 研究动机	39
4.2 输入参数	40
4.2.1 衰变常数和形状因子	40
4.2.2 分布振幅	41
4.3 理论计算	43
4.4 数值结果和讨论	46
4.5 小结	50
第五章 总结与展望	51
附录A $P \rightarrow {}^1A$ 衰变形状因子结果	53
附录B $P \rightarrow {}^3A$ 过程形状因子的结果	55
附录C $B \rightarrow SS$ 的衰变振幅	57
参考文献	59
致 谢	65
攻读硕士学位期间完成的论文	67
独创性声明和关于论文使用授权的说明	68

第一章 引言

粒子物理是一门研究组成物质世界微观粒子的性质、相互作用以及相互转化规律的学科。目前通过实验观测到的基本粒子一共有61个，我们可以把这些粒子按照自旋分类：自旋为0的Higgs粒子，数量为1；自旋为 $\frac{1}{2}$ 的夸克和轻子，一共有三代，每代有两个粒子，对于轻子，算上其反粒子，一共有12个，对于夸克，每种味道的夸克都有三种颜色，加上其反粒子，一共有36个；矢量规范玻色子，共12个，包括传递弱相互作用的 $W^\pm$ 玻色子和 Z^0 玻色子，传递强相互作用的胶子和传递电磁相互作用的光子。这些基本粒子可以通过强相互作用、弱相互作用以及电磁相互作用联系起来，粒子物理研究的其中一个目标就是寻找一种简单且普适的理论统一地解释这些基本粒子之间的相互作用。到目前为止，只有粒子物理标准模型（Standard Model）可以成功地做到这一点，并且还成功地经受住了实验的考验。

在过去的几年里，CLEO、BaBar、Belle的成功运行为我们提供了大量的实验数据。现在正在运行的LHCb和Belle-II装置上越来越多的B介子衰变被收集，越来越多的B介子衰变过程被观测，并把B介子两体非轻弱衰变的研究带入精确检验时代。B介子两体非轻弱衰变在探寻可能存在的新物理，检验粒子物理标准模型以及检验强子矩阵元处理方法等方面中起着非常重要的作用。由于受到强相互作用的影响，B介子两体非轻衰变强子矩阵元的处理相对复杂，为了更好地处理强子矩阵元，在过去的几十年中，大家陆续提出了一些处理方法：如QCD因子化（QCDF）^[1, 2]、微扰QCD（pQCD）^[3, 4]、软贡献有效理论（SCEF）^[5-8]等。本文将采用QCD因子化方法，对B介子的两体非轻衰变进行唯象学研究。

在之前的工作中，人们采用QCDF的方法对 $B \rightarrow PP, PV, VV$ 等的衰变进行了系统地研究^[9-11]，随着高能物理实验的深入开展， $B \rightarrow SS$ 等以往很少被研究的衰变也可能被测量，因此我们在QCD因子化框架下，对这些衰变进行了系统研究。对这些过程的研究并结合将来的实验，将有利于我们对 $K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 等标量粒子是两夸克基态还是第一激发态的问题得到一个相对肯定的结论。在用QCD因子化方法对 $B \rightarrow SS$ 的衰变进行唯象研究时，介子的跃迁形状因子、衰变常数以及分布振幅都是非常重要的非微扰物理输入参数。粒子物理经过这么年的发展，可以精确计算这些输入参数的方法有很多：如格点QCD（LQCD）^[12]、Wirbel-Stech-Bauer model^[13]、QCD求和规

则 (QCD SR) [16, 17] 以及光前夸克模型 (LFQM) [18–22] 等。在本文, 我们在光前夸克模型的框架下, 计算了 $P \rightarrow (P, S, A)$ 跃迁过程的形状因子, 其中, P 代表赝标量介子 (pseudoscalar meson)、S 代表标量介子 (scalar meson)、A 代表轴矢量介子 (axial vector meson)。并分别在 S1 (把 $K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 作为两夸克第一激发态) 和 S2 (把 $K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 作为两夸克基态) 方案下, 给出了标量介子的衰变常数和分布振幅。最后我们将这些计算得到的非微扰物理量作为输入参数, 应用到 $B \rightarrow SS$ 衰变的唯象研究中。

标准光前夸克模型 (SLF QM) 是由 Terentev 和 Berestetsky 提出的一种基于光前框架和 QCD 光前量子化形式的具有相对论性的夸克模型 [23–25]。它为计算强子的非微扰物理量: 衰变常数、跃迁形状因子和分布振幅等提供了一个概念上简单、唯象上可行的理论框架 [26–43]。利用这种方法得到的一些非微扰物理量已经被成功应用到了 B 介子的唯象学研究中。但是, 由于用这种方法计算出来的矩阵元丢失了明显的洛伦兹协变性而且零模 (zero-mode) 贡献也不能被系统地计算, 因此这种方法很快就被协变光前夸克模型所替代。

为了弥补标准光前夸克模型的不足, Jaus 借助具有显然协变性的 Bethe-Salpeter (BS) 方法构建了协变光前夸克模型 [20, 22, 44–46]。这种方法计算的矩阵元具有明显的洛伦兹协变性, 而且零模贡献也可以被系统地计算。明显的协变性是协变光前夸克模型相对于标准光前夸克模型的一个非常显著的特征。然而值得注意的是, 最近的研究表明, 虽然和类光矢量 (ω_μ) 相关的大部分非物理贡献可以被零模贡献抵消, 但是依然存在一些 ω_μ 相关贡献的残留, 这部分的贡献破坏了协变光前夸克模型的协变性 [47]。此外在计算矢量介子和轴矢量介子的衰变常数 f_V 和 f_A 等物理量时, 人们发现这部分贡献带来了一个自洽性问题 (比如, 通过横向极化和纵向极化计算得到的衰变常数的结果相互不一致)。为了解决这个问题, Choi 和 Ji 提出了一种修改协变 BS 模型和 LF 夸克模型之间对应关系的方案, 称为 type-II 方案 (将协变的 BS 模型和光前夸克模型之间传统的对应方案中的介子质量 M 替换为介子不变质量 M_0)。在这个方案下, f_V 和 f_A 的自洽性问题得到了解决, 但是还需要更多的物理量来检验这种方案的合理性, 同时为 $B \rightarrow SS$ 衰变的研究提供必要的非微扰输入, 因此我们对 $P \rightarrow (P, S, A)$ 的形状因子以及标量介子的衰变常数和分布振幅进行了研究。

本文一共分为两部分: 第一部分是在光前夸克模型的框架下, 研究了 $P \rightarrow$

(P, S, A) 的跃迁过程形状因子，具体包括第二章和第三章。第二章主要阐述了与光前场论以及QCD因子化方法相关的基本理论框架；在第三章，分别在SLF夸克模型和CLF夸克模型下计算了 $P \rightarrow (P, S, A)$ 跃迁形状因子的理论表达式，并在type-II方案下给出了 $c \rightarrow (q, s)$ 和 $b \rightarrow (q, s, c)$ ($q = u, d$)跃迁过程中形状因子的理论预言。

第二部分是第四章，在第四章的前两小节，我们用CLF的方法，分别在S1和S2方案下，给出了标量介子的衰变常数和分布振幅，我们将第一部分在光前夸克模型下计算得到的形状因子和在本章计算得到的衰变常数和分布振幅作为非微扰输入参数，在QCDF的框架下对 $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 的衰变进行计算和唯象研究，给出了这个衰变过程的分支比和CP破坏，并分析了湮灭图的贡献。

在第五章，我们对本工作进行了总结和展望。

第二章 基础理论框架

本章主要介绍的内容是光前夸克模型的理论框架和QCD因子化方法，一共分为两部分：第一部分主要介绍了光前场论相关的基本理论框架和QCD光前量子化的基本理论；本章的第二部分详细地介绍了标准光前夸克模型、协变光前夸克模型以及QCD因子化方法。

2.1 庞加莱群与Dirac动力学

在经典力学中，作用量是最基本的量，而在量子场论当中，最基本的量是体系的拉格朗日量（拉氏量）。我们从拉氏量出发，理论上可以得到这个体系所有的信息。然而事实上，拉氏量作为一种数学结构，当用它来描述现实情况的时候，会受到相对较多的限制。根据Noether定理，我们发现体系拉氏量的对称性与经典场论中的物理守恒定律有着密切的关系，因此我们可以通过研究体系拉氏量的对称性来预测该体系的具体物理行为。研究拉氏量需要满足两个条件：一个是规范变换对称性；另一个是洛伦兹协变性，因此我们用庞加莱群来描述。

在1949年，Dirac提出了三种不同形式的相对论动力学^[48]：瞬时形式（instant form）、光前形式（front form）以及点形式（point form），之后我会详细介绍这三种动力学。

2.1.1 庞加莱群

庞加莱群指的是闵可夫斯基时空当中的等距同构群，对于各种不同形式下的量子场论而言，庞加莱群是一个完全对称群。庞加莱群是李群的一种，Dirac提出庞加莱群的十个生成元可以分为两种：一种是运动学生成元，这类生成元与对应的物理量相对比较简单，与相互作用无关；而另一类则是动力学生成元，这类生成元所对应的物理量包含相互作用。庞加莱群的十个生成元有以下对易关系：

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad (2-1)$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(g_{\mu\rho}P_\nu - g_{\nu\rho}P_\mu), \quad (2-2)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}). \quad (2-3)$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 是四维闵氏时空的度规张量， P_μ 是四个时空平移生成元， $M_{\mu\nu}$ 是六个洛伦兹变

换生成元。 $M_{\mu\nu}$ 所代表的六个洛伦兹变换生成元又可以细分为三个平动生成元 K_i 以及三个转动生成元 J_i ，它们之间的对易关系则可表示为：

$$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k, [J_i, J_j] = i\varepsilon_{ijk}J_k, [J_i, K_j] = i\varepsilon_{ijk}K_k. \quad (2-4)$$

在上式中， $K_i \equiv M_{0i}$, $J_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{jk}$ ($i, j = 1, 2, 3$)。

2.1.2 Dirac动力学

在上文，我们提到Dirac^[48]在1949年提出了三种形式不同的相对论动力学，接下来，我们就详细来解释一下。

瞬时形式：与非齐次洛伦兹子群相关的动力学形式，在数学上，瞬时形式的超曲面可表示为 $t = c$ ，其中 $c = 0$ 。在庞加莱群中，有四个动力学生成元的变换可以改变超曲面，它们之间的变换关系如下：

$$P^0 = \sum \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + V, \quad (2-5)$$

$$M^{0r} = \sum x^r \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + V^r, \quad (2-6)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{x}V + \mathbf{V}'. \quad (2-7)$$

V 是一个三维标量，与坐标 $\mathbf{x}$ 的起始位置无关； $\mathbf{V}$ 是三维矢量， $\mathbf{V}'$ 也与坐标原点无关。

点形式下的超曲面可以表示为： $t^2 - (1 - x)^2 = c > 0$ ，且 $t > 0$ 。庞加莱群中的十个生成元中有六个与相互作用无关的运动学生成元： K_i 和 J_i ，它们子群的变换并不会改变点形式下的超曲面；而剩下的四个动力学生成元中包含相互作用，这些子群的变换会破坏点形式下的超曲面 $t^2 - (1 - x)^2 = c > 0$ 的不变性。

光前形式是由运动学子群指定的，运动学子群是光前形式的对称群，光前形式下的超曲面可以表示为： $x^+ \equiv x^0 + x^3 = c, c = 0$ 。在光前形式下，庞加莱群中的生成元可以用以下形式改写：

$$P^\mu = (P^+, P^-, \mathbf{P}^\perp), \mathbf{P}^\perp = (P^1, P^2), \quad (2-8)$$

$$E^1 = K^1 + J^2, E^2 = K^2 - J^1, \quad (2-9)$$

$$F^1 = K^1 - J^2, F^2 = K^2 + J^1. \quad (2-10)$$

P^μ 为平移生成元， $E^{1,2}$ 和 K^3 称作光前平动生成元， $F^{1,2}$ 和 J^3 则是光前转动生成元。这七个生成元： $E^{1,2}$ 、 K^3 、 J^3 、 P^+ 和 $P^{1,2}$ 在光前形式下，可以保持其超曲面不发生改变；而 P^- 和 $F^{1,2}$ 则与相互作用相关，会使得光前形式下的超曲面发生改变。相对其他两种动力学形式中的六个运动学生成元，光前形式下有七个运动学生成元，这使得在

使用光前形式去处理问题的时候会更加地简单，这也是光前形式相对起其他两种动力学形式的优点之一。

我们通常用 $|\Psi\rangle$ 来表示束缚态波函数，并且可以通过Fock态完备基展开。我们可以通过求解哈密顿量的本征值，从而得到束缚态的具体结构。由于 $P^2 = P^+P^- = \mathbf{P}_\perp^2 = M^2$ ，光前形式的哈密顿算符与束缚态的质量算子 M 有关，其具体形式可以表示为： $H \equiv P^- = \frac{M^2 + \mathbf{P}_\perp^2}{P^+}$ ，因此，哈密顿算符的本征方程为：

$$H|\Psi\rangle = \frac{M^2 + \mathbf{P}_\perp^2}{P^+}|\Psi\rangle. \quad (2-11)$$

在光前形式中，纵向动量 $P^+ = P^0 + P^3$ ，在多粒子系统中， $P^+ = \sum_i p_i^2 = p_i^0 + p_i^3 \geq 0$ ，则 $P^+ \geq 0$ ，这样就不会出现系统总动量为零且包含多种Fock态的情况。

在上面我们提到束缚态可以通过Fock态完备基展开，因此本征态可以表示为： $|\Psi\rangle = |\Psi : P^+, \mathbf{P}_\perp; h\rangle$ 。光前形式下的Fock态基矢 $|\mu_n\rangle$ 为：

$$\begin{aligned} n=0 &: |0\rangle, \\ n=1 &: |q\bar{q} : p_i^+, p_{\perp i}; \lambda_i\rangle = b^\dagger(k_1)d^\dagger(k_2)|0\rangle, \\ n=2 &: |q\bar{q}g : p_i^+, p_{\perp i}; \lambda_i\rangle = b^\dagger(k_1)d^\dagger(k_2)a^\dagger(k_3)|0\rangle, \\ n=3 &: |gg : p_i^+, p_{\perp i}; \lambda_i\rangle = a^\dagger(k_1)a^\dagger(k_2)|0\rangle, \\ &\dots \end{aligned} \quad (2-12)$$

在上式中， $b^\dagger(k)$ 为夸克和轻子的产生算符， $d^\dagger(k)$ 为反夸克和反轻子的产生算符， $a^\dagger$ 为胶子和光子的产生算符。上式中的每个Fock态都是 P^+ 和 $\mathbf{P}_\perp$ 的本征态，而且这个Fock的本征值满足以下关系：

$$P^+ = \sum_i p_i^+, \quad \mathbf{P}_\perp = \sum_i \mathbf{p}_{\perp i}. \quad (2-13)$$

介子束缚态的展开形式可以这样表示：

$$|\Psi\rangle = \sum_i \Psi_{q\bar{q}}(x_i, \mathbf{p}_{\perp i}, \lambda_i)|q\bar{q}\rangle + \sum_i \Psi_{gg}(x_i, \mathbf{p}_{\perp i}, \lambda_i)|gg\rangle + \sum_i \Psi_{q\bar{q}g}(x_i, \mathbf{p}_{\perp i}, \lambda_i)|q\bar{q}g\rangle + \dots \quad (2-14)$$

x_i 是纵向动量分数， $x_i = \frac{p_i^+}{P^+}$ ，介子光前形式（LF）的波函数是： $\Psi_n(x, \mathbf{p}_\perp, \lambda) = \langle \mu_n | \Psi \rangle$ ，在进行具体的计算时，我们通常会将上式中的波函数形式近似处理为下式的形式：

$$|\Psi\rangle = \sum_i \Psi_{q\bar{q}}(x_i, \mathbf{p}_{\perp i}, \lambda_i)|q\bar{q}\rangle. \quad (2-15)$$

从上式中我们可以看出来， $|\Psi\rangle$ 仅仅对纵向动量分数 x_i 和内部横向相对动量 $p_{\perp i}$ 有依

赖，它们对应的生成元是运动学生成元，并不参与相互作用。因此在特定坐标系中求出来的LF波函数可以变换成任意的坐标系，这也是光前形式相对于其他两种形式的动力学的又一优势，我们计算时所采用的坐标系是 $\mathbf{P}_\perp = 0$ 。

2.2 QCD光前量子化

上一节介绍了庞加莱群和Dirac的三种动力学，并详细解释了光前动力学。在本节，我们介绍的主要是光前量子化的内容。首先介绍了瞬时形式动力学下的规范理论，然后在此基础上，直接过渡到了光前形式，完成了QCD量子化。

2.2.1 阿贝尔规范理论：QED

1929年，Weyl首次提出了规范不变性的概念^[49]，Maxwell场本质上就是一个规范场，因此我们从Maxwell场出发，来回顾一下QED的内容。Maxwell方程组的表达式如下：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = gJ^\nu, \quad (2-16)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (2-17)$$

由于(2-17)式中的 $F^{\mu\nu}$ 是全反对称张量，因此 $\partial_\mu J^\mu = 0$ ，式中的 J^ν 是费米子的电磁流。

Dirac方程可以这样表达：

$$(i\not{D} - m)\Psi = 0, \quad (2-18)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu \quad (2-19)$$

D_μ 是规范协变导数， m 是费米子的质量。电动力学有两部分的内容：Maxwell方程组以及Dirac方程，它们也可以从QED的拉氏量导出。

从规范不变性出发，就可以导出QED的拉氏量，从而得到量子电动力学。QED的拉氏量可以写成以下形式：

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi. \quad (2-20)$$

从上式中我们可以看出来，拉氏量 $\mathcal{L}$ 是关于场以及场的导数的函数，接下来我们用 ϕ_r 和 $\partial_\mu \phi_r$ 分别表示场及其导数，下标 r 代表了不同的场。这样我们就可以将拉氏量表示为： $\mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi_r, \partial_\mu \phi_r]$ 。

接下来，我们构建正则动量，其中 k 是为了避免指标的混乱而引进的。

$$\pi_r^k \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_r)} \quad (2-21)$$

对应的欧拉方程可以写成：

$$\partial_k \pi_r^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_k \phi_r} = 0 \quad (2-22)$$

由Nother's定理我们知道在时空的变换下，“流”和“荷”是守恒的，守恒流在全空间的积分为守恒荷：

$$Q \equiv \int d^3x J^0, \quad (2-23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^0} Q = 0 \quad (2-24)$$

我们知道，拉氏量是关于场及其导数的函数，因此拉氏量与空间坐标系的选择无关，所以(2-20)式需要满足庞加莱群的变换不变性。庞加莱群有十个生成元，每个生成元都对应一个守恒流和守恒荷，因此存在十个守恒流：

$$\partial_\lambda T^{\lambda\nu} = 0, \quad \partial_\lambda J^{\lambda,\mu\nu} = 0; \quad (2-25)$$

$$T^{\lambda\nu} = \pi_r^\lambda \partial^\nu \phi_r - g^{\lambda\nu} \mathcal{L}, \quad (2-26)$$

$$J^{\lambda,\mu\nu} = x^\mu T^{\lambda\nu} - x^\nu T^{\lambda\mu} + \pi_\gamma^\lambda \Sigma_{rs}^{\mu\nu} \phi_s. \quad (2-27)$$

其中 $T^{\lambda\nu}$ 是能动量张量， $J^{\lambda,\mu\nu}$ 是平动转动张量，在旋量场中的自旋部分： $\Sigma_{rs}^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_{rs}$ ，在矢量场中的自旋部分为： $\Sigma_{rs}^{\mu\nu} = g_r^\mu g_s^\nu - g_r^\nu g_s^\mu$ 。十个矢量流所对应的守恒荷为：

$$P^\nu = \int_\Omega d\omega_0 (\pi_r^\lambda \partial^\nu \phi_r - g^{0\nu} \mathcal{L}), \quad (2-28)$$

$$M^{\mu\nu} = \int_\Omega d\omega_0 (x^\mu T^{0\nu} - x^\nu T^{0\mu} + \pi_r^0 \Sigma_{rs}^{\mu\nu} \phi_s). \quad (2-29)$$

从 $\mathcal{L}_{QED}$ 出发，利用欧拉方程可以得到：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k A_\lambda)} = -F^{k\lambda} = \pi^{\lambda k}[A], \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\lambda} = g \bar{\Psi} \gamma^\lambda \Psi; \quad (2-30)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \Psi_\alpha)} = \frac{i}{2} \bar{\Psi}_\beta \gamma_{\beta\alpha}^k = \pi_\alpha^k[\Psi], \quad (2-31)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_\alpha} = -\frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\Psi}_\beta \gamma_{\beta\alpha}^\mu + g \bar{\Psi}_\beta \gamma_{\beta\alpha}^\mu A_\mu - m \bar{\Psi}_\alpha. \quad (2-32)$$

将这些公式带入到(2-26)式和(2-27)式中，就可以得到我们比较常见的守恒流的形式：

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu k} F_k^\nu + i \bar{\Psi} \gamma^\mu D^\nu \Psi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2-33)$$

$$J^{\lambda,\mu\nu} = x^\mu T^{\lambda\nu} - x^\nu T^{\lambda\mu} + \frac{i}{8} \bar{\Psi} (\gamma^\lambda [\gamma^\mu, \gamma^\nu] + [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \gamma^\lambda) \Psi + A^\mu F^{\lambda\nu} - A^\nu F^{\lambda\mu}. \quad (2-34)$$

2.2.2 非阿贝尔规范理论：QCD

QCD（量子色动力学）描述了夸克之间的强相互作用，这个理论是建立在非阿贝尔规范对称性的基础上的。QCD的拉氏量有以下的形式：

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a + \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi, \quad (2-35)$$

$$F_a^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g_s f^{abc} A_b^\mu A_c^\nu \quad (2-36)$$

$$D_{ab}^\mu = \delta_{ab}\partial^\mu + ig_s A_{ab}^\mu. \quad (2-37)$$

其中， f^{abc} 为QCD规范场结构常数， A_μ^a 是为了对应颜色规范变换而引入的规范场，(2-36)式是规范场强张量，(2-37)式是协变导数。

QCD能动量有以下形式：

$$P^\mu = \int_{\Omega} d\omega_0 [2\text{Tr}(F^{0k}F_k^\mu) + i\bar{\Psi}\gamma^0 D^\mu\Psi - g^{0\mu}\mathcal{L}]. \quad (2-38)$$

从 $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$ 出发，再结合欧拉方程，可以得出：

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = gJ^\nu, \quad (2-39)$$

$$J^\nu = \bar{\Psi}\gamma^\nu T^a\Psi T^2 - i[F^{\nu k}, A_k], \quad (2-40)$$

$$(i\not{D} - m)\Psi = 0. \quad (2-41)$$

2.2.3 QCD光前量子化

在光前形式下，哈密顿量有这样的关系： $H = P^-$ ，在光前坐标系中，体积元 $\Omega = \int d\omega_+ = \frac{1}{2} \int dx^- d^2\mathbf{x}_\perp$ 。因此式(2-38)可以改写为：

$$\begin{aligned} P^\mu &= \int_{\Omega} d\omega_+ [2\text{Tr}(F^{+k}F_k^\mu) + i\bar{\Psi}\gamma^+ D^\mu\Psi - g^{+\mu}\mathcal{L}] \\ &= \int_{\Omega} d\omega_+ \left(F^{+k}F_k^\mu + \frac{1}{4}g^{+\mu}F^{k\lambda}F_{k\lambda} + i\bar{\Psi}\gamma^+ T^a D^{a\mu}\Psi \right). \end{aligned} \quad (2-42)$$

由于从瞬时形式向光前形式的过渡的过程中，二者呈现的内容会有许多不同，接下来我们就给出 P^μ 的各个分量，首先是光前形式下的哈密顿量 P^- ：

$$\begin{aligned} P^- &= \int_{\Omega} d\omega_+ [\bar{\Psi}_+\gamma^+ \frac{m^2 + (i\nabla_\perp)^2}{i\partial^+} \Psi_+ - A^{a\nu}(i\nabla_\perp)^2 A_\nu^a] \\ &\quad + 2g_s \int_{\Omega} d\omega_+ (\bar{\Psi}_+\gamma^\mu T^a \Psi_+ A_\mu^a) + \frac{g_s^2}{2} \int_{\Omega} d\omega_+ f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu} \\ &\quad + g_s^2 \int_{\Omega} d\omega_+ \bar{\Psi}_+\gamma^+ T^a \Psi_+ \frac{1}{(i\partial^+)^2} \bar{\Psi}_+\gamma^+ T^a \Psi_+ + g_s^2 \int_{\Omega} d\omega_+ \bar{\Psi}_+\gamma^\mu T^a A_\mu^a \frac{\gamma^+}{i\partial^+} T^b A_\nu^b \gamma^\nu \Psi_+. \end{aligned} \quad (2-43)$$

上式中的第一项是夸克和胶子之间的动能项，该项与相互作用无关；第二项是夸克、反夸克和胶子顶点之间的三点作用项；第三项是四胶子之间的自相互作用项；第四项是瞬时形式下胶子的作用项；最后一项是瞬时形式下夸克之间的相互作用项^[50]。我们可以很容易看出，在 $g_s \rightarrow 0$ 非常极限的条件下，仅仅第一项不为零，这样就得到了光前形式下的哈密顿运动方程：

$$[\Psi_+(x), P^-] = i \frac{\partial}{\partial x^+} \Psi_+(x), \quad [\mathbf{A}_\perp(x), P^-] = i \frac{\partial}{\partial x^+} \mathbf{A}_\perp(x). \quad (2-44)$$

式中 $\Psi_+(x)$ 和 $\mathbf{A}_\perp(x)$ 是动力学场。 $A_+(x) = 0$ 是引入的光锥规范，其目的是消去鬼场和非物理的胶子场。将这两个动力学场利用产生算子和湮灭算子展开：

$$\Psi_+(x) = \Sigma_\lambda \int \frac{dk^+}{\sqrt{2k^+}} \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^3} [b_\lambda(k) u(k, \lambda) e^{-ik \cdot x} + d_\lambda^\dagger(k) v(k, \lambda) e^{ik \cdot x}], \quad (2-45)$$

$$\mathbf{A}_\perp(x) = \Sigma_\lambda \int \frac{dk^+}{\sqrt{2k^+}} \frac{d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^3} [a(k) \boldsymbol{\epsilon}_\perp(k, \lambda) e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(k) \boldsymbol{\epsilon}_\perp^*(k, \lambda) e^{ik \cdot x}]. \quad (2-46)$$

式子中的 $u(k, \lambda)$ 和 $v(k, \lambda)$ 为光前旋量场。产生和湮灭算符的对易关系为：

$$[a(k), a^\dagger(k')] = (2\pi)^3 \delta(k^+ - k'^+) \delta^2(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \quad (2-47)$$

$$\{b(k), b^\dagger(k')\} = \{d(k), d^\dagger(k')\} = (2\pi)^3 \delta(k^+ - k'^+) \delta^2(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \quad (2-48)$$

将对易关系和(2-45)式、(2-46)式代入(2-43)式得：

$$P^- = \sum_\lambda \int \frac{dk^+ d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^3} \frac{m^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{k^+} b_\lambda^\dagger(k) b_\lambda(k) + (inter). \quad (2-49)$$

其中，*inter.*表示相互作用项。

在上一节中我们提到 P^+ 和 $\mathbf{P}_\perp$ 是与相互作用无关的运动生成元，可以表示为：

$$P^+ = 2 \int_\Omega d\omega_+ [\bar{\Psi}_+ \gamma^+ (i\partial^+) \Psi_+ - A^{\mu\nu} (i\partial^+)^2 A_\nu^\mu], \quad (2-50)$$

$$\mathbf{P}_\perp = \int_\Omega d\omega_+ [\bar{\Psi}_+ \gamma^+ (i\nabla_\perp) \Psi_+ - A^{\mu\nu} (i\partial^+) (i\nabla_\perp) A_\nu^\mu]. \quad (2-51)$$

光前量子化形式为：

$$P^+ = \sum_\lambda \int \frac{dk^+ d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^3} k^+ b_\lambda^\dagger(k) b_\lambda(k), \quad (2-52)$$

$$\mathbf{P}_\perp = \sum_\lambda \int \frac{dk^+ d^2 \mathbf{k}_\perp}{(2\pi)^3} \mathbf{k}_\perp b_\lambda^\dagger(k) b_\lambda(k). \quad (2-53)$$

2.2.4 光前形式中的标量场

我们依然先从拉氏量出发，在光前形式下，自由标量场的拉氏量为：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^+ \phi \partial^- \phi - \frac{1}{2} (\partial^\perp \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (2-54)$$

光前下的Klein Gordon方程为:

$$[\partial^+ \partial^- - (\boldsymbol{\partial}^\perp)^2 + m^2] \phi(x) = 0. \quad (2-55)$$

这个方程的通解为:

$$\phi(x) = \int \frac{dk^+ d^2 \mathbf{k}_\perp}{2k^+ (2\pi)^3} [a(k) e^{-ik \cdot x} + a^\dagger(k) e^{ik \cdot x}]. \quad (2-56)$$

$a(k)$ 和 $a^\dagger(k)$ 分别是湮灭算符和产生算符, 二者之间的对易关系为:

$$[a(k), a^\dagger(k')] = 2(2\pi)^3 k^+ \delta^3(k - k'), \quad (2-57)$$

$$[a(k), a(k')] = [a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0. \quad (2-58)$$

对于单粒子态, 有以下关系:

$$|k\rangle = a^\dagger(k) |0\rangle, \quad (2-59)$$

$$\langle k' | k \rangle = 2(2\pi)^3 k^+ \delta^3(k - k') \quad (2-60)$$

将上式推广到场, 我们可以得到:

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &= i\Delta(x - y) \\ &= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta(k^2 - m^2) \epsilon(k^0) e^{-ik \cdot (x - y)}. \end{aligned} \quad (2-61)$$

式中 $\epsilon(x) = \theta(x) - \theta(-x)$ 表示反对称阶跃函数。其中 $\frac{k^+}{k^0} = 1 + \frac{k^3}{k^0} > 0$, 因此 $\epsilon(k^+) = \epsilon(k^0)$ 。在光前等时 ($x^+ = y^+$) 的条件下, (2-61) 可以改写为:

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^+ = y^+} = -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-) \Delta^2(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}_\perp). \quad (2-62)$$

根据 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 编时乘积的真空期望值, 可以得到标量场的传播子 $\bar{S}_B(x - y)$:

$$\begin{aligned} i\bar{S}_B(x - y) &= \langle 0 | T^+ \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^+ - y^+) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^+ - x^+) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2-63)$$

将(2-57)式和(2-58)式代入到(2-56)式可得:

$$i\bar{S}_B(x - y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x - y)} \frac{i}{k^2 - m^2} = iS_B(x - y). \quad (2-64)$$

上式中的 $S_B(x - y)$ 是瞬时形式下标量场的传播子, 而 $\bar{S}_B(x - y)$ 是光前形式下标量场的传播子, 二者是完全相同的。

2.2.5 光前形式中的旋量场

在光前形式下, 自由费米子场的拉氏量可以表示为:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} \left[i \left(\frac{1}{2} \gamma^+ \partial^- + \frac{1}{2} \gamma^- \partial^+ - \gamma^\perp \boldsymbol{\partial}^\perp \right) - m \right] \Psi. \quad (2-65)$$

由上式，可以得出自由费米子场即旋量场的运动学方程，即Dirac运动方程：

$$\left[i \left(\frac{1}{2} \gamma^+ \partial^- + \frac{1}{2} \gamma^- \partial^+ - \gamma^\perp \boldsymbol{\partial}^\perp \right) - m \right] \Psi = 0. \quad (2-66)$$

式中 $\gamma^\pm = \gamma^0 \mp \gamma^3$, $\gamma^\perp = \gamma^{1,2}$ 。

光前形式下运动方程的通解为：

$$\Psi(x) = \sum_s \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2k^+} (2\pi)^3} [b(k, s) u(k, s) e^{-ik \cdot x} + d^\dagger(k, s) v(k, s) e^{ik \cdot x}]. \quad (2-67)$$

式中的 $b(k, s)$ 和 $d^\dagger(k, s)$ 分别是正夸克的湮灭算符和反夸克的产生算符。二者的反对易关系为：

$$\{b^\dagger(k, s), d(k', s')\} = \{d^\dagger(k, s), b(k', s')\} = 0, \quad (2-68)$$

$$\{b^\dagger(k, s), b(k', s')\} = \{d^\dagger(k, s), d(k', s')\} = \delta(k^+ - k'^+) \delta^2(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \delta_{s, s'}. \quad (2-69)$$

我们定义 $\Psi^\pm = \Lambda^\pm \Psi$, $\Lambda^\pm = \frac{1}{4} \gamma^\mp \gamma^\pm$, 则有

$$\Psi^- = \frac{1}{i\partial^+} (i\boldsymbol{\alpha}^\perp \boldsymbol{\partial}^\perp + \gamma^0 m) \Psi^+. \quad (2-70)$$

对于 Ψ^+ , 可以得出：

$$i\partial^- \Psi^+ = \frac{-(\boldsymbol{\partial}^\perp)^2 + m^2}{i\partial^+} \Psi^+. \quad (2-71)$$

这就是LF下 Ψ^+ 的哈密顿本征方程。利用上述的反对易关系，在光前等时的条件下，我们可以得到：

$$\{\Psi^+(x), \Psi^{+\dagger}(y)\}_{x^+=y^+} = \Lambda^+ \delta(x^- - y^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}'_\perp). \quad (2-72)$$

根据旋量场编时乘积的真空期望值，我们可以得到LF形式下的旋量场的传播子 $\bar{S}_F(x - y)$ ：

$$\begin{aligned} i\bar{S}_F(x - y) &= \langle 0 | T^+ \Psi(x) \Psi(y) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^+ - y^+) \langle 0 | \Psi(x) \Psi(y) | 0 \rangle + \theta(y^+ - x^+) \langle 0 | \Psi(y) \Psi(x) | 0 \rangle \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-k \cdot (x-y)} \left(\frac{i}{\not{k} - m + i\epsilon} - \frac{\gamma^+}{2k^+} \right) \\ &= iS_F(x - y) - \frac{\gamma^+}{4} \delta(x^+ - y^+) \delta^2(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}_\perp) \epsilon(x^- - y^-). \end{aligned} \quad (2-73)$$

$S_F(x - y)$ 为旋量场瞬时形式下的传播子，显而易见，旋量场中，瞬时形式的传播子与LF形式下的传播子是不一样的。

2.2.6 光前形式中的矢量场

在光前形式下，无质量矢量场的拉氏量为：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2-74)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2-75)$$

运动学方程为:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (2-76)$$

将(2-75)式代入到(2-76)式中, 可将(2-76)式进一步表示为:

$$\partial_\nu(\partial \cdot A) - \partial^2 A_\nu = 0. \quad (2-77)$$

在光前形式下, 上式可改写成分量的形式:

$$\partial^+ \left(\frac{1}{2} \partial^+ A^- + \frac{1}{2} \partial^- A^+ - \partial^\perp \mathbf{A}^\perp \right) - [\partial^+ \partial^- + (\partial^\perp)^2] A^+ = 0, \quad (2-78)$$

$$\partial^- \left(\frac{1}{2} \partial^+ A^- + \frac{1}{2} \partial^- A^+ - \partial^\perp \mathbf{A}^\perp \right) - [\partial^+ \partial^- + (\partial^\perp)^2] A^- = 0, \quad (2-79)$$

$$\partial^\perp \left(\frac{1}{2} \partial^+ A^- + \frac{1}{2} \partial^- A^+ - \partial^\perp \mathbf{A}^\perp \right) - [\partial^+ \partial^- + (\partial^\perp)^2] \mathbf{A}^\perp = 0. \quad (2-80)$$

根据光前规范: $A^+ = 0$, 上式可以改写为:

$$\frac{1}{2} \partial^+ A^- - \partial^\perp \mathbf{A}^\perp = F(x^+, \mathbf{x}^\perp), \quad (2-81)$$

$$\partial^+ F(x^+, \mathbf{x}^\perp) = 0. \quad (2-82)$$

对于无质量矢量场, 只有横向部分 $\mathbf{A}^\perp$ 。由上式可得, A^- 可以用 $\mathbf{A}^\perp$ 表示。方便起见, 我们选取 $F(x^+, \mathbf{x}^\perp) = 0$, 故无质量矢量场的运动方程为:

$$[\partial^+ \partial^- - (\partial^\perp)^2] \mathbf{A}^\perp = 0. \quad (2-83)$$

光前形式下矢量场运动方程的通解为:

$$A^i(x) = \int \frac{dk^+ d^2 \mathbf{k}_\perp}{2k^+ (2\pi)^3} \sum_\lambda \delta_{i\lambda} \left[a_\lambda(k) e^{-ik \cdot x} + a_\lambda^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right]. \quad (2-84)$$

上式中 $a^\dagger(k)$ 为产生算符、 $a(k)$ 为湮灭算符, 它们之间的对易关系为:

$$[a_\lambda(k), a_\sigma^\dagger(k')] = 2(2\pi)^3 k^+ \delta_{\lambda\sigma} \delta^3(k - k'), \quad (2-85)$$

$$[a_\lambda(k), a_\sigma(k')] = [a_\lambda^\dagger(k), a_\sigma^\dagger(k')] = 0. \quad (2-86)$$

根据上述算符之间的对易关系, 我们可以得到LF形式下矢量场的等时对易关系:

$$[A^i(x), A^j(y)]_{x^+=y^+} = -\frac{i}{4} \delta_{ij} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(\mathbf{x}_\perp - \mathbf{y}_\perp). \quad (2-87)$$

根据(2-81)式, 当取 $F(x^+, \mathbf{x}^\perp) = 0$ 时,

$$\partial^+ A^- = 2\partial^\perp \mathbf{A}^\perp. \quad (2-88)$$

将 $\mathbf{A}^\perp$ 代入可得:

$$A^-(x) = \frac{2\partial^\perp \mathbf{A}^\perp}{\partial^+} = \int \frac{dk^+ d^2 \mathbf{k}_\perp}{2k^+ (2\pi)^3} \sum_\lambda \delta_{i\lambda} \frac{2k^i}{k^+} \left[a_\lambda(k) e^{-ik \cdot x} + a_\lambda^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right]. \quad (2-89)$$

引入极化矢量：

$$\epsilon_1^\mu = \frac{1}{k^+}(0, 2k^1, k^+, 0), \quad (2-90)$$

$$\epsilon_2^\mu = \frac{1}{k^+}(0, 2k^2, 0, k^+). \quad (2-91)$$

有：

$$A^\mu(x) = \int \frac{dk^+ d^2\mathbf{k}_\perp}{2k^+(2\pi)^3} \sum_\lambda \epsilon_\lambda^\mu \left[a_\lambda(k) e^{-ik \cdot x} + a_\lambda^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right]. \quad (2-92)$$

根据矢量场编时乘积的真空期望值，我们可以得到LF形式下的矢量场的传播子 $\bar{S}_V(x-y)$ ：

$$\begin{aligned} i\bar{S}_V^{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0 | T^+ A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^+ - y^+) \langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle + \theta(y^+ - x^+) \langle 0 | A^\nu(x) A^\mu(y) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 + i\epsilon} e^{-k \cdot (x-y)} \sum_\lambda \epsilon_\lambda^\mu(k) \epsilon_\lambda^{\nu*}(k) \\ &= iS_V(x-y) \cdot \sum_\lambda \epsilon_\lambda^\mu(k) \epsilon_\lambda^{\nu*}(k). \end{aligned} \quad (2-93)$$

$\bar{S}_V^{\mu\nu}(x-y)$ 是LF形式下矢量场的传播子， $S_V(x-y)$ 是瞬时形式下矢量场的传播子，二者之间相差了一个系数： $\sum_\lambda \epsilon_\lambda^\mu(k) \epsilon_\lambda^{\nu*}(k)$ 。

2.3 光前夸克模型

在上一节，我们简述了庞加莱群和LF场论，这一节的主要内容是介绍在计算形状因子、衰变常数和分布振幅时所采用的模型：光前夸克模型（LF QM），并详细地介绍了标准光前夸克模型（SLF QM）和协变光前夸克模型（CLF QM）。

2.3.1 标准光前（SLF）夸克模型

标准光前夸克模型是由Terentev和Berestetsky提出的一种基于光前形式和QCD光前量子化形式的具有相对论性的夸克模型。它为计算强子的非微扰物理量：衰变常数、跃迁形状因子和分布振幅等提供了一个概念简单的唯象学框架，并且计算得到非微扰物理量还可以进一步应用到B介子两体非轻衰变的唯象学研究中。

• 运动学量

对于一个处于束缚态的介子，它的质量为 M ，总动量为 $p = (p^+, p^-, \mathbf{p}_\perp)$ ，组成该束缚态介子的组分夸克 q_1 的质量为 m_1 ，反夸克 $\bar{q}_2$ 的质量为 m_2 ，二者的动量可以

用LF相对动量变量 $(x, \mathbf{k}_\perp)$ 表示:

$$k_1^+ = xp^+, \quad \mathbf{k}_{1\perp} = x\mathbf{p}_\perp + \mathbf{k}_\perp, \quad k_2^+ = \bar{x}p^+, \quad \mathbf{k}_{2\perp} = \bar{x}\mathbf{p}_\perp - \mathbf{k}_\perp, \quad (2-94)$$

其中, $\bar{x} = 1 - x$, $\mathbf{k}_\perp = (k^x, k^y)$, $\mathbf{p}_\perp = (p^x, p^y)$ 。假设介子沿着 z 轴运动, 出于计算方便, 我们选取的坐标系为 $\mathbf{p}_\perp = 0$ 。对于SLF夸克模型来说, 介子质量及其组分夸克的质量都在壳, 因此可以直接通过在壳条件 $k^2 = m^2$ 来写出 “-” 分量:

$$k_i^- = \frac{m_i^2 + \mathbf{k}_{i\perp}^2}{k_i^+}. \quad (2-95)$$

定义介子的不变质量为 M_0^2 :

$$M_0^2 = \frac{m_1^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{x} + \frac{m_2^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{\bar{x}}. \quad (2-96)$$

矢量介子和轴矢量介子的极化矢量为:

$$\epsilon_{\lambda=0}^\mu = \frac{1}{M} \left(p^+, \frac{-M^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{p^+}, \mathbf{p}_\perp \right), \quad (2-97)$$

$$\hat{\epsilon}_{\lambda=0}^\mu = \frac{1}{M_0} \left(p^+, \frac{-M_0^2 + \mathbf{p}_\perp^2}{p^+}, \mathbf{p}_\perp \right), \quad (2-98)$$

$$\epsilon_{\lambda=\pm}^\mu = \hat{\epsilon}_{\lambda=\pm}^\mu = \left(0, \frac{2}{p^+} \epsilon_\perp \cdot \mathbf{p}_\perp, \epsilon_\perp \right), \quad \epsilon_\perp \equiv \mp \frac{(1, \pm i)}{\sqrt{2}}. \quad (2-99)$$

上述所有的运动学量都是在光前坐标系下给出的。

• 波函数 (WF)

在LFQM中, 如果我们想要了解一个束缚态的所有信息, 那么我们就可以从这个束缚态的波函数入手, 下面我们就介绍一下我们所用到的波函数。

对于一个质量为 M , 动量为 p 的介子, 它的束缚态为:

$$|M(p)\rangle = \sum_{h_1, h_2} \int \frac{dk^+ d^2 \mathbf{k}_\perp}{2\sqrt{k^+(p^+ - k^+)} (2\pi)^3} \Psi_{h_1, h_2}(k^+, \mathbf{k}_\perp) |q_1 : k_1^+, \mathbf{k}_{1\perp}, h_1\rangle |\bar{q}_2 : k_2^+, \mathbf{k}_{2\perp}, h_2\rangle. \quad (2-100)$$

式中 $h_{1(2)}$ 是指组分夸克的螺旋度; $\Psi_{h_1, h_2}(k^+, \mathbf{k}_\perp)$ 是动量空间波函数, 满足归一化条件。 $|q_1\rangle$ 和 $|\bar{q}_2\rangle$ 是单粒子态, 它们的定义是:

$$|q_1(k_1, h_1)\rangle = \sqrt{2k_1^+} b_{h_1}^\dagger(k_1) |0\rangle, \quad (2-101)$$

$$|\bar{q}_2(k_2, h_2)\rangle = \sqrt{2k_2^+} d_{h_2}^\dagger(k_2) |0\rangle. \quad (2-102)$$

粒子的产生和湮灭算符满足以下反对易关系:

$$\{b_h^\dagger(k), b_{h'}(k')\} = \{d_h^\dagger(k), d_{h'}(k')\} = (2\pi)^3 \delta(k^+ - k'^+) \delta^2(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}'_\perp) \delta_{h, h'} \quad (2-103)$$

波函数包含两部分: 自旋波函数 S 和轨道角动量波函数 ψ 。

$$\Psi_{h_1, h_2}(x, \mathbf{k}_\perp) = S_{h_1, h_2}(x, \mathbf{k}_\perp) \psi(x, \mathbf{k}_\perp). \quad (2-104)$$

波函数满足归一化条件：

$$\sum_{h_1, h_2} \int \frac{dx d^2 \mathbf{k}_\perp}{2(2\pi)^3} |\Psi_{h_1, h_2}(x, \mathbf{k}_\perp)|^2 = 1. \quad (2-105)$$

径向波函数 $\psi(x, \mathbf{k}_\perp)$ 是用来描述处于束缚态的组分夸克的动量分布，自旋波函数 $S_{h_1, h_2}(x, \mathbf{k}_\perp)$ 是在光前螺旋度之外，构建了一个自旋为 (S, S_z) 的状态。径向波函数有很多种形式，我们采用的是高斯（Gauss）型波函数。

$$\psi_s(x, \mathbf{k}_\perp) = 4 \frac{\pi^{\frac{3}{4}}}{\beta^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\partial k_z}{\partial x}} \exp \left[-\frac{k_z^2 + \mathbf{k}_\perp^2}{2\beta^2} \right], \quad (2-106)$$

$$\psi_p(x, \mathbf{k}_\perp) = \frac{\sqrt{2}}{\beta} \psi_s(x, \mathbf{k}_\perp). \quad (2-107)$$

式中 ψ_s 表示 s -波介子的波函数， ψ_p 表示 p -波介子的波函数； k_z 是沿 z 轴的相对动量， $k_z = (x - \frac{1}{2})M_0 + \frac{m_2^2 - m_1^2}{2M_0}$ 。Gauss型波函数中的 β 和 m_i 是输入参数。其中 β 是可变参数，具有能量量纲， $1/\beta$ 可以作为介子尺度，一般情况下，夸克和反夸克之间的质量差距越大，其 β 值越大；介子的质量越大，其 β 值越大。在这里我们采用的 β 参数是通过介子衰变常数拟合得到的。

自旋波函数 $S_{h_1, h_2}(x, \mathbf{k}_\perp)$ 可以通过Melosh变换得到，其形式为：

$$S_{h_1, h_2} = \frac{\bar{u}(k_1, h_1) \Gamma v(k_2, h_2)}{\sqrt{2\hat{M}_0}}, \quad (2-108)$$

其中， $\hat{M}_0^2 = M_0^2 - (m_1 - m_2)^2$ 。对于标量、矢量、轴矢介子来说，顶角 Γ 的形式为：

$$\Gamma_P = \gamma_5, \quad (2-109)$$

$$\Gamma_S = \frac{\hat{M}_0^2}{2\sqrt{3}M_0}, \quad (2-110)$$

$$\Gamma_V = -\not{\epsilon} + \frac{\hat{\epsilon} \cdot (k_1 - k_2)}{D_{V, LF}}, \quad D_{V, LF} = M_0 + m_1 + m_2 \quad (2-111)$$

$$\Gamma_{1A} = -\frac{1}{D_{1, LF}} \hat{\epsilon} \cdot (k_1 - k_2) \gamma_5, \quad D_{1A, LF} = 2 \quad (2-112)$$

$$\Gamma_{3A} = -\frac{\hat{M}_0^2}{2\sqrt{2}M_0} \left[\not{\epsilon} + \frac{\hat{\epsilon} \cdot (k_1 - k_2)}{D_{3, LF}} \right] \gamma_5, \quad D_{3A, LF} = \frac{\hat{M}_0^2}{m_1 - m_2} \quad (2-113)$$

● 强子矩阵元计算

在本篇文章中，最重要的一部分就是计算强子矩阵元，接下来我们举例说明。

当我们计算形状因子时，会用到矩阵元： $\mathcal{B} \equiv \langle M''(p'') | \bar{q}'_1 \Gamma q'_1 | M'(p') \rangle$ ，首先我们将矩阵元在 $q^+ = 0$ 的框架下，按照(2-67)式展开：

$$q'_1(0) = \sum_s \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2k^+} (2\pi)^3} [b(k, s) u(k, s) + d^\dagger(k, s) v(k, s)], \quad (2-114)$$

$$\bar{q}_2''(0) = \sum_s \int \frac{d^3k}{\sqrt{2k^+}(2\pi)^3} [b^\dagger(k, s)\bar{u}(k, s) + d(k, s)\bar{v}(k, s)]. \quad (2-115)$$

然后, 我们将 (2-100) 式、(2-114) 式和 (2-115) 式代入矩阵元并且利用 (2-68) 式的对易关系化简可得:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(q^2) = & \sum_{h_1', h_1'', h_2} \int \frac{dk'^+ d^2\mathbf{k}'_\perp}{(2\pi)^3 2\sqrt{k'^+ k''^+}} \psi''^*(k''^+, \mathbf{k}''_\perp) \psi'(k'^+, \mathbf{k}'_\perp) \\ & S_{h_1'', h_2}^{\dagger\uparrow}(k''^+, \mathbf{k}''_\perp) C_{h_1'', h_1'}(k''^+, \mathbf{k}''_\perp, k'^+, \mathbf{k}'_\perp) S'_{h_1', h_2}(k'^+, \mathbf{k}'_\perp). \end{aligned} \quad (2-116)$$

式中 $C_{h_1'', h_1'}(k''^+, \mathbf{k}''_\perp, k'^+, \mathbf{k}'_\perp) \equiv \bar{u}_{h_1''}(k''^+, \mathbf{k}''_\perp) \Gamma u_{h_1'}(k'^+, \mathbf{k}'_\perp)$, $q = p' - p''$ 。该式适用于所有的介子跃迁过程, 当然在进行具体计算时, 对于不同介子的跃迁过程, 我们需要更换与之对应的顶角和波函数。

2.3.2 协变光前 (CLF) 夸克模型

协变光前夸克模型是 Jaus 借助了具有明显协变性的 Bethe-Salpeter (BS) 方法而提出的。这种方法计算的矩阵元具有明显的洛伦兹协变性, 而且零模贡献也是可以确定的, 明显的洛伦兹协变性是协变光前夸克模型相对于标准光前夸克模型的一个非常显著的特征。接下来我们就详细介绍协变光前夸克模型。

在 CLF 夸克模型中, 我们可以通过图 2-1 所示的费曼图计算出矩阵元。以计算介子跃迁形状因子为例, 根据费曼规则^[22, 51], 可以写出振幅:

$$\mathcal{B} = N_c \int \frac{d^4k'_1}{(2\pi)^4} \frac{H_{M'} H_{M''}}{N'_1 N''_1 N_2} iS_B, \quad (2-117)$$

其中, $d^4k'_1 = \frac{1}{2} dk'_1{}^- dk'_1{}^+ d^2\mathbf{k}'_\perp$, $H_{M'}, H_{M''}$ 是束缚态的顶角函数, $N_1^{(\prime, \prime\prime)} = k_1^{(\prime, \prime\prime)2} - m_1^{(\prime, \prime\prime)2} + i\epsilon$, $N_2 = k_2^2 - m_2^2 + i\epsilon$ 均来自费米传播子。与费米圈相关的迹 S_B 为

$$S_B = \text{Tr} \left[\Gamma(k'_1 + m'_1) (i\Gamma_{M'}) (-k_2 + m_2) (i\gamma^0 \Gamma_{M''}^\dagger \gamma^0) (k''_1 + m''_1) \right], \quad (2-118)$$

其中 $\Gamma_{M^{(\prime, \prime\prime)}}$ 是各种介子的顶角算符, 不同介子顶角算符的具体形式形式为:

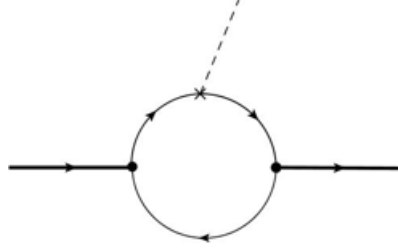
$$i\Gamma_P = -i\gamma_5, \quad (2-119)$$

$$i\Gamma_S = -i, \quad (2-120)$$

$$i\Gamma_V = i \left[\gamma^\mu - \frac{(k_1 - k_2)^\mu}{D_{V, \text{con}}} \right], \quad (2-121)$$

$$i\Gamma_{1A} = i \frac{(k'_1 - k_2)^\mu}{D_{1, \text{con}}} \gamma_5, \quad (2-122)$$

$$i\Gamma_{3A} = i \left[\gamma^\mu + \frac{(k'_1 - k_2)^\mu}{D_{3, \text{con}}} \right] \gamma_5. \quad (2-123)$$

图 2-1 形状因子矩阵元 $\mathcal{B}$ 费曼图


积掉圈动量中的负分量，计算就会由协变计算变成LF的。因此可以利用留数定理积掉 k_1^- 分量，选择 k_1^- 上半平面围道来计算。然后假设 $H_{M',M''}$ 在围道内解析，选取积分在 $k_2^2 = \hat{k}_2^2 = m^2$ 处产生的留数，这也就意味这个留数所对应的旁观者反夸克在壳。在进行计算过程中，我们会用到下面的替换：

$$N_1 \rightarrow \hat{N}_1 = x (M^2 - M_0^2). \quad (2-124)$$

$$\chi_M \equiv H_M/N \rightarrow h_M/\hat{N}, \quad D_{\text{con}} \rightarrow D_{\text{LF}}, \quad (\text{type-I}) \quad (2-125)$$

光前形式下，介子的顶角函数为：

$$h_P/\hat{N} = h_V/\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{2N_c}} \sqrt{\frac{\bar{x}}{x}} \frac{\psi_s}{\hat{M}_0}, \quad (2-126)$$

$$h_S/\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{2N_c}} \sqrt{\frac{\bar{x}}{x}} \frac{\hat{M}_0^2}{2\sqrt{3}M_0} \frac{\psi_p}{\hat{M}_0}, \quad (2-127)$$

$$h_{1A}/\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{2N_c}} \sqrt{\frac{\bar{x}}{x}} \frac{\psi_p}{\hat{M}_0}, \quad (2-128)$$

$$h_{3A}/\hat{N} = \frac{1}{\sqrt{2N_c}} \sqrt{\frac{\bar{x}}{x}} \frac{\hat{M}_0^2}{2\sqrt{2}M_0} \frac{\psi_p}{\hat{M}_0}. \quad (2-129)$$

(2-125)式显示了协变BS方法和LF方法之间的对应关系，称为“type-I”方案。在这个方案中，通过匹配SLF和CLF的表达式， χ 与 ψ 之间的对应关系可以通过借助一些和零模贡献无关的量来确定，比如 f_P 和 $f_+^{P \rightarrow P}(q^2)$ ^[22, 51]，但是对于存在 D 因子的顶角算符来说，顶角算符中的 $D_{\text{con}} \rightarrow D_{\text{LF}}$ 之间的对应关系就没有办法确定^[47]。为了解决这个问题，大家提出了一种适用性更强的方案：

$$\chi_M = H_M/N \rightarrow h_M/\hat{N}, \quad M \rightarrow M_0, \quad (\text{type-II}) \quad (2-130)$$

这个方案是由Choi和Ji等人了解决矢量介子和轴矢量介子衰变常数的结果的自洽性问题而提出的^[47, 52]，在本文中的计算中，我们的结果就是type-II方案下计算得到的。

在积分掉 k_1^- 分量后，矩阵元就可以化简到光前形式

$$\hat{\mathcal{B}} = N_c \int \frac{dx d^2 \mathbf{k}_\perp}{2(2\pi)^3} \frac{h_{M'} h_{M''}}{\bar{x} \hat{N}'_1 \hat{N}''_1} \hat{S}_{\mathcal{B}}. \quad (2-131)$$

下面我们给出在进行矩阵元 $\mathcal{B}$ 的计算时可能会用到的替换：

$$\hat{k}_1'^\mu \rightarrow P^\mu A_1^{(1)} + q^\mu A_2^{(1)}, \quad (2-132)$$

$$\begin{aligned} \hat{k}_1'^\mu \hat{k}_1'^\nu &\rightarrow g^{\mu\nu} A_1^{(2)} + P^\mu P^\nu A_2^{(2)} + (P^\mu q^\nu + q^\mu P^\nu) A_3^{(2)} + q^\mu q^\nu A_4^{(2)} \\ &+ \frac{P^\mu \omega^\nu + \omega^\mu P^\nu}{\omega \cdot P} B_1^{(2)}, \end{aligned} \quad (2-133)$$

$$\begin{aligned} \hat{k}_1'^\mu \hat{k}_1'^\nu \hat{k}_1'^\alpha &\rightarrow (g^{\mu\nu} P^\alpha + g^{\mu\alpha} P^\nu + g^{\nu\alpha} P^\mu) A_1^{(3)} + (g^{\mu\nu} q^\alpha + g^{\mu\alpha} q^\nu + g^{\nu\alpha} q^\mu) A_2^{(3)} \\ &+ P^\mu P^\nu P^\alpha A_3^{(3)} + (P^\mu P^\nu q^\alpha + P^\mu q^\nu P^\alpha + q^\mu P^\nu P^\alpha) A_4^{(3)} \\ &+ (q^\mu q^\nu P^\alpha + q^\mu P^\nu q^\alpha + P^\mu q^\nu q^\alpha) A_5^{(3)} + q_\mu q_\nu q_\alpha A_6^{(3)} \\ &+ \frac{1}{\omega \cdot P} (P^\mu P^\nu \omega^\alpha + P^\mu \omega^\nu P^\alpha + \omega^\mu P^\nu P^\alpha) B_1^{(3)} \\ &+ \frac{1}{\omega \cdot P} [(P^\mu q^\nu + q^\mu P^\nu) \omega^\alpha + (P^\mu q^\alpha + q^\mu P^\alpha) \omega^\nu + (P^\alpha q^\nu + q^\alpha P^\nu) \omega^\mu] B_2^{(3)} \end{aligned} \quad (2-134)$$

$$k_1'^\mu \hat{N}_2 \rightarrow q^\mu \left(A_2^{(1)} Z_2 + \frac{q \cdot P}{q^2} A_1^{(2)} \right), \quad (2-135)$$

$$\hat{k}_1'^\mu \hat{k}_1'^\nu \hat{N}_2 \rightarrow g^{\mu\nu} A_1^{(2)} Z_2 + q^\mu q^\nu \left(A_4^{(2)} Z_2 + 2 \frac{q \cdot P}{q^2} A_2^{(1)} A_1^{(2)} \right) + \frac{P^\mu \omega^\nu + \omega^\mu P^\nu}{\omega \cdot P} B_3^{(3)}, \quad (2-136)$$

$$\begin{aligned} \hat{k}_1'^\mu \hat{k}_1'^\nu \hat{k}_1'^\alpha \hat{N}_2 &\rightarrow (g^{\mu\nu} q^\alpha + g^{\mu\alpha} q^\nu + g^{\nu\alpha} q^\mu) \left(A_2^{(3)} Z_2 + \frac{q \cdot P}{q^2} A_1^{(4)} \right) \\ &+ q^\mu q^\nu q^\alpha \left(A_6^{(3)} Z_2 + 3 \frac{q \cdot P}{q^2} A_4^{(4)} \right) + \frac{1}{\omega \cdot P} \left[(P^\mu q^\nu + q^\mu P^\nu) \omega^\alpha \right. \\ &\left. + (P^\mu q^\alpha + q^\mu P^\alpha) \omega^\nu + (P^\alpha q^\nu + q^\alpha P^\nu) \omega^\mu \right] B_5^{(4)} \end{aligned} \quad (2-137)$$

A 函数和 B 函数的具体表达式为：

$$A_1^{(1)} = \frac{x}{2}, \quad A_2^{(1)} = \frac{x}{2} - \frac{\mathbf{k}'_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp}{q^2}; \quad (2-138)$$

$$A_1^{(2)} = -\mathbf{k}'_\perp{}^2 - \frac{(\mathbf{k}'_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp)^2}{q^2}, \quad A_2^{(2)} = (A_1^{(1)})^2, \quad A_3^{(2)} = A_1^{(1)} A_2^{(1)}, \quad A_4^{(2)} = (A_2^{(1)})^2 - \frac{1}{q^2} A_1^{(2)}; \quad (2-139)$$

$$\begin{aligned} A_1^{(3)} &= A_1^{(1)} A_1^{(2)}, \quad A_2^{(3)} = A_2^{(1)} A_1^{(2)}, \quad A_3^{(3)} = A_1^{(1)} A_2^{(2)}, \quad A_4^{(3)} = A_2^{(1)} A_2^{(2)}, \\ A_5^{(3)} &= A_1^{(1)} A_4^{(2)}, \quad A_6^{(3)} = A_2^{(1)} A_4^{(2)} - \frac{2}{q^2} A_2^{(1)} A_1^{(2)}; \end{aligned} \quad (2-140)$$

$$A_3^{(4)} = A_1^{(1)} A_2^{(3)}; \quad (2-141)$$

$$B_1^{(2)} = \frac{x}{2} Z_2 - A_1^{(2)}; \quad (2-142)$$

$$B_2^{(3)} = \frac{x}{2} Z_2 A_2^{(1)} + A_1^{(1)} A_1^{(2)} \frac{P \cdot q}{q^2} - A_2^{(1)} A_1^{(2)},$$

$$B_3^{(3)} = B_1^{(2)} Z_2 + \left(P^2 - \frac{(q \cdot P)^2}{q^2} \right) A_1^{(1)} A_1^{(2)}; \quad (2-143)$$

$$B_1^{(4)} = \frac{x}{2} Z_2 A_1^{(2)} - A_1^{(4)}, \quad B_5^{(4)} = B_2^{(3)} Z_2 + \frac{q \cdot P}{q^2} B_1^{(4)} + \left[P^2 - \frac{(q \cdot P)^2}{q^2} \right] A_3^{(4)}; \quad (2-144)$$

$$Z_2 = \hat{N}_1' + m_1'^2 - m_2^2 + (\bar{x} - x) M'^2 + (q^2 + q \cdot P) \frac{\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{q^2}. \quad (2-145)$$

由于与 C 函数相关的 ω 项是非物理贡献，可以与零模贡献抵消^[22]，因此我们在这里没有给出 C 函数的表达。

2.4 QCD因子化

上一节详细介绍了研究B介子两体非轻衰变时所需要非微扰输入参数的计算方法。本节将从低能有效理论出发，介绍研究B介子两体非轻衰变时用到的方法，QCD因子化。

2.4.1 低能有效理论

强子的弱衰变是一个非常复杂的多标度的过程，这个过程涉及到和 $W^{\pm}, Z^0$ 交换相关的弱相互作用、和胶子交换相关的强相互作用以及电磁相互作用。我们以B介子的弱衰变为例进行具体分析，这个过程涉及三个基本能标，分别为：弱相互作用能标 M_W 在 $\mathcal{O}(100\text{GeV})$ 附近、 b 夸克质量能标 m_b 为 $\mathcal{O}(m_b)$ ，QCD能标 Λ_{QCD} 在 $\mathcal{O}(1\text{GeV})$ 附近，这三个能标之间相差很大。在B介子弱衰变的过程中，重的场（如 W 场）并不会出现在介子弱衰变的初末态，并且弱相互作用的能标 $\mathcal{O}(100\text{GeV})$ 远大于 b 夸克的质量能标，为了方便计算而且基本上不影响计算结果，大家想办法积掉了这些重场，并发展了一套相对于重场能标而言，能标比较低的有效理论（低能有效理论）来研究B 介子的衰变。

通过算符乘积展开可以得到B介子弱衰变的低能有效哈密顿量：

$$\mathcal{H}_{eff} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i V_{CKM}^i C_i(\mu) \langle O_i(\mu) \rangle \quad (2-146)$$

其中， G_F 为费米耦合常数； V_{CKM}^i 是CKM矩阵元； $\langle O_i \rangle$ 是定域算符； C_i 是威尔逊系数。可以根据标度 μ 将振幅分为两部分，以B介子衰变为例，标度 $\mu = m_b$ ，能标大于 m_b 的属于短程贡献，可以吸收到威尔逊系数当中；能标小于 m_b 的属于长程贡献，被留在和定域算符相关的矩阵元中。

在低能有效理论中，B介子两体非轻衰变的振幅形式为：

$$\mathcal{A}(B \rightarrow M_1 M_2) = \langle M_1 M_2 | \mathcal{H}_{eff} | B \rangle = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i V_{CKM}^i C(i)(\mu) \langle M_1 M_2 | O_i(\mu) | B \rangle \quad (2-147)$$

M_1 和 M_2 为末态强子，在这里，最重要的工作就是计算处理矩阵元 $\langle M_1 M_2 | O_i(\mu) | B \rangle$ ，处理强子矩阵元的方法很多，本文采用的是QCD因子化方法。

2.4.2 QCD因子化方法

QCD因子化方法是Beneke等人基于简单因子化方法发展而来的^[1, 2, 53]。QCD因子化方法认为 $B \rightarrow M_1$ 的跃迁形状因子以非微扰贡献为主，矩阵元的非因子化效应以硬胶子交换为主，可以利用微扰论处理这部分贡献。在研究B介子非轻弱衰变时，这种方法可以将复杂的强子矩阵元简化为不可微扰计算的非微扰量和可以微扰计算的硬散射核，如下图所示，

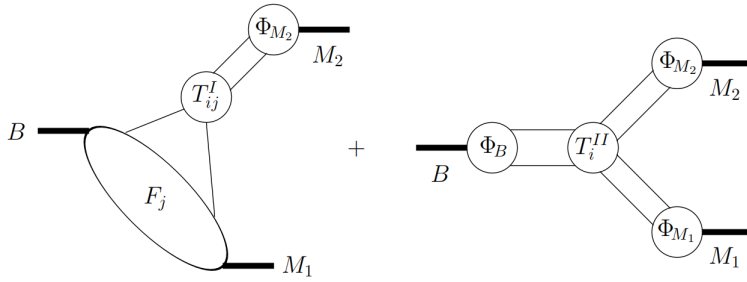


图 2-2 QCD因子化方案下 $B \rightarrow M_1 M_2$ 衰变的强子矩阵元的图像表示

在QCD因子化框架下，当末态强子均为轻介子的情况时，强子矩阵元可以写成以下形式：

$$\begin{aligned} \langle M_1 M_2 | Q_i | B \rangle = & \sum_j F_j^{B \rightarrow M_1} \int_0^1 dx T_{ij}^I(x) \Phi_{M_2}(x) + (M_1 \leftrightarrow M_2) \\ & + \int_0^1 d\xi \int_0^1 dx \int_0^1 dy T_i^{II}(\xi, x, y) \Phi_B(\xi) \Phi_{M_1}(x) \Phi_{M_2}(y) \end{aligned} \quad (2-148)$$

其中， $F_j^{B \rightarrow M_1}$ 为跃迁形状因子； $T_{ij}^{I,II}$ 是可以进行微扰计算的硬散射核； Φ_M 是领头阶的光锥分布振幅。跃迁形状因子和光锥分布振幅都是非微扰输入参数，可以用非微扰的方法进行计算。

本文就是采用QCD因子化方法，对 $B \rightarrow SS$ 衰变进行唯象研究，对于该过程的详细计算在本文第四章给出。

第三章 $P \rightarrow (P, S, A)$ 跃迁形状因子的研究

在第二章，我们详细介绍了SLF夸克模型和CLF夸克模型。在本章，我们将在这两种模型下计算 $P \rightarrow (P, S, A)$ 跃迁形状因子的理论结果，并在type-II方案下给出这些过程的数值结果。

3.1 研究动机

介子跃迁形状因子和衰变常数是研究介子和重子弱衰变的两个重要的非微扰输入参数，研究形状因子和衰变常数的方法有很多，我们采用的是具有相对论性的光前夸克模型。这个模型有很多优点，它的波函数是洛伦兹不变的，而且强子的自旋也可以通过Melosh变换构建，因此我们在本文中是用这个模型来研究形状因子的。

在之前的工作中，人们已经在SLF和CLF夸克模型下计算了 $P \rightarrow P$ 弱衰变过程形状因子的理论结果^[52]，并且还给出了 $P \rightarrow V$ ^[54], $V' \rightarrow V'$ ^[55], $P \rightarrow T$ ^[56] 弱衰变过程形状因子的理论结果和数值结果，以及 $P \rightarrow (P, S, A, T)$ ^[57]过程的张量形状因子的理论结果和数值结果。在本文，我们分别采用了SLF和CLF的方法计算了 $P \rightarrow (S, A)$ 弱衰变过程中形状因子的理论结果，并且在type-II方案下给出了 $P \rightarrow (P, S, A)$ 跃迁过程形状因子的数值结果。

3.2 $P \rightarrow P$ 和 $P \rightarrow S$ 跃迁形状因子的结果及讨论

$P \rightarrow P$ 跃迁形状因子的定义：

$$\langle P''(p'') | \bar{q}_1' \gamma_\mu q_1' | P'(p') \rangle = f_+(q^2) P^\mu + f_-(q^2) q_\mu \quad (3-1)$$

$P \rightarrow S$ 跃迁形状因子的定义：

$$\langle S''(p'') | \bar{q}_1' \gamma_\mu \gamma_5 q_1' | P'(p') \rangle = -(u_+(q^2) P^\mu + u_-(q^2) q_\mu) \quad (3-2)$$

其中 $P^\mu = p'^\mu + p''^\mu$, $q^\mu = p'^\mu - p''^\mu$, p'^μ 和 p''^μ 分别表示初末态介子的动量。这个定义与BSW方法定义的形状因子之间的关系为：

$$F_1(q^2) = f_+(q^2), \quad F_0(q^2) = f_+(q^2) + \frac{q^2}{q \cdot P} f_-(q^2) \quad (3-3)$$

$$U_1(q^2) = u_+(q^2), \quad U_0(q^2) = u_+(q^2) + \frac{q^2}{q \cdot P} u_-(q^2) \quad (3-4)$$

在 $q^+ = 0$ 的框架下, 将(3-1)式和(3-2)式的左右两边分别点乘 ω_μ 和 q_μ , 可以得到:

$$f_+(q^2) = \frac{\mathcal{B}^+}{P^+}, \quad f_-(q^2) = \frac{q \cdot \mathcal{B} - (q \cdot P)f_+(q^2)}{q^2} \quad (3-5)$$

$$u_+(q^2) = -\frac{\mathcal{B}^+}{P^+}, \quad u_-(q^2) = -\frac{q \cdot \mathcal{B} - (q \cdot P)f_+(q^2)}{q^2} \quad (3-6)$$

其中, $\mathcal{B}^\mu$ 是(3-1)式等号左边的矩阵元。

在用光前夸克模型计算形状因子的时候, 最主要的工作就是计算强子矩阵元:

$$\mathcal{B} \equiv \langle M''(p'') | \bar{q}_1'' \gamma_\mu q_1' | P'(p') \rangle, \quad \Gamma = \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5 \quad (3-7)$$

计算完强子矩阵元之后就可以和形状因子的定义进行匹配, 从而抽取形状因子。

3.2.1 SLF夸克模型下的理论结果

对于 $P \rightarrow (P, S)$ 的衰变, 我们采用的是Drell-Yan-West框架: $q^+ = 0$, $q \equiv p' - p'' = k_1' - k_1''$ 。为了方便计算, 采用坐标系为: $\mathbf{p}_\perp = 0$ 。在Drell-Yan-West的框架下, 夸克动量为:

$$\tilde{k}_1' = (xp'^+, \mathbf{k}_\perp'), \quad \tilde{k}_1'' = (xp'^+, x\mathbf{p}_\perp'' + \mathbf{k}_\perp''), \quad \tilde{k}_2 = (\bar{p}^+, -\mathbf{k}_\perp') = (\bar{x}p'^+, \bar{x}\mathbf{p}_\perp'' - \mathbf{k}_\perp'') \quad (3-8)$$

在这里, $\mathbf{p}_\perp'' = -\mathbf{q}_\perp$, $\mathbf{k}_\perp'' = \mathbf{k}_\perp' - \bar{x}\mathbf{q}_\perp$

我们将2.3.1中的公式代入到(3-7)式化简可以得到:

$$\mathcal{B}_{\text{SLF}} = \sum_{h_1', h_1'', h_2} \int \frac{dx d^2 \mathbf{k}_\perp'}{(2\pi)^3 2x} \psi''^*(x, \mathbf{k}_\perp'') \psi'(x, \mathbf{k}_\perp') S_{h_1'', h_2}^{\prime\prime\prime\dagger}(x, \mathbf{k}_\perp'') C_{h_1'', h_1'}(x, \mathbf{k}_\perp', \mathbf{k}_\perp'') S_{h_1', h_2}'(x, \mathbf{k}_\perp'), \quad (3-9)$$

利用上面的公式, 我们可以计算出 $P \rightarrow P$ 和 $P \rightarrow S$ 衰变过程中的 $\mathcal{B}_{\text{SLF}}^\mu$, 之后将矩阵元与形状因子定义进行匹配, 抽取形状因子: (i)、首先取 $\mu = +$, 抽取 f_+ 和 u_+ ; (ii)、取 $\mu = \perp$ 抽取 f_- 和 u_- 。

在SLF夸克模型中, $P \rightarrow M$ 过程 (M 表示 P, S, A) 的形状因子的表达式可以写成这种形式:

$$[\mathcal{F}(q^2)]_{\text{SLF}} = \int \frac{dx d^2 \mathbf{k}_\perp'}{(2\pi)^3 2x} \frac{\psi''^*(x, \mathbf{k}_\perp'') \psi'(x, \mathbf{k}_\perp')}{2\hat{M}_0' \hat{M}_0''} \tilde{\mathcal{F}}^{\text{SLF}}(x, \mathbf{k}_\perp', q^2), \quad (3-10)$$

$\tilde{\mathcal{F}}$ 表示 $f_\pm$ 和 $u_\pm$, 其表达式为:

$$\tilde{f}_+^{\text{SLF}}(q^2) = \frac{2}{x} [\mathbf{k}_\perp' \cdot \mathbf{k}_\perp'' + (\bar{x}m_1' + xm_2)(\bar{x}m_1'' + xm_2)] \quad (3-11)$$

$$\tilde{f}_-^{\text{SLF}}(q^2) = \tilde{f}_+^{\text{SLF}}(q^2) + 2 \left\{ \frac{\mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp'}{q_\perp^2} [(m_1' - m_1'')^2 + \hat{M}_0'^2 + \hat{M}_0''^2] + \mathbf{q}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp' - \hat{M}_0'^2 \right\} \quad (3-12)$$

$$\tilde{u}_\pm^{\text{SLF}}(q^2) = \frac{\hat{M}_0''^2}{2\sqrt{3}\hat{M}_0''} \tilde{f}_\pm^{\text{SLF}}(q^2) [m_1'' \rightarrow -m_1''] \quad (3-13)$$

3.2.2 CLF夸克模型下的理论结果

在CLF QM中, 我们可以根据图 2-1 计算出矩阵元, 然后根据 2.3.2 所给的公式计算出 $P \rightarrow P, S$ 衰变过程的 $\mathcal{B}_{\text{full}}^\mu$, 然后把 $\mathcal{B}_{\text{full}}^\mu$ 与形状因子定义 (3-1) 式进行匹配, 就可以得到:

$$[\mathcal{F}(q^2)]_{\text{full}} = N_c \int \frac{dx d^2 \mathbf{k}'_\perp}{2(2\pi)^3} \frac{\chi'_P \chi''_P}{\bar{x}} \tilde{\mathcal{F}}^{\text{full}}(x, \mathbf{k}'_\perp, q^2) \quad (3-14)$$

$\tilde{\mathcal{F}}$ 表示 $f_\pm$ 和 $u_\pm$, 其表达式为:

$$\tilde{f}_+^{\text{full}}(q^2) = xM_0'^2 + xM_0''^2 + \bar{x}q^2 - x(m'_1 - m_2)^2 - x(m''_1 - m_2)^2 - \bar{x}(m'_1 - m''_1)^2 \quad (3-15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_-^{\text{full}}(q^2) = & -2x\bar{x}M'^2 - 2\mathbf{k}'_\perp{}^2 - 2m'_1 m_2 + 2(m''_1 - m_2)(\bar{x}m'_1 + xm_2) \\ & - 2\frac{\mathbf{k}'_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp}{q^2} [(x - \bar{x})M'^2 + M''^2 - \bar{x}(q^2 + q \cdot P) + 2xM_0'^2 \\ & - 2(m'_1 + m''_1)(m'_1 - m_2)] + 4\frac{P \cdot q}{q^2} \left[\mathbf{k}'_\perp{}^2 + 2\frac{(\mathbf{k}'_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp)^2}{q^2} \right] + 4\frac{(\mathbf{k}'_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp)^2}{q^2} \end{aligned} \quad (3-16)$$

$$\tilde{u}_\pm^{\text{full}}(q^2) = \frac{\hat{M}_0''^2}{2\sqrt{3}M_0''} \tilde{f}_\pm^{\text{full}}(q^2)[m''_1 \rightarrow -m''_1] \quad (3-17)$$

除此之外, 我们还计算了 valence 的贡献, 完整的结果是 valence 部分的贡献和 zero-mode 的贡献之和, 结果如下:

$$\tilde{f}_+^{\text{val.}}(q^2) = \tilde{f}_+^{\text{full}}(q^2) \quad (3-18)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_-^{\text{val.}}(q^2) = & \tilde{f}_-^{\text{val.}}(q^2) + [-2\bar{x}M'^2 - 2xM_0'^2 + 2(m'_1 - m_2)^2] \\ & - 2\frac{\mathbf{k}'_\perp{}^2 \cdot \mathbf{q}_\perp}{q^2} [M'^2 + M''^2 - q^2 + 2(m'_1 - m_2)(m_2 - m''_1)] \end{aligned} \quad (3-19)$$

$$\tilde{u}_+^{\text{val.}}(q^2) = \tilde{u}_+^{\text{full}}(q^2) \quad (3-20)$$

$$\tilde{u}_-^{\text{val.}}(q^2) = \frac{\hat{M}_0''^2}{2\sqrt{3}M_0''} \tilde{f}_-^{\text{val.}}(q^2)[m''_1 \rightarrow -m''_1] \quad (3-21)$$

通过上面的理论公式, 我们发现形状因子 $f_+(q^2)$ 和 $u_+(q^2)$, 该物理量并不涉及 zero-mode 的贡献, 而对于形状因子 $f_-(q^2)$ 和 $u_-(q^2)$, 这两个物理量是和 zero-mode 相关的。在之前的工作中, 我们已经分析了和 zero-mode 贡献相关的内容, 因此在本篇文章中, 我们就不对这部分内容进行过多解释。有了上述的理论结果, 接下来我们就可以对 $P \rightarrow P, S$ 过程的形状因子进行数值分析。

3.2.3 数值结果及其分析

根据 3.1.1 和 3.1.2 给出的理论结果, 我们可以对 $P \rightarrow (P, S)$ 的跃迁过程进行比较详细的数值分析。在计算形状因子数值结果时, 夸克的质量 m 和高斯参数 β 都是非常重要的

输入参数，夸克质量取值如下^[55]:

$$\begin{aligned} m_q &= 230 \pm 40 \text{ MeV}, \quad m_s = 430 \pm 60 \text{ MeV}, \\ m_c &= 1600 \pm 300 \text{ MeV}, \quad m_b = 4900 \pm 400 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (3-22)$$

对于高斯参数 β 来说，不同的介子的高斯参数可以通过对这个介子的衰变常数的实验值进行拟合得到：我们使用在之前工作中收集到的赝标介子和矢量介子的衰变常数以及(3-22)中给出的夸克的质量，就可以拟合出高斯参数。由于没有关于标量介子和轴矢量介子衰变常数的实验数据，因此在对形状因子进行数值计算的时候，我们认为标量介子和赝标量介子的高斯参数相同，轴矢量介子和矢量介子的高斯参数相同，这样做的原因是因为标量介子和赝标量介子的自旋相同，都是0，轴矢量介子和矢量介子的自旋都为1。

表 3-1 高斯参数 β 值(单位: MeV), 其中 $q = u, d$ 。

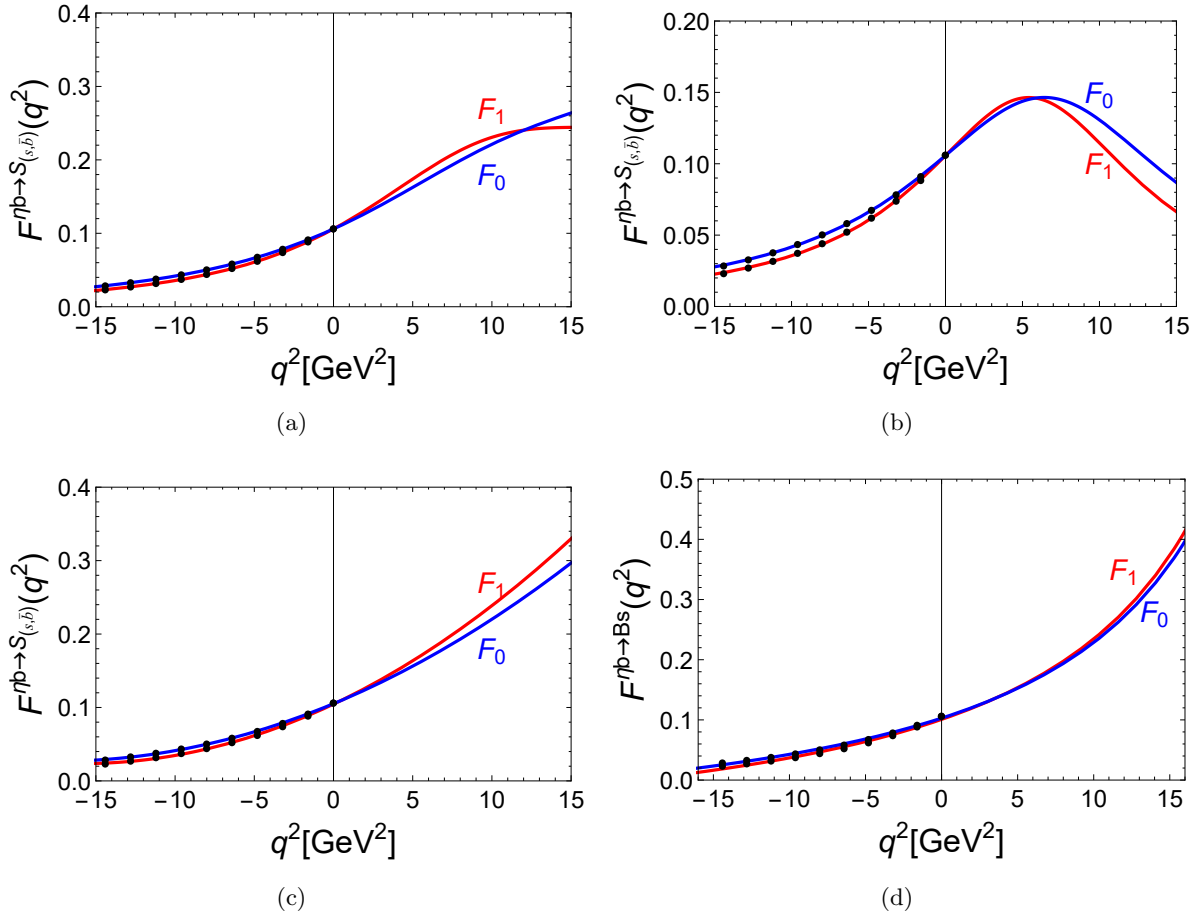
	$\beta_{q\bar{q}}$	$\beta_{s\bar{q}}$	$\beta_{s\bar{s}}$	$\beta_{c\bar{q}}$	$\beta_{c\bar{s}}$
P(S)	348 ± 1	365 ± 2	384 ± 3	473 ± 12	543 ± 10
V(A)	312 ± 6	313 ± 10	348 ± 6	429 ± 13	530 ± 19
	$\beta_{c\bar{c}}$	$\beta_{b\bar{q}}$	$\beta_{b\bar{s}}$	$\beta_{b\bar{c}}$	$\beta_{b\bar{b}}$
P(S)	753 ± 14	552 ± 10	606 ± 12	939 ± 11	1382.4 ± 50.0
V(A)	703 ± 7	516 ± 15	568 ± 10	876 ± 20	1390 ± 12

由于我们用CLF夸克模型计算得到的形状因子的数值结果是在 $q^+ = 0$ 的框架下进行的，因此我们只能得到类空动量转移空间中的形状因子，也就是 $q^2 = -q^2 \leq 0$ 的区域的形状因子。然而值得注意的是只有类时空间的形状因子与具体的物理衰变过程有关，因此我们需要得到类时空间中的形状因子。

研究表明，在特定的模型下，直接从类时空间 $q^+ > 0$ 区域得到的形状因子与从类空区域经过解析延拓而得到的类时空间的形状因子是相同的^[58]。因此我们可以通过一些参数化方法对类空区域得到的形状因子进行延拓，从而得到类时空间的形状因子。我们尝试了多种参数化方法对类空区域的形状因子进行延拓，最后我们选择了BCL方法。

下面我们就以 $\eta_b \rightarrow B_s$ 过程的形状因子为例，介绍一下我们选择这个参数化方法的原因。首先，我们选择了以下方法进行参数化^[59]:

$$\mathcal{F}(q^2) = \frac{\mathcal{F}(0)}{(1 - q^2/M_{B,D}^2)[1 - a(q^2/M_{B,D}^2) + b(q^2/M_{B,D}^2)^2]} \quad (3-23)$$


 图 3-1 不同拟合方法下 $\eta_b \rightarrow B_s$ 对 q^2 的依赖性

如图3-1(a)，式中 $M_{B,D}$ 指B介子和D介子的质量，这个方法对于我们计算的大部分的形状因子都是适用的，但是对于某些特定的过程：即旁观者夸克比较重的过程，如 $\eta_b \rightarrow B_s$ 过程的形状因子是不适用的，这是因为拟合系数 b 对 q^2 的值很敏感造成的，因此当旁观者夸克较重时，用这种方法拟合得到的形状因子并不是非常准确。

之后我们又根据选择了(3-23)式的改进方法，在这个方法中有三个参数 $\mathcal{F}_0$ 、 a 、 b ^[60]：

$$\mathcal{F}(q^2) = \frac{\mathcal{F}_0}{1 - a(q^2/M_{B,D}^2) + b(q^2/M_{B,D}^2)^2} \quad (3-24)$$

在使用这种方法进行拟合的时候，我们发现对于旁观者夸克比较重的衰变过程， b 的拟合值比较大，与我们用CLF夸克模型计算出来的结果也不一致。

接着我们又采用了另一种方法进行参数化^[61]：

$$\mathcal{F}(q^2) = \mathcal{F}(0)[1 - a(q^2/M_{B,D}^2) + b(q^2/M_{B,D}^2)^2] \quad (3-25)$$

虽然用这种方法拟合出来的结果符合预期，拟合结果如图 3-1(c)所示，但是由于这个方

法并没有物理意义，因此我们最后也没有选择该方法。

最后我们采用了通过级数展开的BCL方法^[62, 63]，用这个方法拟合出来的结果如图 3-1(d)所示，

$$\mathcal{F}(q^2) = \frac{\mathcal{F}(0)}{1 - q^2/m_{i,pole}^2} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^N b_k [z(q^2, t_0)^k - z(0, t_0)^k] \right\} \quad (3-26)$$

$$z(q^2, t_0) = \frac{\sqrt{t_+ - q^2} - \sqrt{t_+ - t_0}}{\sqrt{t_+ - q^2} + \sqrt{t_+ - t_0}}, \quad t_{\pm} = (M' \pm M'')^2, \quad t_0 = (M' + M'')(\sqrt{M'} - \sqrt{M''})$$

式中的 M' 为初态介子质量， M'' 为末态介子质量。

在后面的计算当中，我们采用均是这种拟合方法。通过上面的结果对比，我们发现，形状因子的拟合结果具有模型依赖性，当我们采用的参数化方法不同时，所得到的结果也是不一样的。接下来我们将给出 $P \rightarrow P, S$ 跃迁过程形状因子的数值结果，误差来源于夸克质量和高斯参数 β 。

根据(3-26)所给出的拟合公式，我们在表 3-2中给出了由 $c \rightarrow (q, s) (q = u, d)$ 引起的 $D \rightarrow (\pi, K)$, $D_s \rightarrow (K, \eta_s)$, $\eta_c \rightarrow (D, D_s)$, $B_c \rightarrow (B, B_s)$ 和由 $b \rightarrow (q, s, c)$ 引起

表 3-2 $D \rightarrow (\pi, K)$, $D_s \rightarrow (K, \eta_s)$, $\eta_c \rightarrow (D, D_s)$, $B_c \rightarrow (B, B_s)$, $B \rightarrow (\pi, K, D)$, $B_s \rightarrow (K, \eta_s, D_s)$, $B_c \rightarrow (D, D_s, \eta_c)$, $\eta_b \rightarrow (B, B_s, B_c)$ 过程形状因子的拟合结果。

	$F(0)$	b_1		$F(0)$	b_1
$F_1^{D \rightarrow \pi}$	$0.65^{+0.08}_{-0.08}$	$-3.40^{+0.57}_{-0.47}$	$F_1^{D_s \rightarrow K}$	$0.63^{+0.09}_{-0.09}$	$-5.10^{+0.72}_{-0.60}$
$F_0^{D \rightarrow \pi}$	$0.65^{+0.08}_{-0.08}$	$-0.08^{+0.61}_{-0.40}$	$F_0^{D_s \rightarrow K}$	$0.63^{+0.09}_{-0.09}$	$-0.64^{+1.00}_{-0.62}$
$F_1^{\eta_c \rightarrow D}$	$0.60^{+0.11}_{-0.11}$	$-9.90^{+2.00}_{-1.50}$	$F_1^{B_c \rightarrow B}$	$0.56^{+0.10}_{-0.10}$	$-86.00^{+19.00}_{-14.00}$
$F_0^{\eta_c \rightarrow D}$	$0.60^{+0.11}_{-0.11}$	$17.00^{+8.10}_{-9.30}$	$F_0^{B_c \rightarrow B}$	$0.56^{+0.10}_{-0.10}$	$85.00^{+63.00}_{-57.00}$
$F_1^{D \rightarrow K}$	$0.75^{+0.09}_{-0.09}$	$-0.93^{+0.94}_{-0.78}$	$F_1^{D_s \rightarrow \eta_s}$	$0.73^{+0.09}_{-0.10}$	$-1.40^{+0.86}_{-0.73}$
$F_0^{D \rightarrow K}$	$0.75^{+0.09}_{-0.09}$	$4.50^{+0.76}_{-0.81}$	$F_0^{D_s \rightarrow \eta_s}$	$0.73^{+0.09}_{-0.10}$	$4.60^{+1.80}_{-1.20}$
$F_1^{\eta_c \rightarrow D_s}$	$0.73^{+0.11}_{-0.11}$	$-8.10^{+1.70}_{-1.50}$	$F_1^{B_c \rightarrow B_s}$	$0.66^{+0.10}_{-0.10}$	$-80.00^{+26.00}_{-23.00}$
$F_0^{\eta_c \rightarrow D_s}$	$0.73^{+0.11}_{-0.11}$	$26.00^{+5.00}_{-5.50}$	$F_0^{B_c \rightarrow B_s}$	$0.66^{+0.10}_{-0.10}$	$125.00^{+32.00}_{-33.00}$
$F_1^{B \rightarrow \pi}$	$0.27^{+0.04}_{-0.04}$	$-2.30^{+0.33}_{-0.27}$	$F_1^{B_s \rightarrow K}$	$0.23^{+0.05}_{-0.05}$	$-3.60^{+0.11}_{-0.06}$
$F_0^{B \rightarrow \pi}$	$0.27^{+0.04}_{-0.04}$	$1.30^{+0.04}_{-0.02}$	$F_0^{B_s \rightarrow K}$	$0.23^{+0.05}_{-0.05}$	$-0.41^{+0.24}_{-0.27}$
$F_1^{B_c \rightarrow D}$	$0.14^{+0.06}_{-0.06}$	$-11.00^{+1.00}_{-0.97}$	$F_1^{\eta_b \rightarrow B}$	$0.07^{+0.03}_{-0.02}$	$-47.00^{+0.52}_{-0.57}$
$F_0^{B_c \rightarrow D}$	$0.14^{+0.06}_{-0.06}$	$-7.70^{+1.80}_{-1.60}$	$F_0^{\eta_b \rightarrow B}$	$0.07^{+0.02}_{-0.03}$	$-42.00^{+1.20}_{-1.10}$
$F_1^{B \rightarrow K}$	$0.34^{+0.05}_{-0.05}$	$-2.30^{+0.34}_{-0.28}$	$F_1^{B_s \rightarrow \eta_s}$	$0.29^{+0.02}_{-0.02}$	$-3.50^{+0.86}_{-0.86}$
$F_0^{B \rightarrow K}$	$0.34^{+0.05}_{-0.05}$	$1.20^{+0.08}_{-0.02}$	$F_0^{B_s \rightarrow \eta_s}$	$0.29^{+0.02}_{-0.02}$	$-0.49^{+1.00}_{-0.98}$
$F_1^{B_c \rightarrow D_s}$	$0.21^{+0.09}_{-0.07}$	$-9.90^{+0.93}_{-0.86}$	$F_1^{\eta_b \rightarrow B_s}$	$0.11^{+0.04}_{-0.03}$	$-45.00^{+0.55}_{-0.62}$
$F_0^{B_c \rightarrow D_s}$	$0.21^{+0.09}_{-0.07}$	$-6.30^{+1.70}_{-1.40}$	$F_0^{\eta_b \rightarrow B_s}$	$0.11^{+0.04}_{-0.03}$	$-40.00^{+1.20}_{-1.20}$
$F_1^{B \rightarrow D}$	$0.70^{+0.10}_{-0.11}$	$-2.70^{+0.19}_{-0.12}$	$F_1^{B_s \rightarrow D_s}$	$0.69^{+0.11}_{-0.12}$	$-3.30^{+0.11}_{-0.19}$
$F_0^{B \rightarrow D}$	$0.70^{+0.10}_{-0.11}$	$1.20^{+0.03}_{-0.03}$	$F_0^{B_s \rightarrow D_s}$	$0.69^{+0.11}_{-0.12}$	$0.70^{+0.37}_{-0.37}$
$F_1^{B_c \rightarrow \eta_c}$	$0.59^{+0.16}_{-0.16}$	$-9.40^{+1.70}_{-1.40}$	$F_1^{\eta_b \rightarrow B_c}$	$0.47^{+0.14}_{-0.13}$	$-40.00^{+0.67}_{-0.48}$
$F_0^{B_c \rightarrow \eta_c}$	$0.59^{+0.16}_{-0.16}$	$-4.00^{+2.50}_{-1.80}$	$F_0^{\eta_b \rightarrow B_c}$	$0.47^{+0.14}_{-0.13}$	$-28.00^{+1.00}_{-0.98}$

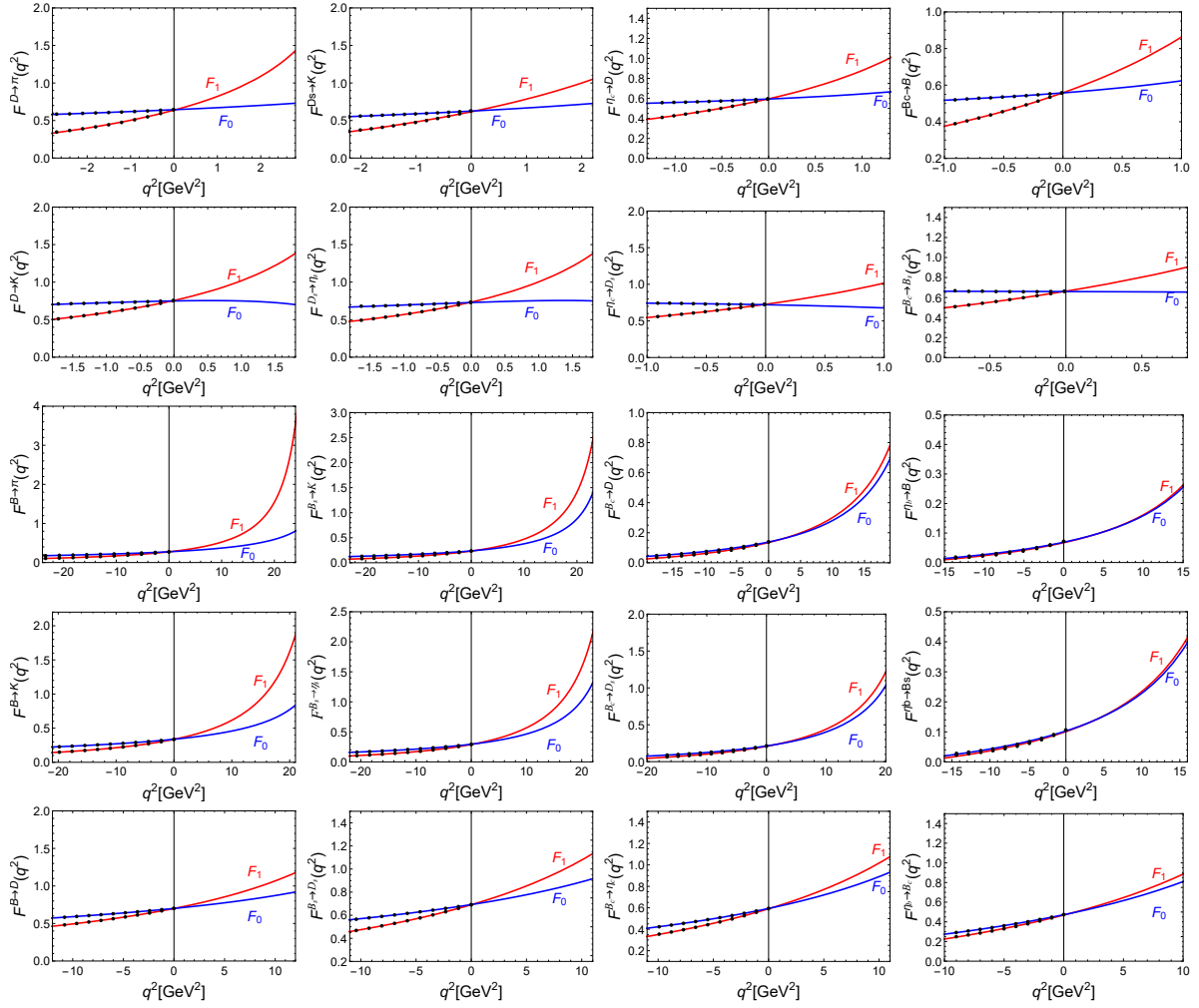


图 3-2 $D \rightarrow (\pi, K)$, $D_s \rightarrow (K, \eta_s)$, $\eta_c \rightarrow (D, D_s)$, $B_c \rightarrow (B, B_s)$, $B \rightarrow (\pi, K, D)$, $B_s \rightarrow (K, \eta_s, D_s)$, $B_c \rightarrow (D, D_s, \eta_c)$, $\eta_b \rightarrow (B, B_s, B_c)$ 过程对 q^2 的依赖图

的 $B \rightarrow (\pi, K, D)$, $B_s \rightarrow (K, \eta_s, D_s)$, $B_c \rightarrow (D, D_s, \eta_c)$, $\eta_b \rightarrow (B, B_s, B_c)$ 跃迁过程的 $\mathcal{F}(0)$ 和 b_1 的数值结果, 并在图 3-2 中给出了这些过程的形状因子 $\mathcal{F}(0)$ 对 q^2 的依赖图。

- 对于由 B 介子和 D 介子衰变到末态为同一个介子过程而言, $B \rightarrow P$ 过程的形状因子比 $D \rightarrow P$ 过程的形状因子要小。
- 对于由 $b \rightarrow c$ 或者 $b \rightarrow q$ 引起的, 旁观者夸克为轻夸克的跃迁过程, 以 $b \rightarrow c$ 的过程为例, 即 $B \rightarrow D$ 和 $B_s \rightarrow D_s$, 这两个过程的形状因子几乎相等, 在这些过程中, 旁观者夸克的味道的改变对形状因子的影响并没有很大, 这是因为旁观者夸克的质量相对于跃迁夸克的质量比较小。当然对于 $c \rightarrow (q, s)$ 引起的跃迁过程也是如此, 即 $F^{D_s \rightarrow \eta_s} \approx F^{D \rightarrow K}$ 。

- 对于末态相同的介子，例如 $B \rightarrow \pi$ 和 $D \rightarrow \pi$ 的过程，初态介子的高斯参数 β 越大，形状因子就越小；对于初态相同的介子，例如 $B \rightarrow \pi$ 和 $B \rightarrow K$ 的过程，末态介子的高斯参数 β 越大，形状因子就越大。但是对于 $B_s \rightarrow P$ 的过程，末态介子的 β 越大，该过程的形状因子也就越大。

对于标量介子来说，尽管一些介子的结构存在争议，但是一些实验的数据已经表明：介子质量低于1GeV的标量介子的结构可以用四夸克态描述，对于质量在1GeV以上的标量介子来说，我们可以把它看成是由两个夸克组成的介子束缚态。因此对于 $q\bar{q}$ 态，我们采用的是 $a_0(1450)$ ，对于 $s\bar{s}$ 态，我们采用的是 $f_0(1500)$ 。

我们在表3-3中给出了由 $c \rightarrow (q, s)(q = u, d)$ 引起的 $D \rightarrow (a_0, K_0^*)$, $D_s \rightarrow (K_0^*, f_0)$, $\eta_c \rightarrow (D_0^*, D_{s0}^*)$ 和由 $b \rightarrow (q, s, c)$ 引起的 $B \rightarrow (a_0, K_0^*, D_0^*)$, $B_s \rightarrow (K_0^*, f_0, D_{s0}^*)$, $B_c \rightarrow (D_0^*, D_{s0}^*, \chi_{c0})$ 跃迁过程的 $\mathcal{F}(0)$ 和 b_1 的数值结果，并且在图 3-3 中给出了这些过程中形状因子 $\mathcal{F}$ 对 q^2 的依赖图。

- 对于由 $c \rightarrow (q, s)(q = u, d)$ 引起的衰变过程，其形状因子的数值均在0.5-0.65左右；而对于由 $b \rightarrow (q, s, c)(q = u, d)$ 引起的衰变过程，除了 $B_c \rightarrow \chi_{c0}$ 过程的形状因子较大之外，其形状因子的数值基本在0.2-0.4附近。

表 3-3 $D \rightarrow (a_0, K_0^*)$, $D_s \rightarrow (K_0^*, f_0)$, $\eta_c \rightarrow (D_0^*, D_{s0}^*)$, $B \rightarrow (a_0, K_0^*, D_0^*)$, $B_s \rightarrow (K_0^*, f_0, D_{s0}^*)$, $B_c \rightarrow (D_0^*, D_{s0}^*, \chi_{c0})$ 过程形状因子的拟合结果。

	$\mathcal{F}(0)$	b_1		$\mathcal{F}(0)$	b_1
$U_1^{D \rightarrow a_0}$	$0.54^{+0.06}_{-0.05}$	$0.02^{+0.48}_{-0.28}$	$U_1^{D_s \rightarrow K_0^*}$	$0.58^{+0.05}_{-0.05}$	$-0.56^{+0.24}_{-0.19}$
$U_0^{D \rightarrow a_0}$	$0.54^{+0.06}_{-0.05}$	$20.00^{+5.10}_{-4.00}$	$U_0^{D_s \rightarrow K_0^*}$	$0.58^{+0.05}_{-0.05}$	$20.00^{+4.70}_{-4.10}$
$U_1^{\eta_c \rightarrow D_0^*}$	$0.64^{+0.05}_{-0.06}$	$-6.40^{+2.40}_{-1.50}$	$U_1^{D \rightarrow K_0^*}$	$0.49^{+0.05}_{-0.05}$	$-0.06^{+0.05}_{-0.04}$
$U_0^{\eta_c \rightarrow D_0^*}$	$0.64^{+0.05}_{-0.06}$	$52.00^{+28.00}_{-21.00}$	$U_0^{D \rightarrow K_0^*}$	$0.49^{+0.05}_{-0.05}$	$26.00^{+6.80}_{-6.80}$
$U_1^{D_s \rightarrow f_0}$	$0.54^{+0.05}_{-0.04}$	$-0.55^{+0.04}_{-0.04}$	$U_1^{\eta_c \rightarrow D_{s0}^*}$	$0.66^{+0.04}_{-0.04}$	$-4.60^{+0.23}_{-0.25}$
$U_0^{D_s \rightarrow f_0}$	$0.54^{+0.05}_{-0.04}$	$29.00^{+8.20}_{-7.40}$	$U_0^{\eta_c \rightarrow D_{s0}^*}$	$0.66^{+0.04}_{-0.04}$	$88.00^{+42.00}_{-33.00}$
$U_1^{B \rightarrow a_0}$	$0.29^{+0.02}_{-0.02}$	$-2.30^{+1.30}_{-1.10}$	$U_1^{B_s \rightarrow K_0^*}$	$0.28^{+0.02}_{-0.02}$	$-3.70^{+0.30}_{-0.23}$
$U_0^{B \rightarrow a_0}$	$0.29^{+0.02}_{-0.02}$	$4.10^{+0.84}_{-0.67}$	$U_0^{B_s \rightarrow K_0^*}$	$0.28^{+0.03}_{-0.03}$	$2.00^{+0.27}_{-0.60}$
$U_1^{B_c \rightarrow D_0^*}$	$0.21^{+0.07}_{-0.06}$	$-8.90^{+1.10}_{-1.00}$	$U_1^{B \rightarrow K_0^*}$	$0.29^{+0.02}_{-0.02}$	$-2.10^{+1.20}_{-1.10}$
$U_0^{B_c \rightarrow D_0^*}$	$0.21^{+0.07}_{-0.06}$	$-4.60^{+2.50}_{-2.00}$	$U_0^{B \rightarrow K_0^*}$	$0.29^{+0.03}_{-0.03}$	$5.00^{+0.76}_{-0.57}$
$U_1^{B_s \rightarrow f_0}$	$0.31^{+0.02}_{-0.03}$	$-3.50^{+0.26}_{-0.20}$	$U_1^{B_c \rightarrow D_{s0}^*}$	$0.29^{+0.07}_{-0.07}$	$-9.70^{+1.20}_{-1.10}$
$U_0^{B_s \rightarrow f_0}$	$0.31^{+0.02}_{-0.03}$	$3.20^{+1.10}_{-0.88}$	$U_0^{B_c \rightarrow D_{s0}^*}$	$0.29^{+0.07}_{-0.07}$	$-2.60^{+0.19}_{-0.15}$
$U_1^{B \rightarrow D_0^*}$	$0.30^{+0.04}_{-0.04}$	$-2.30^{+1.40}_{-1.20}$	$U_1^{B_s \rightarrow D_{s0}^*}$	$0.37^{+0.04}_{-0.04}$	$-2.70^{+1.50}_{-1.40}$
$U_0^{B \rightarrow D_0^*}$	$0.30^{+0.04}_{-0.04}$	$15.00^{+0.75}_{-0.39}$	$U_0^{B_s \rightarrow D_{s0}^*}$	$0.37^{+0.04}_{-0.04}$	$15.00^{+1.30}_{-0.88}$
$U_1^{B_c \rightarrow \chi_{c0}}$	$0.48^{+0.02}_{-0.03}$	$-8.70^{+0.58}_{-0.95}$			
$U_0^{B_c \rightarrow \chi_{c0}}$	$0.48^{+0.02}_{-0.03}$	$17.00^{+0.92}_{-0.35}$			

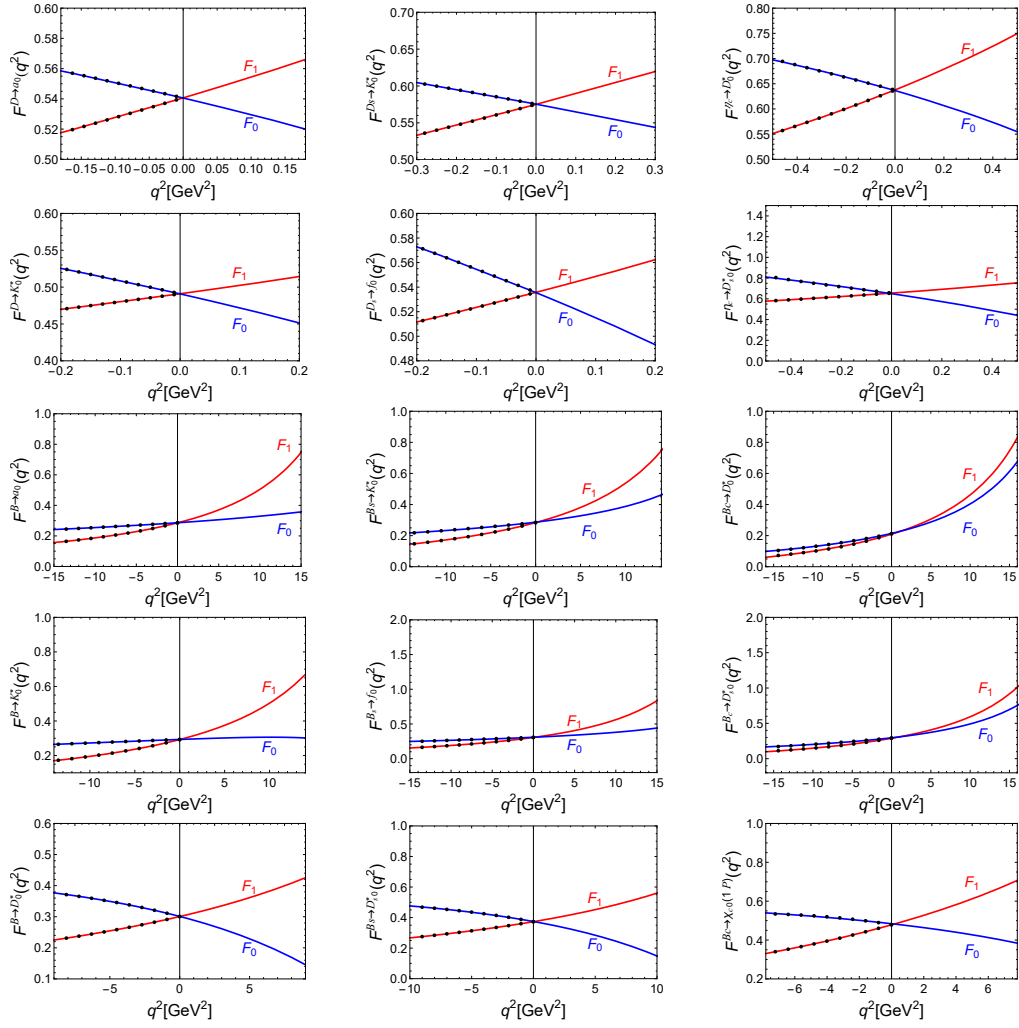


图 3-3 $D \rightarrow (a_0, K_0^*)$, $D_s \rightarrow (K_0^*, f_0)$, $\eta_c \rightarrow (D_0^*, D_{s0}^*)$, $B \rightarrow (a_0, K_0^*, D_0^*)$, $B_s \rightarrow (K_0^*, f_0, D_{s0}^*)$, $B_c \rightarrow (D_0^*, D_{s0}^*, \chi_{c0})$ 过程对 q^2 的依赖图

- 对于末态介子相同的衰变过程，形状因子随着初态介子的 β 的增大而减小；对于 $B \rightarrow S$ 的衰变过程来说，形状因子随着末态介子的 β 的增大而增大。
- 对于 $c \rightarrow (q, s)$ ($q = u, d$) 引起的衰变过程， F_0 的斜率参数 b_1 对初末态介子之间 β 的变化比较敏感，而 F_1 对 β 的变化并没有那么敏感。
- 通过对比 $P \rightarrow P$ 和 $P \rightarrow S$ 的数值结果，我们发现：对于跃迁过程的末态是由相同味道的夸克组成的束缚态介子的情况， $F^{D \rightarrow S} < F^{D \rightarrow P}$ 。对于 $b \rightarrow c$ 引起的由重介子衰变到重介子的过程来说， $F^{B \rightarrow S} < F^{B \rightarrow P}$ ；而对于由 $b \rightarrow (q, s)$ 引起的由重介子衰变到轻介子过程来说， $F^{B \rightarrow S} \approx F^{B \rightarrow P}$ 。
- 通过对比图3-2和图3-3，我们发现与 $P \rightarrow P$ 衰变过程的形状因子相比， $P \rightarrow S$ 衰

变过程的形状因子随着 q^2 的增大而增加的比较缓慢。

3.3 $P \rightarrow A (A = {}^1A, {}^3A)$ 跃迁形状因子的结果及讨论

在本节，我们分别采用SLF和CLF的方法计算了 $P \rightarrow A$ 弱衰变过程的形状因子的理论结果，并在type-II方案下给出了这些过程形状因子的数值结果。

$P \rightarrow A$ 跃迁形状因子的定义：

$$\langle {}^iA(p'', \epsilon) | \bar{q}_1'' \gamma_\mu \gamma_5 q_1' | P(p') \rangle = i \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{*\nu} P^\alpha q^\beta g^{(i)}(q^2) \quad (3-27)$$

$$\langle {}^iA(p'', \epsilon) | \bar{q}_1'' \gamma_\mu q_1' | P(p') \rangle = - \{ f^{(i)}(q^2) \epsilon_\mu^* + \epsilon^* \cdot P [a_+^{(i)}(q^2) P_\mu + a_-^{(i)}(q^2) q_\mu] \} \quad (3-28)$$

其中， $P = p' + p''$, $q = p' - p''$, $\epsilon_{0123} = -1$ ，上角标 (i) , $(i = 1, 3)$ 是为了分辨 $P \rightarrow {}^1A$ 和 $P \rightarrow {}^3A$ 的衰变过程。

这个定义与BSW形状因子的定义之间有以下关系：

$$A^{(i)}(q^2) = - (M' - M'') g^{(i)}(q^2) \quad (3-29)$$

$$V_0^{(i)}(q^2) = - \frac{q^2}{2M''} a_-^{(i)}(q^2) + \frac{M' - M''}{2M''} V_1^{(i)}(q^2) - \frac{M' + M''}{2M''} V_2^{(i)} \quad (3-30)$$

$$V_1^{(i)}(q^2) = - \frac{f^{(i)}(q^2)}{M' - M''} \quad (3-31)$$

$$V_2^{(i)}(q^2) = (M' - M'') a_+^{(i)}(q^2) \quad (3-32)$$

3.3.1 SLF夸克模型下的理论结果

我们的主要工作就是计算 $P \rightarrow A$ 跃迁过程的矩阵元：

$$\mathcal{B} \equiv \langle {}^iA(p'', \epsilon) | \bar{q}_1''(k_1'') \Gamma q_1'(k_1') | P(p') \rangle, \quad \Gamma = \gamma_\mu, \gamma_\mu \gamma_5, \quad (3-33)$$

对于 $P \rightarrow A$ 过程的衰变，我们依然在Drell-Yan-West框架下进行计算，计算方法与 $P \rightarrow P, S$ 的过程相似。利用上述公式，我们可以得到 $P \rightarrow A$ 衰变过程中矩阵元的具体表达式 $\mathcal{B}_{\text{SLF}}^\mu$ 。

对于 $P \rightarrow A$ 的衰变过程，在抽取形状因子的时候，我们采取以下的方案：

(i)、在抽取 $g^{(i), \text{SLF}}$ 的时候，我们取 $\mu = +\lambda = +$ ，并且将(3-27)式的左右两边同乘 ϵ^μ ，这样就可以直接抽取 $g^{(i), \text{SLF}}$ ；

(ii)、我们取 $\mu = +$ ， $\lambda = +$ ，并将(3-28)式左右两边同乘 $e\mathbf{q}_\perp$ ，抽取 $a_+^{(i), \text{SLF}}$ ；

(iii)、取 $\mu = +$ ， $\lambda = 0$ 抽取 $f^{(i), \text{SLF}}$ ；最后取 $\lambda = 0$ ， $\mu = \perp$ ，可以得到 $a_-^{(i), \text{SLF}}$ 。

经过上面的计算和推导，我们得到了 $P \rightarrow A$ 衰变过程的形状因子。

$$[\mathcal{F}(q^2)]_{\text{SLF}} = \int \frac{dx d^2 \mathbf{k}'_{\perp}}{(2\pi)^3 2x} \frac{\psi''^*(x, \mathbf{k}'_{\perp}) \psi'(x, \mathbf{k}'_{\perp})}{2\hat{M}_0 \hat{M}_0''} \tilde{\mathcal{F}}^{\text{SLF}}(x, \mathbf{k}'_{\perp}, q^2), \quad (3-34)$$

式中， $\mathcal{F}$ 表示 $g^{(i),\text{SLF}}$ ， $f^{(i),\text{SLF}}$ 和 $a_{\pm}^{(i),\text{SLF}}$ ，

对于 $P \rightarrow {}^1A$ 的衰变过程来说，其形状因子的被积函数部分的表达式为：

$$\tilde{g}_1^{1,\text{SLF}}(q^2) = -\frac{4}{D_{1,\text{LF}}''} \left[\mathbf{k}'_{\perp}{}^2 + \frac{(\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp})^2}{q^2} \right] \quad (3-35)$$

$$\tilde{a}_+^{1,\text{SLF}}(q^2) = \frac{4}{D_{1,\text{LF}}''} \frac{\mathbf{k}_{\perp}'' \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{\bar{x} \mathbf{q}_{\perp}^2} [\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{k}_{\perp}'' + (xm_2 + \bar{x}m_1'')(xm_2 + \bar{x}m_1')] \quad (3-36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1^{1,\text{SLF}}(q^2) = & -\frac{4M''}{\bar{x}M_0''} \left\{ \frac{\mathbf{k}_{\perp}''^2 - \bar{x}^2 M_0''^2 + m_2^2}{\bar{x}D_{1,\text{LF}}''} [\mathbf{k}'_{\perp}{}^2 - \bar{x}\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp} + (xm_2 + \bar{x}m_1'')(xm_2 + \bar{x}m_1'')] \right\} \\ & - \tilde{a}_+^{1,\text{SLF}}(q^2)(M'^2 - M''^2 + \mathbf{q}_{\perp}^2) \end{aligned} \quad (3-37)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_-^{1,\text{SLF}}(q^2) = & \frac{4}{D_{1,\text{LF}}''} \frac{1}{\mathbf{q}_{\perp}^2} \left\{ -\mathbf{k}_{\perp}'' \cdot \mathbf{q}_{\perp} [M_0'^2 - (m_1' - m_2)^2] \right. \\ & + \mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{k}_{\perp}'' [M_0'^2 + M_0''^2 + 2(m_1' - m_2)(m_2 - m_1'') + \mathbf{q}_{\perp}^2] \\ & \left. - \frac{2}{q^2} \tilde{f}_1^{1,\text{SLF}}(q^2) + \tilde{a}_{1+}^{1,\text{SLF}}(q^2) \right\} \end{aligned} \quad (3-38)$$

对于 $P \rightarrow {}^3A$ 的衰变过程来说，其形状因子的被积函数部分的表达式为：

$$\tilde{g}^{3,\text{SLF}}(q^2) = -2 \left\{ \bar{x}m_1' + xm_2 + (m_1' + m_1'') \frac{\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{q^2} + \frac{2}{D_{3,\text{LF}}''} [\mathbf{k}'_{\perp}{}^2 + \frac{(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{q}_{\perp})^2}{q^2}] \right\} \frac{\hat{M}_0''^2}{2\sqrt{2}M_0''} \quad (3-39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_+^{3,\text{SLF}}(q^2) = & 2 \left\{ (x - \bar{x})(xm_2 + \bar{x}m_1') + \frac{\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{\mathbf{q}_{\perp}^2} (2xm_2 + m_1' - 2xm_1' - m_1'') \right. \\ & \left. + \frac{2}{D_{3,\text{LF}}''} \frac{\mathbf{k}_{\perp}'' \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{\bar{x} \mathbf{q}_{\perp}^2} [\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{k}_{\perp}'' + (\bar{x}m_1' + xm_2)(\bar{x}m_1'' + xm_2)] \right\} \frac{\hat{M}_0''^2}{2\sqrt{2}M_0''} \end{aligned} \quad (3-40)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{3,\text{SLF}}(q^2) = & -\frac{4M''}{\bar{x}M_0''} \left\{ \mathbf{k}_{\perp}''^2 (\bar{x}m_1' - m_1'' - \bar{x}m_2) - \bar{x}\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp} (2\bar{x}m_1' - m_1'' + xm_2 - \bar{x}m_2) \right. \\ & + (\bar{x}m_1' + xm_2)(\bar{x}^2 \mathbf{q}_{\perp}^2 - m_1''m_2 + x\bar{x}M_0''^2) + \frac{\mathbf{k}_{\perp}''^2 - \bar{x}^2 M_0''^2 + m_2^2}{\bar{x}D_{3,\text{LF}}''} \\ & \left. [\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}_{\perp}'' + (xm_2 + \bar{x}m_1')(xm_2 + \bar{x}m_1'')] \right\} \frac{\hat{M}_0''^2}{2\sqrt{2}M_0''} - (M'^2 - M''^2 + \mathbf{q}_{\perp}^2) \tilde{a}_+^{3,\text{SLF}}(q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_-^{3,\text{SLF}}(q^2) = & \frac{4}{\mathbf{q}_{\perp}^2} \left\{ -m_1''M_0'^2 + m_1'M_0''^2 + (m_1' - m_1'')(m_1' - m_2)(m_1'' + m_2) \right. \\ & - \bar{x}(m_1' - m_2)\mathbf{q}_{\perp}^2 + (m_1' + m_1'')\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp} - 2(m_1' - m_2)\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{k}_{\perp}'' \\ & \left. + \frac{1}{D_{3,\text{LF}}''} \left\{ -\mathbf{k}_{\perp}'' \cdot \mathbf{q}_{\perp} [M_0'^2 - (m_1' - m_2)^2] \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{k}''_{\perp} [M_0'^2 + M_0'^2 + 2(m_2 - m_1'')(m_1' - m_2)] + \mathbf{q}_{\perp}^2 \} \Bigg\} \frac{\hat{M}_0''^2}{2\sqrt{2}M_0''} \\
 & - \frac{2}{q^2} \tilde{f}^{3,\text{SLF}}(q^2) + \tilde{a}_+^{3,\text{SLF}}(q^2)
 \end{aligned} \tag{3-41}$$

我们在本文中给出的是 $\mathbf{q}'_{\perp}$ 坐标系下的结果。

3.3.2 CLF夸克模型下的理论结果

在CLF夸克模型中，我们通过对图2-1，可以得出确定衰变过程的矩阵元，也就是 $P \rightarrow A$ 衰变的 $\mathcal{B}_{\text{full}}^{\mu}$ ，然后将 $\mathcal{B}_{\text{full}}^{\mu}(\Gamma = \gamma^{\mu}\gamma_5)$ ， $\mathcal{B}_{\text{full}}^{\mu}(\Gamma = \gamma^{\mu})$ 分别与形状因子定义(3-27)式和(3-28)式进行匹配，会得到：

$$[\mathcal{F}(q^2)]_{\text{full}} = N_c \int \frac{dx d^2\mathbf{k}'_{\perp}}{2(2\pi)^3} \frac{\chi'_M \chi''_M}{\bar{x}} \tilde{\mathcal{F}}_{\text{full}}(x, \mathbf{k}'_{\perp}, q^2) \tag{3-42}$$

式中 χ_M 的形式如下：

$$\chi_M \equiv H_M/N \rightarrow h_M/\hat{N}, \quad M \rightarrow M_0, \quad \text{type - II} \tag{3-43}$$

$\mathcal{F}$ 表示 $g^{(i),\text{full}}$ ， $f^{(i),\text{full}}$ 和 $a_{\pm}^{(i),\text{full}}$ 。

对于 $P \rightarrow^1A$ 衰变过程来说，被积函数的具体表达式为：

$$\tilde{g}^{1,\text{full}}(q^2) = -\frac{4}{D''_{1,\text{con}}} \left[\mathbf{k}'_{\perp}{}^2 + \frac{(\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp})^2}{q^2} \right] \tag{3-44}$$

$$\tilde{a}_+^{1,\text{full}}(q^2) = \frac{4}{D''_{1,\text{con}}} \frac{\mathbf{k}''_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{\bar{x} q_{\perp}^2} \{ \mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{k}''_{\perp} + (xm_2 + \bar{x}m_1'')(xm_2 + \bar{x}m_1') \} \tag{3-45}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}^{1,\text{full}}(q^2) = & -\frac{4}{D''_{1,\text{con}}} \left\{ \mathbf{k}'_{\perp}{}^2 + \frac{(\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp})^2}{q^2} \right\} [-q^2 + (x - \bar{x})M'^2 + M''^2 + 2xM_0'^2 \\
 & + 2(m_1' + m_1'')(m_2 - m_1') - 2(q^2 + q \cdot P) \frac{\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{q^2}] \\
 & - [-q^2 + M'^2 + M''^2 + 2(m_2 - m_1'')(m_1' - m_2)B_1^{(2)} - 2B_3^{(3)}]
 \end{aligned} \tag{3-46}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_-^{1,\text{full}}(q^2) = & -\frac{2}{D''_{1,\text{con}}} \left\{ -2(A_3^{(2)} + A_4^{(2)} - A_2^{(1)})[-q^2 + M'^2 + M''^2 + 2(m_2 - m_1'')(m_1' - m_2)] \right. \\
 & + (A_1^{(2)} + A_2^{(1)} - 1)[-q^2 - N'_1 + N_1'' + 2M'^2 - 2(m_1' - m_2)^2 + (m_1' - m_1'')^2] \\
 & + 2Z_2(2A_4^{(2)} - 3A_2^{(1)} + 1) + 2\frac{q \cdot P}{q^2}(4A_1^{(2)}A_2^{(1)} - 3A_1^{(2)}) \\
 & \left. + \frac{2}{q^2}([-q^2 + M_1'^2 + M_2''^2 + 2(m_2 - m_1'')(m_1' - m_2)B_1^{(2)}] - 2B_3^{(3)}) \right\}
 \end{aligned} \tag{3-47}$$

对于 $P \rightarrow^3A$ 衰变过程来说，被积函数的具体表达式为：

$$\tilde{g}^{3,\text{full}}(q^2) = -2 \left\{ \bar{x}m'_1 + xm_2 + (m'_1 + m''_1) \frac{\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{q^2} + \frac{2}{D''_{3,\text{con}}} \left[\mathbf{k}'_{\perp}{}^2 + \frac{(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{q}_{\perp})^2}{q^2} \right] \right\} \frac{\hat{M}_0''^2}{2\sqrt{2}M_0''} \quad (3-48)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_+^{3,\text{full}}(q^2) = & 2 \left\{ (2x-1)(\bar{x}m'_1 + xm_2) + \frac{\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{q^2} [(x-\bar{x})m'_1 + m''_1 - 2xm_2] \right. \\ & \left. + \frac{2}{D''_{3,\text{con}}} \frac{\mathbf{k}''_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{\bar{x}q_{\perp}^2} [\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{k}''_{\perp} + (\bar{x}m'_1 + xm_2)(\bar{x}m''_1 + xm_2)] \right\} \frac{\hat{M}_0''^2}{2\sqrt{2}M_0''} \end{aligned} \quad (3-49)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{3,\text{full}}(q^2) = & -2 \left\{ -4(m'_1 - m_2) \left[\mathbf{k}'_{\perp} + \frac{(\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp})^2}{q^2} \right] - (m'_1 - m''_1)(q^2 + q \cdot P) \frac{\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{q^2} \right. \\ & + (\bar{x}m'_1 + xm_2)M''^2 + (xm_2 - \bar{x}m'_1)M'^2 + x(m'_1 - m_2)(M_0'^2 + M_0''^2) \\ & - 2xm''_1M_0'^2 - m_2q^2 + (m'_1 - m''_1)^2(m_2 - m'_1) + 4(m'_1 - m_2)B_1^{(2)} \\ & + \frac{2}{D''_{3,\text{con}}} \left[\left(\mathbf{k}'_{\perp}{}^2 + \frac{(\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp})^2}{q^2} \right) [-q^2 + (x-\bar{x})M'^2 + M''^2 + 2xM_0'^2] \right. \\ & + 2(m'_1 + m''_1)(m_2 - m'_1) - 2(q^2 + q \cdot P) \frac{\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{q^2} \\ & \left. \left. - [-q^2 + M'^2 + M''^2 + 2(m_2 - m''_1)(m'_1 - m_2)]B_1^{(2)} + 2B_3^{(3)} \right] \right\} \frac{\hat{M}_0''^2}{2\sqrt{2}M_0''} \end{aligned} \quad (3-50)$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_-^{3,\text{full}}(q^2) = & -2 \left\{ (3-2x)(\bar{x}m'_1 + xm_2) - \frac{\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{q^2} [(6x-7)m'_1 + (4-6x)m_2 - m''_1] \right. \\ & + 4(m'_1 - m_2) \left[2 \left(\frac{\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{q}_{\perp}}{q^2} \right)^2 + \frac{\mathbf{k}'_{\perp}{}^2}{q^2} \right] - \frac{4(m'_1 - m_2)}{q^2} B_1^{(2)} \\ & + \frac{1}{D''_{3,\text{con}}} \left[-2(A_3^{(2)} + A_4^{(2)} - A_2^{(1)})[-q^2 + M'^2 + M''^2 + 2(m_2 - m''_1)(m'_1 - m_2)] \right. \\ & + (A_1^{(1)} + A_2^{(1)} - 1)[-q^2 - M'_1 + N_1'' + 2M'^2 - 2(m'_1 - m_2)^2 + (m'_1 - m''_1)^2] \\ & + 2Z_2(2A_4^{(2)} - 3A_1^{(1)} + 1) + \frac{4q \cdot P}{q^2} (4A_1^{(2)}A_2^{(1)} - 3A_1^{(2)}) \\ & \left. \left. \frac{2}{q^2} [(-q^2 + M'^2 + M''^2 + 2(m_2 - m''_1)(m'_1 - m_2))B_1^{(2)} - 2B_3^{(3)}] \right] \right\} \frac{\hat{M}_0''^2}{2\sqrt{2}M_0''} \end{aligned} \quad (3-51)$$

从上面的式子中我们可以看出，形状因子 $g^i(q^2)$ 和 $a_+^i(q^2)$ 与 B 函数无关；而对于形状因子 $f^i(q^2)$ 和 $a_-^i(q^2)$ 不仅包含零模贡献，而且还和 B 函数相关。在 type-I 方案中，和类光矢量 ω_{μ} 相关的项贡献的 B 函数破坏了 CLF 夸克模型结果的自洽性和协变性。

在计算的过程中，和类光矢量相关的一些项，有些部分被零模贡献抵消了，而剩下的部分就提供了B函数。以 $P \rightarrow {}^3A$ 衰变过程为例，把矩阵元 $\mathcal{B} \equiv \langle {}^iA(p'', \epsilon) | \bar{q}_1''(k_1'') \Gamma q_1'(k_1') | P(p') \rangle$ 的迹进行分解，

$$\begin{aligned} \hat{S}_{P \rightarrow {}^3A}^\mu = & 4 \frac{P^\mu \epsilon^* \cdot \omega + \omega^\mu \epsilon^* \cdot P}{\omega \cdot P} \left\{ 2(m_1' - m_2) B_1^{(2)} \right. \\ & \left. - \frac{1}{D_{3,\text{con}}''} [(-q^2 + M'^2 + M''^2 + 2(m_2 - m_1'')(m_1' - m_2)) B_1^{(2)} - 2B_3^{(3)}] \right\} + \dots, \end{aligned} \quad (3-52)$$

上式中...的部分为 $f(q^2)$ 和 $a_-(q^2)$ CLF 的结果。对于上面的式子，我们可以利用：

$$\begin{aligned} P^\mu \frac{\epsilon \cdot \omega}{\omega \cdot P} = & \epsilon^\mu - \frac{q^\mu}{q^2} \left(\epsilon \cdot q - q \cdot P \frac{\omega \cdot \epsilon}{\omega \cdot P} \right) - \frac{\omega^\mu}{\omega \cdot P} \left[\epsilon \cdot P - \epsilon \cdot q \frac{q \cdot P}{q^2} - \epsilon \cdot \omega \frac{P^2}{\omega \cdot P} \right. \\ & \left. + \epsilon \cdot \omega \frac{(q \cdot P)^2}{q^2 \omega \cdot P} \right] - \frac{i\lambda}{\omega \cdot P} \frac{\epsilon \cdot q}{q^2} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu} \omega_\alpha q_\beta P_\nu. \end{aligned} \quad (3-53)$$

当 $\lambda = 0$ 时，(3-52) 式前面的整体因子部分可以写成以下形式：

$$\left. \frac{P^\mu \epsilon^* \cdot \omega + \omega^\mu \epsilon^* \cdot P}{\omega \cdot P} \right|_{\lambda=0} = \epsilon^{*\mu} - \frac{q^\mu}{q^2} \epsilon^* \cdot q + q^\mu \frac{q \cdot P \omega \cdot \epsilon^*}{q^2 \omega \cdot P} + \omega^\mu \frac{2M''}{\omega \cdot P}. \quad (3-54)$$

当 $\lambda = \pm$ 时，(3-52) 式前面的整体因子部分可以写成以下形式：

$$\left. \frac{P^\mu \epsilon^* \cdot \omega + \omega^\mu \epsilon^* \cdot P}{\omega \cdot P} \right|_{\lambda=\pm} = \omega^\mu \frac{\epsilon^* \cdot P}{\omega \cdot P}, \quad (3-55)$$

(3-54) 式的最后一项和 (3-55) 式是非物理效应，如果这部分不等于零，就会破坏协变光前夸克模型的协变性。

此外，我们也在光前夸克模型下计算了价贡献(val.)的结果，

$$[\mathcal{F}(q^2)]_{\text{full}} = N_c \int \frac{dx d^2 \mathbf{k}'_\perp}{2(2\pi)^3} \frac{\chi'_M \chi''_M}{\bar{x}} \tilde{\mathcal{F}}^{\text{val.}}(x, \mathbf{k}'_\perp, q^2) \quad (3-56)$$

$P \rightarrow {}^1A, P \rightarrow {}^3A$ 衰变过程中的 val. 贡献被积函数部分的具体表达式为：

$$\tilde{g}^{i,\text{val.}}(q^2) = \tilde{g}^{i,\text{full}}(x, \mathbf{k}'_\perp, q^2) \quad (3-57)$$

$$\tilde{a}_+^{i,\text{val.}}(q^2) = \tilde{a}_+^{i,\text{full}}(x, \mathbf{k}'_\perp, q^2) \quad (3-58)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}^{1,\text{val.}}(q^2) = & - \frac{4(\mathbf{k}''_\perp + m_2^2 - \bar{x}^2 M''^2)}{\bar{x} D_{1,\text{con}}''} [\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}''_\perp + (xm_2 + \bar{x}m_1'')(xm_2 + \bar{x}m_1')] \\ & - \tilde{a}_{1+}^{1,\text{val.}}(q^2)(M'^2 - M''^2 + \mathbf{q}_\perp^2) \end{aligned} \quad (3-59)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_3^{1,\text{val.}}(q^2) = & - \frac{4}{\bar{x}} \left\{ \mathbf{k}'_\perp \cdot \mathbf{k}''_\perp (\bar{x}m_1' - m_1'' - \bar{x}m_2) + (\bar{x}m_1' + xm_2)(x\bar{x}M''^2 - m_1'm_2 - \bar{x}\mathbf{k}''_\perp \cdot \mathbf{q}_\perp) \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{k}''_\perp^2 + m_2^2 - \bar{x}^2 M''^2}{\bar{x} D_{3,\text{con}}''} [\mathbf{k}'_\perp \cdot \mathbf{k}''_\perp + (xm_2 + \bar{x}m_1'')(xm_2 + \bar{x}m_1')] \right\} \frac{\hat{M}_0''^2}{2\sqrt{2}M_0''} \\ & - (M'^2 - M''^2 + \mathbf{q}_\perp^2) a_+^{1,\text{val.}}(q^2) \end{aligned} \quad (3-60)$$

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{-}^{1,\text{val.}}(q^2) = & \frac{4}{q_{\perp}^2 D_{1,\text{con}}''} [-\mathbf{k}_{\perp}'' \cdot \mathbf{q}_{\perp} (xM_0'^2 + \bar{x}M'^2 - (m_1' - m_2)^2) \\ & + \mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}_{\perp}'' (M''^2 + M'^2 + 2(m_2 - m_1'')(m_1' - m_2) + \mathbf{q}_{\perp}^2)] \\ & + \frac{2}{q_{\perp}^2} \tilde{f}_{-}^{1,\text{val.}}(q^2) + \tilde{a}_{+}^{1,\text{val.}}(q^2)\end{aligned}\quad (3-61)$$

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{-}^{3,\text{val.}}(q^2) = & \frac{4}{q_{\perp}^2} \left\{ -x(m_1'' + m_2)M_0'^2 + x(m_1' - m_2)M_0''^2 + (xm_2 - \bar{x}m_1'')M'^2 \right. \\ & + (xm_2 + \bar{x}m_1')M''^2 + (m_1' - m_1'')(m_1' - m_2)(m_1'' + m_2) \\ & - \bar{x}(m_1' - m_2)\mathbf{q}_{\perp}^2 + (m_1' + m_2'')\mathbf{k}_{\perp}' \cdot \mathbf{q}_{\perp} - 2(m_1' - m_2)\mathbf{k}_{\perp}' \cdot \mathbf{k}_{\perp}'' \\ & \left. + \frac{1}{D_{3,\text{con}}''} \left\{ -\mathbf{k}_{\perp}'' \cdot \mathbf{q}_{\perp} [xm'^2 + \bar{x}M_0'^2 - (m_1' - m_2)^2] \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{k}_{\perp}' \cdot \mathbf{k}_{\perp}'' [-q^2 + M'^2 + M''^2 + 2(m_2 - m_1'')(m_1' - m_1'')] \right\} \right\} \frac{\hat{M}_0''^2}{2\sqrt{2}M_0''} \\ & + \frac{2}{q_{\perp}^2} \tilde{f}_{-}^{3,\text{val.}}(q^2) + \tilde{a}_{+}^{3,\text{val.}}(q^2)\end{aligned}\quad (3-62)$$

3.3.3 数值结果及讨论

对于组分夸克为 $q\bar{q}$ 的轴矢量介子，由于C宇称是对称的，因此他们是没有混合的。对于存在奇异夸克的轴矢介子来说，两种轴矢量介子之间存在混合，例如 $K_1(1270)$ 和 $K_1(1400)$ 这两个粒子存在着 K_{1A} 和 K_{1B} 的混合，这是由于奇异夸克和非奇异轻夸克之间的质量差导致的。在本文中，我们使用的 K_{1A} 和 K_{1B} 的质量分别为 1.31GeV 和 1.34GeV ^[64]。

对于 $P \rightarrow 1A$ 的衰变过程：我们在附录A中给出了由 $c \rightarrow (q, s) (q = u, d)$ 引起的 $D \rightarrow (b_1, K_{1B})$, $D_s \rightarrow (K_{1B}, h_1)$, $\eta_c \rightarrow (D_1(2420), D_{s1}(2536))$, $B_c \rightarrow (B_1, B_{s1})$ 和由 $b \rightarrow (q, s, c)$ 引起的 $B \rightarrow (b_1, K_{1B}, D_1(2420))$, $B_s \rightarrow (K_{1B}, h_1, D_{s1}(2536))$, $B_c \rightarrow (D_1(2420), D_{s1}(2536), h_c)$, $\eta_b \rightarrow (B_1, B_{s1})$ 跃迁过程的 $\mathcal{F}(0)$ 和 b_1 的数值结果，以及这些过程中形状因子 $\mathcal{F}$ 对 q^2 的依赖图。

- 从表中我们发现形状因子 $A^1(0)$, $V_0^1(0)$, $V_1^1(0)$ 都是正的，而 $V_2^1(0)$ 是负的，对于 $c \rightarrow (q, s) (q = u, d)$ 引起的跃迁过程来说，这些形状因子都遵循这样的规律： $V_1^1(0) > V_0^1(0) > A^1(0) > |V_2^1(0)|$ ；对于由 $b \rightarrow (q, s, c) (q = u, d)$ 引起的跃迁过程来说，这些形状因子遵循这样的规律： $V_0^1(0) > V_1^1(0) > A^1(0) > |V_2^1(0)|$ 。

- 对于 $b \rightarrow (q, s, c)(q = u, d)$ 引起的跃迁过程，初态介子的 β 值越大，形状因子 $A^1(0)$ 和 $V_0^1(0)$ 的数值就越小；末态介子的 β 值越大，形状因子 $A^1(0)$ 和 $V_0^1(0)$ 的数值就越大。

对于 $P \rightarrow {}^3A$ 的衰变过程：我们在附录B的表B-1和图B-1中给出了由 $c \rightarrow (q, s)(q = u, d)$ 引起的 $D \rightarrow (a_1, K_{1A}), D_s \rightarrow (K_{1A}, f_1), \eta_c \rightarrow (D_1(2430), D_{s1}(2460))$ 和由 $b \rightarrow (q, s, c)$ 引起的 $B \rightarrow (a_1, K_{1A}, D_1(2430)), B_s \rightarrow (K_{1A}, f_1, D_{s1}(2460)), B_c \rightarrow (D_1(2430), D_{s1}(2460), \chi_{c1})$ 跃迁过程的 $\mathcal{F}(0)$ 和 b_1 的数值结果，以及这些过程中形状因子 $\mathcal{F}$ 对 q^2 的依赖图。

- 从表中，我们发现对于 $P \rightarrow {}^3A$ 的衰变过程，所有的形状因子都是正的。对于由 $c \rightarrow (q, s)(q = u, d)$ 引起的跃迁过程来说，这些形状因子都遵循这样的规律： $V_1^3(0) > V_0^3(0) > A^3(0) > V_2^3(0)$ ；对于由 $b \rightarrow (q, s, c)(q = u, d)$ 引起的跃迁过程来说，这些形状因子遵循这样的规律： $V_1^3(0) > A^3(0) > V_2^3(0) > V_0^3(0)$ 。
- 由 $c \rightarrow (q, s)(q = u, d)$ 引起的跃迁过程的形状因子 $V_0^3(0)$ 的数值大小大概是由 $b \rightarrow (q, s, c)(q = u, d)$ 引起的跃迁过程的形状因子的两倍。
- 我们通过比较P介子跃迁到自旋为1的介子时（自旋为1的介子是由相同的组分夸克组成的束缚态）的形状因子发现： $A^3(0) > A^1(0)$ ； $V_1^3(0) > V_1^1(0)$ ； $V_0^3(0) < V_0^1(0)$ 。

3.4 小结

在本章，我们分别在SLF夸克模型和CLF夸克模型下计算了 $P \rightarrow (P, S, A)$ 跃迁过程的形状因子的理论结果，在type-II方案下给出这些过程形状因子的数值结果，并给出了由 $c \rightarrow (q, s)(q = u, d), b \rightarrow (q, s, c)$ 引起的 $P \rightarrow (P, S, A)$ 跃迁过程的形状因子的数值结果和这些过程中形状因子对 q^2 的依赖图像。

由于采用自洽的CLF夸克模型计算得到的形状因子是类空空间的结果，因此我们需要对这个结果进行延拓，从而得到类时空间的形状因子。在延拓的过程中，我们选择不同的参数化方法，结果表明形状因子具有模型依赖性，最后我们采用的参数化方法的是BCL方法。这些结果都可以作为非微扰物理输入参数，应用于介子的唯象研究中。

第四章 $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 衰变的研究

本章的主要内容是在QCD因子化的框架下，研究 $B \rightarrow SS$ 的衰变。对于研究中所用到的标量介子的衰变常数、分布振幅以及 $B \rightarrow K_0^*$ 、 $B_s \rightarrow K_0^*$ 和 $B \rightarrow a_0$ 的跃迁形状因子，都是在自洽的协变光前夸克模型下计算得到的。本章首先计算了上述提到的非微扰输入参数，然后将这些参数作为输入，在QCDF的框架下，对 $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 的衰变进行计算和唯象分析。

4.1 研究动机

近些年来，研究标量介子的内部结构已经成为了重味物理中最非常热门的话题。在之前的工作中，人们已经做了许多与矢量介子和赝标量介子的内部结构相关的研究。然而和矢量介子、赝标量介子不同的是，由于实验上对标量介子的观测难度较大，因此到目前为止标量介子的内部结构依然还没有得到很好地确定。标量介子通常被定义为两夸克 $q\bar{q}$ 态，和四夸克 $q\bar{q}q\bar{q}$ 态，通过对标量介子的质量谱以及电磁衰变的研究表明：1GeV以上的标量介子为两夸克态；1GeV以下的标量介子为四夸克态。根据标量介子的两夸克态和四夸克态，人们提出了两种典型的方案：在方案一（S1）中，质量低于或者接近1GeV的标量介子被解释为基态的 $q\bar{q}$ 态，而高于1GeV的标量介子被解释为处于第一激发态的 $q\bar{q}$ 态；在方案二（S2）中，前者则是四夸克态，而后者则被认为是处于基态的 $q\bar{q}$ 态^[65, 66]。不同的方案对B介子衰变到标量介子预测也不一样，这些结果都需要通过实验来验证。

为了能够准确的知道标量介子的具体信息，国内外的很多学者都做出了很多的努力。从实验的方面来说，Belle^[67–71]，BABAR^[72–80]和LHCb^[81, 82]合作组都相继报道了B介子衰变到末态为标量介子的测量结果，这些过程的测量结果为研究标量介子的内部结构提供了非常重要的信息。预计在不久的将来，LHCb和Belle-II合作组将会观测到更多的 $B \rightarrow SS$ 的衰变过程。

从理论方面来说，B介子衰变到末态为标量介子的过程可以通过QCDF，pQCD以及其他更多的方法进行系统的研究。由于 $B \rightarrow SS$ 的衰变在QCDF中尚未得到充分的理论研究，因此，在本文中，我们基于上面提出的两种方案，利用QCD因子化的方法系统地研究 $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 的衰变。在研究的过程中，会涉及到一些

非微扰物理参数，如衰变常数、形状因子和分布振幅，这些都是在CLF夸克模型下计算得到的。在本章，我们以第三章在光前夸克模型下计算得到的形状因子和本章前两小节计算得到的标量介子的衰变常数和分布振幅作为输入参数，在QCDF框架下研究了 $B \rightarrow SS (S = K_0^*(1430)a_0(1450))$ 的衰变。

4.2 输入参数

在QCDF的框架下对 $B \rightarrow SS (S = K_0^*(1430)a_0(1450))$ 衰变进行唯象学研究时，我们会用到一些输入参数，如CKM 矩阵元中的Wolfenstein参数、费米耦合常数、介子质量和B介子的寿命，对于这些输入参数，采取的都是PDG^[83] 中给出的数据。在本节，我们采用自洽的CLF的方法，分别在S1和S2的方案下，计算了标量介子 $K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 的衰变常数和分布振幅。

4.2.1 衰变常数和形状因子

标量介子衰变常数的定义为：

$$\langle S(p) | \bar{q}_1 \gamma^\mu q_2 | 0 \rangle = f_S p_\mu, \quad \langle S(p) | \bar{q}_1 q_2 | 0 \rangle = m_S \bar{f}_S(\mu) \quad (4-1)$$

标度依赖的标量流衰变常数 $\bar{f}_S(\mu)$ 和与标度无关的矢量流衰变常数 f_S 之间有以下关系：

$$\bar{f}_S = \bar{\mu}_S(\mu) f_S, \quad \bar{\mu}_S(\mu) = \frac{m_S}{m_1(\mu) - m_2(\mu)} \quad (4-2)$$

从上述关系中可以看出矢量流衰变常数 f_S 与 $m_1(\mu)$ 和 $m_2(\mu)$ 的质量差成正比，因此标量介子 $a_0^\pm$ 的矢量衰变常数 f_S 可以忽略，因为质量差 $\Delta m_{u,d}$ 很小。特别是中性标量介子，如 a_0^0 和 f_0 ， $f_{f_0} = f_{a_0^0} = 0$ 。因此对于标量介子 a_0 来说，我们可以计算标量流衰变常数 $\bar{f}_S$ 。为了计算的一致性，对于所有的标量介子 a_0 和 K_0^* ，我们计算 $\bar{f}_S$ ，标量介子及其反粒子的衰变常数之间的关系为： $\bar{f}_S = \bar{f}_{\bar{S}}$ 。

我们利用CLF夸克模型在S1和S2方案下，将标度取为 $\mu = 1\text{GeV}$ ，分别计算了标量介子 a_0 和 K_0^* 的衰变常数的数值结果：

$$\begin{aligned} \bar{f}_{K_0^*(1430)} &= 234_{-87}^{+85} \text{MeV}, & \bar{f}_{a_0(1450)} &= 256_{-54}^{+56} \text{MeV}, & \text{S1} \\ \bar{f}_{K_0^*(1430)} &= 542_{-190}^{+180} \text{MeV}, & \bar{f}_{a_0(1450)} &= 456_{-56}^{+57} \text{MeV}, & \text{S2} \end{aligned} \quad (4-3)$$

在计算的时候会使用到running夸克的质量，在标度为 $\mu = 1\text{GeV}$ 时，running夸克的质量为： $m_u = 2.7\text{MeV}$, $m_d = 5.7\text{MeV}$, $m_s = 116\text{MeV}$ ，夸克之间的质量差 $\Delta m_{u,d} =$

3MeV, $\Delta m_{q,s} = 112\text{MeV}$ ^[83]。郑老师利用QCD SR方法计算出的结果为^[84]:

$$\bar{f}_{K_0^*(1430)} = -300 \pm 30\text{MeV}, \quad \bar{f}_{a_0(1450)} = -280 \pm 30\text{MeV}, \quad \text{S1}$$

$$\bar{f}_{K_0^*(1430)} = 445 \pm 50\text{MeV}, \quad \bar{f}_{a_0(1450)} = 460 \pm \text{MeV}, \quad \text{S2} \quad (4-4)$$

结果表明, 我们采用CLF方法计算得到的 $\bar{f}_{K_0^*(1430)}$ 和 $\bar{f}_{a_0(1450)}$ 与采用QCD SR得到的结果相比, 除了在S1 方案下的符号不同之外, 其他的数据在误差范围内都是一致的。

$B \rightarrow S$ 跃迁的形状因子定义为(3-2)式, 根据这个定义, 我们在表 4-1中给出了 $B \rightarrow K_0^*(1430), a_0(1450)$ 和 $B_s \rightarrow K_0^*(1430), a_0(1450)$ 跃迁过程的数值结果。其中, 形状因子的参数化形式为:

$$F(q^2) = \frac{F(0)}{1 - a(q^2/m_B^2) + b(q^2/m_B^2)^2} \quad (4-5)$$

表 4-1 $B_{u,d,s} \rightarrow K_0^*(1430), a_0(1450)$ 在S1和S2方案下跃迁过程的形状因子

F	$F(0)$	a	b	F	$F(0)$	a	b
$U_1^{B \rightarrow K_0^*}$	0.29 ± 0.02	1.27	0.33	$U_0^{B \rightarrow K_0^*}$	0.29 ± 0.02	0.16	0.11
	0.18 ± 0.01	1.03	0.15		0.18 ± 0.01	-0.23	0.29
$U_1^{B_s \rightarrow K_0^*}$	0.28 ± 0.02	1.58	0.84	$U_0^{B_s \rightarrow K_0^*}$	0.28 ± 0.02	0.55	0.20
	0.23 ± 0.02	0.92	0.29		0.23 ± 0.02	-0.23	0.36
$U_1^{B \rightarrow a_0}$	0.29 ± 0.02	1.33	0.38	$U_0^{B \rightarrow a_0}$	0.29 ± 0.02	0.32	0.06
	0.19 ± 0.01	1.01	0.16		0.19 ± 0.01	-0.17	0.30

4.2.2 分布振幅

通常, leading-twist的分布振幅可以通过盖根鲍尔多项式展开:

$$\Phi_M(x, \mu) = 6x(1-x) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^M(\mu) C_n^{3/2}(x - \bar{x}) \right] \quad (4-6)$$

对于标量介子, 我们可以使用下面的这种形式:

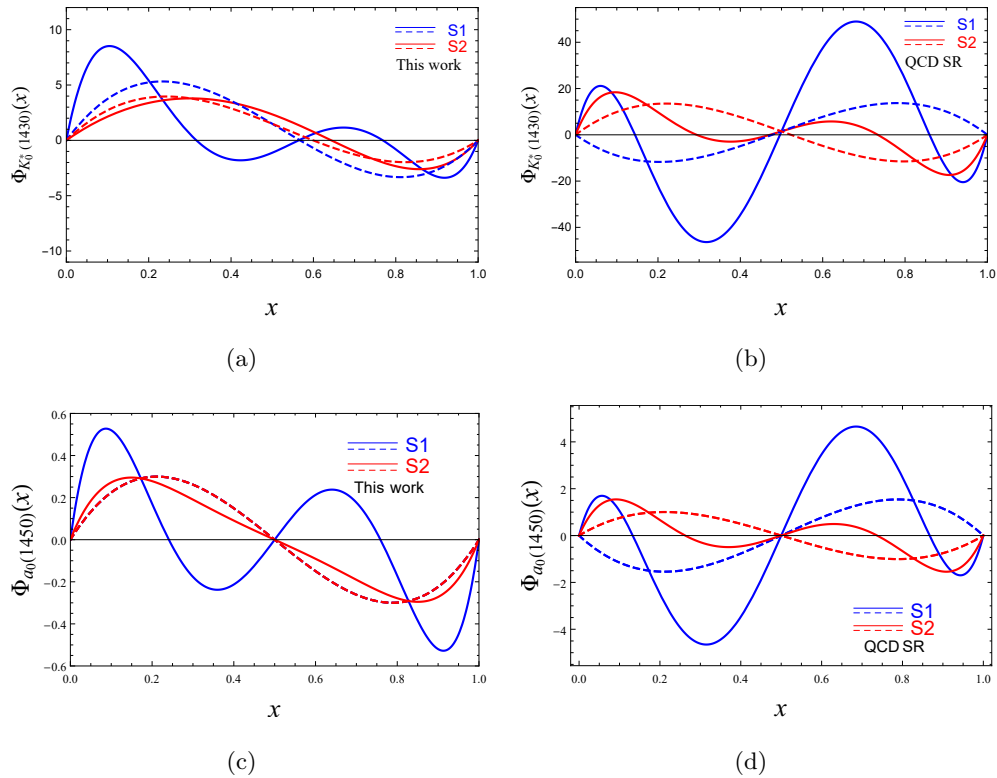
$$\Phi_S(x, \mu) = 6x(1-x) \left[b_0^S + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^S(\mu) C_n^{3/2}(x - \bar{x}) \right] \quad (4-7)$$

其中, $a_n^S(\mu) = \bar{\mu}_S(\mu) b_n^S(\mu)$, $\bar{\mu}_S(\mu)$ 可以通过方程(4-2)被 f_S 吸收。为了方便, 对于标量介子来说, 我们采用的衰变常数为 $\bar{f}_S$, 对应标量介子的分布振幅由盖根鲍尔距 b_n^S 展开。 $K_0^*(1430)$ 的分布振幅已经在之前的工作中做了详细的讨论^[85], 比起 $b_{1,3}^S$ 的贡献, 和非零 $b_{0,2}^S$ 相关的贡献并没有那么显著。通过利用CLF光前夸克模型, 我们取标度为 $\mu = 1\text{GeV}$, 分别在S1和S2方案下给出了盖根鲍尔距的数值结果 b_n^S , 如下表所示, 并列出了QCD SR的结果^[86]。

表 4-2 S1和S2方案下标度为 $\mu = 1\text{GeV}$ 时的盖根鲍尔距 b_n^S

	b_0	b_1	b_2	b_3
$K_0^*(1430)$ Thiswork	0.08 ± 0.01	-0.13 ± 0.05	-0.03 ± 0.00	-0.01 ± 0.00
	0.08 ± 0.01	-0.15 ± 0.05	0.06 ± 0.01	-0.09 ± 0.05
QCD SR ^[86]	0	-0.57 ± 0.13	0	-0.42 ± 0.22
	0	0.58 ± 0.07	0	-1.20 ± 0.08
$a_0(1450)$ Thiswork	0	-0.17 ± 0.03	0	-0.03 ± 0.01
	0	-0.17 ± 0.06	0	-0.19 ± 0.03
QCD SR ^[86]	0	-0.28 ± 0.12	0	-0.49 ± 0.15
	0	0.89 ± 0.20	0	-1.83 ± 0.18

从表4-2中可以发现计算出来的 $K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 的结果都比QCD SR给出的预言结果小。此外，相较于QCD SR 的预言， $b_3^{K_0^*}$ 对 $\Phi_{K_0^*}(x)$ 的修正并没有那么显著，但是 $b_3^{a_0}$ 在S2方案中对 $\Phi_{a_0}(x)$ 修正有着不可忽略的贡献。为了使这些差异更加清晰地展现出来，我们绘制了 $K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 分布振幅的图像。


 图 4-1 $K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 的分布振幅，虚线和实线分别对应 $n = 1$ 和 $n = 3$ 的截断

从图(b),(c)和(d)中我们发现分布振幅在 $x = 0.5$ 处是对称的，这是因为 $b_{0,2} = 0$ 。然而，图(a)绘制的是对 $K_0^*(1430)$ 分布振幅的的预言，它是不对称的，这是因为考虑了 $b_{0,2}$ 的贡献，这部分的贡献是非零的。

对于 $n=1$ （虚线）的情况，在 S_1 和 S_2 方案下得到的 $K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 的结果几乎是相同的，然而用QCD SR^[86]在两种方案下得到的结果则完全不同，这是由于 b_1 的符号不同造成的。为了解释这些差异并为 $\Phi_{a_0}(x)$ 和 $\Phi_{K_0^*}(x)$ 提供更加清晰的图像，我们希望未来的实验和理论的研究，可以提供更多和标量介子 a_0 和 K_0^* 相关的分布振幅的信息。

4.3 理论计算

$B \rightarrow SS$ 的衰变振幅为：

$$\mathcal{A}(B \rightarrow S_1 S_2) = \langle S_1 S_2 | \mathcal{H}_{eff} | B \rangle \quad (4-8)$$

$B \rightarrow SS$ 衰变的衰变过程有效哈密顿为：

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{eff} = & \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[V_{ub} V_{up}^* (C_1 O_1^u + C_2 O_2^u) + V_{cb} V_{cp}^* (C_1 O_1^c + C_2 O_2^c) \right. \\ & \left. - V_{tb} V_{tp}^* \left(\sum_{i=3}^{10} C_i O_i + C_{7\gamma} O_{7\gamma} + C_{8g} O_{8g} \right) \right] + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (4-9)$$

其中， G_F 为费米耦合常数； $V_{tb} V_{tp}^* (q = u, c, t; p = d, s)$ 为CKM矩阵元的乘积。

在重夸克极限下，采用QCD因子化的方法， $B \rightarrow SS$ 衰变的强子矩阵元可以写成这样的形式：

$$\begin{aligned} \langle S_1 S_2 | O_i | B \rangle = & \sum_j F_j^{B \rightarrow S_1} f_{S_2} \int dy \mathcal{T}_{ij}^I(y) \phi_{S_2}(y) + [S_1 \leftrightarrow S_2] \\ & + f_B f_{S_1} f_{S_2} \int dx dy dz \mathcal{T}_i^{II}(x, y, z) \phi_{S_1}(x) \phi_{S_2}(y) \phi_B(z), \end{aligned} \quad (4-10)$$

其中， $F_j^{B \rightarrow S_1}$ 表示 $B \rightarrow S_1$ 跃迁的形状因子； f_B 和 $f_{S_{1,2}}$ 分别是B介子和标量介子的衰变常数； $\phi_{S_1}(x), \phi_{S_2}(y), \phi_B(z)$ 分别是标量介子和B介子的分布振幅，它们为轻夸克纵向动量分数 x, y, z 的函数； $\mathcal{T}_{ij}^I(y)$ 和 $\mathcal{T}_i^{II}(x, y, z)$ 是可以微扰计算的硬散射核。

我们在附录C中给出了 $B \rightarrow SS(K_0^*(1430), a_0(1450))$ 衰变的振幅，振幅中 $A_{S_1 S_2}$ 、 $B_{S_1 S_2}$ 和 $\beta_i^p(S_1 S_2)$ 的具体的表达为：

$$A_{S_1 S_2} \equiv i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{f}_{S_2} (m_B^2 - m_{S_1}^2) U_0^{BS}(m_{S_2}^2) \quad (4-11)$$

$$B_{S_1 S_2} \equiv i \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_B \bar{f}_{S_1} \bar{f}_{S_2} \quad (4-12)$$

$$\beta_i^p(S_1 S_2) \equiv -\frac{B_{S_1 S_2}}{A_{S_1 S_2}} b_i^p \quad (4-13)$$

在 $B \rightarrow SS$ 的衰变振幅中，顶点修正、企鹅图贡献以及硬旁观者贡献都被吸收到有效系数 α_i^p 中，湮灭图的贡献由有效系数 b_i^p 描述。有效系数 α_i^p 的具体表达为：

$$\alpha_1(S_1 S_2) = a_1(S_1 S_2), \quad (4-14)$$

$$\alpha_2(S_1 S_2) = a_2(S_1 S_2), \quad (4-15)$$

$$\alpha_3^p(S_1 S_2) = a_3^p(S_1 S_2) + a_5^p(S_1 S_2), \quad (4-16)$$

$$\alpha_4^p(S_1 S_2) = a_4^p(S_1 S_2) + \bar{\gamma}_\chi^{S_2} a_6^p(S_1 S_2), \quad (4-17)$$

$$\alpha_{3,EW}^p(S_1 S_2) = a_9^p(S_1 S_2) + a_7^p(S_1 S_2), \quad (4-18)$$

$$\alpha_{4,EW}^p(S_1 S_2) = a_{10}^p(S_1 S_2) + \bar{\gamma}_\chi^{S_2} a_8^p(S_1 S_2), \quad (4-19)$$

其中,

$$\bar{\gamma}_\chi^S(\mu) = \gamma_\chi^S(\mu) \bar{\mu}_S^{-1} = \frac{2m_S}{m_b(\mu)} \quad (4-20)$$

$$\bar{\mu}_S = \frac{m_S}{m_1(\mu) - m_2(\mu)}, \quad \gamma_\chi^S(\mu) = \frac{2m_S^2}{m_b(\mu)(m_1(\mu) - m_2(\mu))} \quad (4-21)$$

振幅表达式中的有效系数 a_i^p 可以在 α_s 的次领头阶中计算:

$$a_i^p(S_1 S_2) = \left(C_i + \frac{C_{i\pm 1}}{N_c} \right) N_i(S_2) + \frac{C_{i\pm 1}}{N_c} \frac{C_F \alpha_s}{4\pi} \left[V_i(S_2) + \frac{4\pi^2}{N_c} H_i(S_1 S_2) \right] + P_i^p(S_2), \quad (4-22)$$

其中 $C_i (i = 1, \dots, 10)$ 是威尔逊系数, 当 i 取奇数 (偶数) 时, 取上边 (下边) 的符号; $C_F = \frac{N_c^2 - 1}{2N_c}$, $N_c = 3$. $N_i(S_2)$ 包含领头阶的贡献, 是在简单因子化方法下得到的结果:

$$N_i(S_2) = \begin{cases} 1 & i=6, 8 \\ \bar{\mu}_S^{-1} & \text{else.} \end{cases}$$

在考虑了标量介子 $K_0^*(1430)$ 分布振幅的非零项 $a_{0,2}^S$ 后, 顶角修正 $V_i(S_2)$, 硬旁观者修正 $H_i(S_1 S_2)$ 和企鹅图修正 $P_i^p(S_2)$ 的形式已经在之前 $B_{u,d,s} \rightarrow K_0^*(1430)P, K_0^*(1430)V$ 衰变的工作当中给出^[85]。通常分布振幅都是通过盖根鲍尔距 a_n^M 展开, 对于标量介子 (尤其是中性标量介子 a_0), 分布振幅是通过 b_0^S 展开。根据之前的工作, $B \rightarrow SS$ 衰变 $V_i(S_2)$ 和 $P_i^p(S_2)$ 的结果可以通过以下替换得到: $a_n^{S_1} \rightarrow b_n^{S_1}, a_n^{S_2} \rightarrow b_n^{S_2}$ 。当 $M_1 = S$ 时, $H_i(S_1 S_2)$ 的积分形式可以通过这样替换 $\phi_{M_1} \gamma_\chi^{M_1} \rightarrow \phi_{S_1} \gamma_\chi^{S_1}$ 得到。

积掉动量分数后, 硬旁观者散射振幅可以写成以下形式:

$$\begin{aligned} H_i(S_1 S_2) = & -\frac{B_{SS}}{A_{SS}} \frac{m_B}{\lambda_B} [9(b_0^{S_1} + b_1^{S_1} + b_2^{S_1} + b_3^{S_1})(b_0^{S_2} + b_1^{S_2} + b_2^{S_2} + b_3^{S_2}) \\ & - 3\bar{\gamma}_\chi^{S_1}(b_0^{S_2} - b_1^{S_2} + b_2^{S_2} - b_3^{S_2})], \quad i = 1-4, 9, 10, \\ H_i(S_1 S_2) = & -\frac{B_{SS}}{A_{SS}} \frac{m_B}{\lambda_B} [9(b_0^{S_1} + b_1^{S_1} + b_2^{S_1} + b_3^{S_1})(b_0^{S_2} - b_1^{S_2} - b_2^{S_2} - b_3^{S_2}) \\ & - 3\bar{\gamma}_\chi^{S_1}(b_0^{S_2} + b_1^{S_2} + b_2^{S_2} + b_3^{S_2})], \quad i = 5, 7, \end{aligned}$$

$$H_i(S_1 S_2) = 0, \quad i = 6, 8, \quad (4-23)$$

振幅中湮灭图贡献的系数 b_i^p 可以写成以下形式:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{C_F}{N_c^2} C_1 A_1^i, & b_2 &= \frac{C_F}{N_c^2} C_2 A_1^i, \\ b_3^p &= \frac{C_F}{N_c^2} [C_3 A_1^i + C_5 (A_3^i + A_3^f) + N_c C_6 A_3^f], & b_4^p &= \frac{C_F}{N_c^2} [C_4 A_1^i + C_6 A_2^i], \\ b_{3,EW}^p &= \frac{C_F}{N_c^2} [C_9 A_1^i + C_7 (A_3^i + A_3^f) + N_c C_8 A_3^f], & b_{4,EW}^p &= \frac{C_F}{N_c^2} [C_{10} A_1^i + C_8 A_2^i]. \end{aligned} \quad (4-24)$$

$A_n^{i,f}$ 的下标 $n = 1, 2, 3$ 分别表示 $(V-A)(V-A)$ 、 $(A-A)(V+A)$ 和 $(S-P)(S+P)$ 三种算符结构。积掉动量分数之后, 我们得到 $A_n^{i,f}$ 的表达式为:

$$\begin{aligned} A_1^i(S_1 S_2) &\approx 2\pi\alpha_s \left\{ 9 \left[b_0^{S1} \left(b_0^{S2} (X_A - 4 + \frac{\pi^2}{3}) + b_1^{S2} (3X_A + 4 - \pi^2) + b_2^{S2} (6X_A - \frac{107}{3} + 2\pi^2) \right. \right. \right. \\ &\quad + b_3^{S2} (10X_A + \frac{23}{18} - \frac{10}{3}\pi^2) \Big) - b_1^{S1} \left(b_0^{S2} (X_A + 29 - 3\pi^2) + b_1^{S2} (3X_A - 213 + 21\pi^2) \right. \\ &\quad + b_2^{S2} (6X_A + 754 - 78\pi^2) + b_3^{S2} (10X_A - \frac{12625}{6} + 210\pi^2) \Big) + b_2^{S1} \left(b_0^{S2} (X_A - 119 + 12\pi^2) \right. \\ &\quad + b_1^{S2} (3X_A + 1534 - 156\pi^2) + b_2^{S2} (6X_A - 9609 + 972\pi^2) + b_3^{S2} (10X_A + \frac{118933}{3} - 4020\pi^2) \Big) \\ &\quad - b_3^{S1} \left(b_0^{S2} (X_A + \frac{2956}{9} - \frac{100}{3}\pi^2) + b_1^{S2} (3X_A - \frac{20743}{3} + 700\pi^2) \right. \\ &\quad + b_2^{S2} (6X_A + \frac{198332}{3} - 6700\pi^2) + b_3^{S2} (10X_A - \frac{3585910}{9} + \frac{121100}{3}\pi^2) \Big) \Big] \\ &\quad \left. - \bar{\gamma}_\chi^{S1} \bar{\gamma}_\chi^{S2} X_A^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4-25)$$

$$\begin{aligned} A_2^i(S_1 S_2) &\approx 2\pi\alpha_s \left\{ 9 \left[b_0^{S2} \left(b_0^{S1} (X_A - 4 + \frac{\pi^2}{3}) - b_1^{S1} (3X_A + 4 - \pi^2) + b_2^{S1} (6X_A - \frac{107}{3} + 2\pi^2) \right. \right. \right. \\ &\quad - b_3^{S1} (10X_A + \frac{23}{18} - \frac{10}{3}\pi^2) \Big) + b_1^{S2} \left(b_0^{S1} (X_A + 29 - 3\pi^2) - b_1^{S1} (3X_A - 213 + 21\pi^2) \right. \\ &\quad + b_2^{S1} (6X_A + 754 - 78\pi^2) - b_3^{S1} (10X_A - \frac{12625}{6} + 210\pi^2) \Big) + b_2^{S2} \left(b_0^{S1} (X_A - 119 + 12\pi^2) \right. \\ &\quad - b_1^{S1} (3X_A + 1534 - 156\pi^2) + b_2^{S1} (6X_A - 9609 + 972\pi^2) - b_3^{S1} (10X_A + \frac{118933}{3} - 4020\pi^2) \Big) \\ &\quad + b_3^{S2} \left(b_0^{S1} (X_A + \frac{2956}{9} - \frac{100}{3}\pi^2) - b_1^{S1} (3X_A - \frac{20743}{3} + 700\pi^2) \right. \\ &\quad + b_2^{S1} (6X_A + \frac{198332}{3} - 6700\pi^2) - b_3^{S1} (10X_A - \frac{3585910}{9} + \frac{121100}{3}\pi^2) \Big) \Big] \\ &\quad \left. - \bar{\gamma}_\chi^{S1} \bar{\gamma}_\chi^{S2} X_A^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4-26)$$

$$\begin{aligned} A_3^i(S_1 S_2) &\approx -6\pi\alpha_s \left\{ \bar{\gamma}_\chi^{S1} \left(b_0^{S2} (X_A^2 - 2X_A + \frac{\pi^2}{3}) + 3b_1^{S2} (X_A^2 - 4X_A + 4 + \frac{\pi^2}{3}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 6b_2^{S2} (X_A^2 - \frac{16}{3}X_A + \frac{15}{2} + \frac{\pi^2}{3}) + 10b_3^{S2} (X_A^2 - \frac{13}{9}X_A + \frac{191}{18} + \frac{\pi^2}{3}) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \bar{\gamma}_\chi^{S_2} \left((b_0^{S_1}(X_A^2 - 2X_A + \frac{\pi^2}{3} - 3b_1^{S_1}(X_A^2 - 4X_A + 4 + \frac{\pi^2}{3}) \right. \\
 & \left. + 6b_2^{S_1}(X_A^2 - \frac{16}{3}X_A + \frac{15}{2} + \frac{\pi^2}{3}) - 10b_3^{S_1}(X_A^2 - \frac{13}{9}X_A + \frac{191}{18} + \frac{\pi^2}{3})) \right) \Big\}, \quad (4-27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3^f(S_1 S_2) \approx & -6\pi\alpha_s X_A \left\{ \bar{\gamma}_\chi^{S_1} \left(b_0^{S_2}(2X_A - 1) + b_1^{S_2}(6X_A - 11) + b_2^{S_2}(12X_A - 31) + b_3^{S_2}(20X_A - \frac{187}{3}) \right) \right. \\
 & \left. - \bar{\gamma}_\chi^{S_2} \left(b_0^{S_1}(2X_A - 1) - b_1^{S_1}(6X_A - 11) + b_2^{S_1}(12X_A - 31) - b_3^{S_1}(20X_A - \frac{187}{3}) \right) \right\}, \quad (4-28)
 \end{aligned}$$

$$A_1^f(S_1 S_2) = A_2^f(SS) = 0. \quad (4-29)$$

硬旁观者图和湮灭图的贡献存在端点发散，可以通过参数化方案解决：

$$X_H = \ln \left(\frac{m_B}{\Lambda_h} \right) (1 + \rho_H e^{i\phi_H}). \quad (4-30)$$

$$X_A = \ln \left(\frac{m_B}{\Lambda_h} \right) (1 + \rho_A e^{i\phi_A}). \quad (4-31)$$

其中， $\rho_{H,A}$ 和 $\phi_{H,A}$ 为湮灭参数，这些贡献都是在能标 $\Lambda_h = m_b$ 下计算的。

4.4 数值结果和讨论

本文采用上述所给出输入参数和两组湮灭参数： $(\rho_A^i, \phi_A^i) = (\rho_A^f, \phi_A^f) = (1, -55^\circ)$ 和 $(\rho_A^i, \phi_A^i) = (2.98, -105^\circ)$, $(\rho_A^f, \phi_A^f) = (1.18, -40^\circ)$ ，通过使用QCDF的方法，分别在S1和S2方案下给出了 $B \rightarrow SS(K_0^*(1430), a_0(1450))$ 衰变的分支比和CP破坏，并分析了湮灭图的贡献。在分支比和CP破坏的结果中，第一个误差来源于CKM 矩阵元和夸克质量，第二个误差来源于衰变常数、形状因子和盖根鲍尔矩。

根据表4-3和表4-4，可以发现在S1和S2方案下，对分支比的预测很明显是不同的，并且在S2方案下得到的分支比结果相对较大，这是因为在S2方案下计算出来的标量介子的衰变常数和 $B \rightarrow K^*(1430), a_0(1450)$ 跃迁过程的形状因子相对比较大而造成的。

$B \rightarrow SS$ 衰变的色允许过程和色压低过程的振幅可以近似为以下形式：

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2}\mathcal{A}(B^- \rightarrow a_0^- a_0^0) & \propto A_{a_0^0 a_0^-} [\delta_u^p \alpha_1] + A_{a_0^- a_0^0} [\delta_u^p \alpha_2], \\
 \mathcal{A}(\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^+ a_0^-) & \propto A_{a_0^+ a_0^-} [\delta_u^p (\alpha_1 + \beta_1)], \\
 \mathcal{A}(\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*+} a_0^-) & \propto A_{K_0^{*+} a_0^-} [\delta_u^p \alpha_1 + \beta_3], \\
 -\mathcal{A}(\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^0 a_0^0) & \propto A_{a_0^0 a_0^0} [\delta_u^p (\alpha_2 - \beta_1)], \\
 \sqrt{2}\mathcal{A}(\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*0} a_0^0) & \propto A_{K_0^{*0} a_0^0} [\delta_u^p \alpha_2 - \beta_3], \quad (4-32)
 \end{aligned}$$

通常来讲, $B \rightarrow PP, PV$ 的色允许树图过程 (Class-T) 的衰变是 α_1 占主导, 因此轻夸克的质量、硬旁观者散射和湮灭振幅的贡献对这些过程的影响并不显著。然而在 $B \rightarrow SS$ 的衰变中, 来自 α_1 项的贡献被因子 $\bar{\mu}_S^{-1}$ 压低, 这会导致 $\alpha_1 \bar{\mu}_S^{-1}$ 的结果比 $B \rightarrow PP, PV$ 小 1-2 个量级, 因此, 计算得到的色允许树图过程的分支比结果比较小, 大约是 10^{-7} 。对于以企鹅图贡献为主的衰变, 因子 $\bar{\mu}_S^{-1}$ 并不会影响分支比的结果。

实验上, Belle 合作组对 $\bar{B}_d^0 \rightarrow K_0^*(1430) \bar{K}_0^*(1430)^0$ 衰变的分支比的初步测量做出了报告^[71]:

$$\mathcal{B}(\bar{B}_d^0 \rightarrow K_0^*(1430) \bar{K}_0^*(1430)^0) = (3.21_{-2.85}^{+2.89+2.31}) \times 10^{-6}, \quad (4-33)$$

其中, 第一个误差是统计误差, 第二个误差是系统误差。从表(4-3)可以发现QCDF在S2方案下对这个衰变模式预言的中心值: $\mathcal{B}(\bar{B}_d^0 \rightarrow K_0^*(1430) \bar{K}_0^*(1430)^0) \approx 0.29 \times 10^{-6}$, 比实验值大约小了 10 倍。然而, 实验测量的统计误差和系统误差分别高达 90% 和 72%。因此我们希望能提供和 $\mathcal{B}(\bar{B}_d^0 \rightarrow K_0^*(1430) \bar{K}_0^*(1430)^0)$ 相关的更加精确的测量结果, 用来检验理论预言和实验数据之间的一致性。

表 4-3 S1和S2方案下, $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 衰变的分支比(10^{-6}), $(\rho_A^i, \phi_A^i) = (\rho_A^f, \phi_A^f) = (1, -55^\circ)$

Decay modes	Class	S1	S2
$B^- \rightarrow a_0^- a_0^0$	T	$0.01_{-0.00}^{+0.00+0.01}$	$0.04_{-0.00-0.02}^{+0.00+0.03}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^+ a_0^-$	T	$0.19_{-0.01-0.09}^{+0.01+0.12}$	$0.55_{-0.02-0.15}^{+0.03+0.17}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*+} a_0^-$	T	$0.14_{-0.01-0.07}^{+0.01+0.09}$	$0.04_{-0.02-0.19}^{+0.03+0.23}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^0 a_0^0$	C	$0.27_{-0.01-0.16}^{+0.02+0.27}$	$0.83_{-0.04-0.30}^{+0.04+0.38}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*0} a_0^0$	C	$0.09_{-0.01-0.05}^{+0.01+0.06}$	$0.36_{-0.02-0.15}^{+0.02+0.18}$
$B^- \rightarrow a_0^0 K_0^{*-}$	P	$0.98_{-0.04-0.66}^{+0.05+0.91}$	$6.65_{-0.24-3.97}^{+0.30+5.26}$
$B^- \rightarrow a_0^- K_0^{*0}$	P	$2.05_{-0.07-1.36}^{+0.09+1.88}$	$14.13_{-0.50-8.42}^{+0.64+11.16}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^+ K_0^{*-}$	P	$1.87_{-0.07-1.26}^{+0.09+1.73}$	$12.40_{-0.44-7.40}^{+0.56+9.81}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^0 \bar{K}_0^{*0}$	P	$0.97_{-0.03-0.50}^{+0.04+0.75}$	$6.56_{-0.23-3.91}^{+0.30+5.18}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{K}_0^{*0} K_0^{*0}$	P	$1.88_{-0.07-1.23}^{+0.09+1.70}$	$14.99_{-0.54-9.18}^{+0.68+12.14}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*-} K_0^{*+}$	P	$1.73_{-0.06-1.14}^{+0.08+1.57}$	$13.98_{-0.50-8.61}^{+0.64+11.39}$
$\bar{B} \rightarrow K_0^{*-} K_0^{*0}$	P	$0.07_{-0.00-0.05}^{+0.00+0.07}$	$0.30_{-0.01-0.18}^{+0.02+0.24}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow \bar{K}_0^{*0} K_0^{*0}$	P	$0.06_{-0.00-0.04}^{+0.00+0.06}$	$0.29_{-0.01-0.17}^{+0.02+0.23}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow \bar{K}_0^{*-} K_0^{*+}$	A	$0.016_{-0.001-0.014}^{+0.001+0.020}$	$0.101_{-0.007-0.085}^{+0.008+0.112}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow a_0^0 a_0^0$	A	$0.049_{-0.002-0.036}^{+0.002+0.064}$	$0.117_{-0.005-0.052}^{+0.006+0.074}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow a_+^0 a_-^0$	A	$0.098_{-0.003-0.060}^{+0.004+0.074}$	$0.234_{-0.010-0.084}^{+0.011+0.094}$

对于纯湮灭衰变，它的振幅可以近似为以下形式：

$$\mathcal{A}(\bar{B}_s \rightarrow a_0^0 a_0^0) \propto B_{a_0^0 a_0^0} [2b_4^c] \quad (4-34)$$

$$\mathcal{A}(\bar{B}_s \rightarrow a_0^+ a_0^-) \propto B_{a_0^+ a_0^-} [b_4^c] + B_{a_0^- a_0^+} [b_4^c] \quad (4-35)$$

$$\mathcal{A}(\bar{B}_d^0 \rightarrow K_0^{*-} K_0^{*+}) \propto A_{K_0^{*-} K_0^{*+}} [\delta_{\mu}^p \beta_1 + \beta_4^p] + B_{K_0^{*-} K_0^{*+}} [b_4^p] \quad (4-36)$$

表 4-4 S1和S2方案下， $B \rightarrow SS$ ($S = K_0^*(1430), a_0(1450)$) 衰变的分支比(10^{-6})， $(\rho_A^i, \phi_A^i) = (2.98, -105^\circ), (\rho_A^f, \phi_A^f) = (1.18, -40^\circ)$

Decay modes	Class	S1	S2
$B^- \rightarrow a_0^- a_0^0$	T	$0.03_{-0.00}^{+0.00+0.02}$	$0.10_{-0.01}^{+0.01+0.06}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^+ a_0^-$	T	$0.37_{-0.02}^{+0.02+0.12}$	$0.63_{-0.04}^{+0.05+0.25}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*+} a_0^-$	T	$0.14_{-0.01}^{+0.01+0.04}$	$0.49_{-0.03}^{+0.03+0.30}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^0 a_0^0$	C	$0.63_{-0.04}^{+0.05+0.31}$	$1.17_{-0.08}^{+0.09+0.73}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*0} a_0^0$	C	$0.12_{-0.01}^{+0.01+0.04}$	$0.51_{-0.03}^{+0.04+0.33}$
$B^- \rightarrow a_0^0 K_0^{*-}$	P	$0.82_{-0.03}^{+0.04+0.26}$	$5.07_{-0.16}^{+0.23+1.03}$
$B^- \rightarrow a_0^- K_0^{*0}$	P	$1.64_{-0.05}^{+0.07+0.49}$	$10.58_{-0.33}^{+0.47+8.37}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^+ K_0^{*-}$	P	$1.70_{-0.05}^{+0.08+0.56}$	$10.42_{-0.33}^{+0.46+8.29}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^0 \bar{K}_0^{*0}$	P	$0.86_{-0.03}^{+0.04+0.27}$	$5.44_{-0.17}^{+0.24+4.30}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{K}_0^{*0} K_0^{*0}$	P	$0.54_{-0.02}^{+0.02+0.15}$	$5.94_{-0.19}^{+0.26+5.81}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*-} K_0^{*+}$	P	$0.61_{-0.02}^{+0.03+0.17}$	$6.65_{-0.21}^{+0.30+6.56}$
$\bar{B} \rightarrow K_0^{*-} K_0^{*0}$	P	$0.07_{-0.00}^{+0.00+0.03}$	$0.25_{-0.01}^{+0.01+0.22}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow \bar{K}_0^{*0} K_0^{*0}$	P	$0.05_{-0.00}^{+0.00+0.02}$	$0.11_{-0.01}^{+0.01+0.12}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow \bar{K}_0^{*-} K_0^{*+}$	A	$0.107_{-0.007}^{+0.008+0.143}$	$0.562_{-0.040}^{+0.042+0.619}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow a_0^0 a_0^0$	A	$0.383_{-0.012}^{+0.017+0.509}$	$0.659_{-0.027}^{+0.032+0.415}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow a_0^+ a_0^-$	A	$0.766_{-0.026}^{+0.035+0.596}$	$1.318_{-0.054}^{+0.064+0.527}$

上面的振幅表明纯湮灭过程的的振幅是幂次压低的，表 4-3和表 4-4中 $B \rightarrow SS$ 衰变过程分支比结果表明纯湮灭过程分支比的结果非常小，为 $\mathcal{O}(10^{-8}) - \mathcal{O}(10^{-6})$ 。

- 纯湮灭衰变的分支比的理论预测值与湮灭参数有关，当湮灭参数取 $(\rho_A^i, \phi_A^i) = (2.98, -105^\circ), (\rho_A^f, \phi_A^f) = (1.18, -40^\circ)$ 时得到的分支比结果比湮灭参数取 $(\rho_A^i, \phi_A^i) = (\rho_A^f, \phi_A^f) = (1, -55^\circ)$ 时得到的分支比结果大得多，这说明湮灭参数对纯湮灭衰变的分支比起着非常重要的作用。
- 在Beneke之前的工作中^[53]，用QCDF的方法对 $\mathcal{B}(B_s \rightarrow K^+ K^-)$ 的分支比的理论预言和实验符合的很好，而对 $\mathcal{B}(B_s \rightarrow \pi^+ \pi^-)$ 的分支比的理论预言小于实验测量值。这意味着 $B_{u,d}$ 和 B_s 的湮灭衰变振幅之间存在着较大的湮灭修正和味

对称破缺效应。当湮灭参数为 $(\rho_A^i, \phi_A^i) = (\rho_A^f, \phi_A^f) = (1, -55^\circ)$ 时, 在S2方案下得到的分支比结果为: $\mathcal{B}(\bar{B}_s \rightarrow a_0^+ a_0^-) = 0.234 \times 10^{-6}$, $\mathcal{B}(\bar{B}_s \rightarrow K_0^{*-} K_0^{*+}) = 0.101 \times 10^{-6}$, 和Beneke 预言的纯湮灭衰变的分支比 $\mathcal{B}(B_s \rightarrow \pi^+ \pi^-) = 0.155 \times 10^{-6}$, $\mathcal{B}(B_s \rightarrow K^+ K^-) = 0.070 \times 10^{-6}$ 在误差范围内几乎相等。因此, 这就意味着 $\bar{B}_s \rightarrow a_0^+ a_0^-$ 和 $\bar{B}_d \rightarrow K_0^{*-} K_0^{*+}$ 的衰变中存在着较大的味对称破缺效应, 需要更多的实验观测和理论预言来研究其中的味对称破缺效应以及可能存在的QCD动力学。

截止到目前, B介子衰变到末态为两个标量介子的非轻衰变过程的CP破坏还没有被高能物理实验观测到。我们采用QCD因子化的方法, 分别在S1和S2方案下计算了 $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 衰变的CP破坏, 如表4-5和表4-6 所示。在之前的工作中, 人们给出了 $B_{d,s} \rightarrow K_0^{*+} K_0^{*-}$ 的CP破坏^[87]。对于 $B_u \rightarrow SS$ 衰变, 只涉及到了直接CP破坏, 而对于 $B_{d,s} \rightarrow SS$ 的衰变, 应该考虑 $\bar{B}_{d,s} - B_{d,s}$ 之间的混合。通过比较表4-5和表4-6, 我们发现湮灭参数 (ρ_A, ϕ_A) 的改变对纯湮灭 $\bar{B}_s^0 \rightarrow a_0^+ a_0^-$ 过程的混合CP没

表 4-5 S1和S2方案下, $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 衰变的CP不对称性(10%), $(\rho_A^i, \phi_A^i) = (\rho_A^f, \phi_A^f) = (1, -55^\circ)$

Decay modes	S ₁		S ₂	
	A_{CP}^{dir}	A_{CP}^{mix}	A_{CP}^{dir}	A_{CP}^{mix}
$B^- \rightarrow a_0^- a_0^0$	$-2.37^{+0.09+0.53}_{-0.09-0.53}$		$-3.89^{+0.15+0.21}_{-0.15-0.21}$	
$B^- \rightarrow a_0^0 K_0^{*-}$	$4.53^{+0.15+1.13}_{-0.14-1.43}$		$5.19^{+0.17+1.54}_{-0.17+2.04}$	
$B^- \rightarrow a_0^- \bar{K}_0^{*0}$	$1.16^{+0.03+0.15}_{-0.03-0.10}$		$1.68^{+0.05+0.13}_{-0.05-0.13}$	
$B^- \rightarrow K_0^{*-} \bar{K}_0^{*-}$	$-27.35^{+0.94+1.36}_{-0.92-1.66}$		$-48.17^{+1.49+12.96}_{-1.44-9.18}$	
$\bar{B}_s^0 \rightarrow a_0^+ K_0^{*-}$	$8.24^{+0.26+0.96}_{-0.26-1.01}$		$10.24^{+0.32+0.24}_{-0.32-0.60}$	
$\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*-} a_0^-$	$-25.28^{+1.09+7.00}_{-1.07-7.80}$		$-30.51^{+1.31+13.36}_{-1.28-15.40}$	
$\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^+ a_0^-$	$51.26^{+1.40+4.30}_{-1.42-4.21}$	$70.48^{+4.49+5.78}_{-4.66-5.72}$	$52.09^{+1.46+12.03}_{-1.54-14.57}$	$76.95^{+3.50+11.07}_{-3.75-11.19}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^0 a_0^0$	$31.71^{+0.96+3.72}_{-1.19-4.18}$	$62.74^{+6.04+9.28}_{-4.61-8.66}$	$16.29^{+0.56+12.99}_{-0.60-15.04}$	$72.93^{+5.38+6.29}_{-5.50-6.49}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^0 \bar{K}_0^{*0}$	$5.18^{+0.16+1.97}_{-0.16-1.64}$	$-78.32^{+1.80+0.87}_{-1.73-0.80}$	$6.85^{+0.21+1.34}_{-0.21-1.15}$	$-76.96^{+1.81+1.07}_{-1.74-1.03}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow \bar{K}_0^{*0} K_0^{*0}$	$-5.29^{+0.22+2.03}_{-0.21-2.54}$	$15.14^{+0.59+2.31}_{-0.60-2.17}$	$-17.75^{+0.77+17.71}_{-0.76-20.43}$	$32.68^{+1.23+3.81}_{-1.26-6.13}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow K_0^{*-} K_0^{*+}$	$7.84^{+0.36+1.97}_{-0.34-1.65}$	$-41.56^{+6.61+3.80}_{-6.17-4.73}$	$1.73^{+0.08+1.14}_{-0.07-1.22}$	$-59.00^{+5.48+0.71}_{-5.12-0.68}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*-} K_0^{*+}$	$18.03^{+0.60+1.64}_{-0.58-3.13}$	$-11.42^{+0.35+10.29}_{-0.35-9.36}$	$3.03^{+0.25+6.44}_{-0.18-6.60}$	$-7.62^{+0.25+1.79}_{-0.24-1.38}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*0} a_0^0$	$-40.58^{+1.54+13.35}_{-1.42-13.47}$	$64.94^{+5.62+12.52}_{-5.83-13.57}$	$-45.64^{+1.58+24.10}_{-1.46-31.25}$	$51.48^{+6.74+11.45}_{-6.83-13.04}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{K}_0^{*0} K_0^{*0}$	$1.61^{+0.05+0.11}_{-0.05-0.17}$	$-0.52^{+0.02+0.48}_{-0.02-0.43}$	$0.93^{+0.03+0.63}_{-0.03-0.60}$	$-1.14^{+0.04+0.10}_{-0.04-0.06}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow a_0^0 a_0^0$		$27.62^{+0.84+1.67}_{-0.84-1.67}$		$27.62^{+0.84+0.50}_{-0.84-0.50}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow a_0^+ a_0^-$		$27.62^{+0.84+1.67}_{-0.84-1.67}$		$27.62^{+0.84+0.50}_{-0.84-0.50}$

表 4-6 S1和S2方案下, $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 衰变的CP不对称性(10%), $(\rho_A^i, \phi_A^i) = (2.98, -105^\circ), (\rho_A^f, \phi_A^f) = (1.18, -40^\circ)$

Decay modes	S ₁		S ₂	
	A_{CP}^{dir}	A_{CP}^{mix}	A_{CP}^{dir}	A_{CP}^{mix}
$B^- \rightarrow a_0^- a_0^0$	$-2.93^{+0.11+0.65}_{-0.11-0.65}$		$-4.15^{+0.16+0.22}_{-0.17-0.23}$	
$B^- \rightarrow a_0^0 K_0^{*-}$	$0.99^{+0.04+1.50}_{-0.04-1.78}$		$2.24^{+0.08+0.95}_{-0.07+1.30}$	
$B^- \rightarrow a_0^- \bar{K}_0^{*0}$	$0.17^{+0.01+0.21}_{-0.01-0.18}$		$0.40^{+0.01+0.14}_{-0.01-0.14}$	
$B^- \rightarrow K_0^{*-} \bar{K}_0^{*-}$	$3.40^{+0.13+4.10}_{-0.13-7.52}$		$-1.94^{+0.08+7.99}_{-0.09-9.52}$	
$\bar{B}_s^0 \rightarrow a_0^+ K_0^{*-}$	$6.95^{+0.22+0.39}_{-0.21-0.49}$		$7.72^{+0.24+0.43}_{-0.24-0.57}$	
$\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*-} a_0^-$	$-34.05^{+1.29+5.08}_{-1.26-4.90}$		$-39.24^{+1.46+3.95}_{-1.42-3.08}$	
$\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^+ a_0^-$	$-81.59^{+2.24+3.10}_{-2.06-2.19}$	$30.94^{+1.48+8.21}_{-1.53-9.93}$	$-89.16^{+1.68+3.42}_{-1.48-2.67}$	$-0.35^{+2.16+6.98}_{-2.12-6.94}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^0 a_0^0$	$-95.36^{+1.35+2.54}_{-1.07-2.26}$	$27.95^{+3.23+9.76}_{-3.25-11.83}$	$-99.77^{+0.39+0.90}_{-0.18-0.20}$	$-6.36^{+4.07+8.70}_{-3.90-8.99}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^0 \bar{K}_0^{*0}$	$5.88^{+0.18+1.63}_{-0.18-1.40}$	$-73.40^{+1.83+0.54}_{-1.77-0.50}$	$5.48^{+0.17+1.25}_{-0.17-1.01}$	$-72.81^{+1.83+0.34}_{-1.77-0.31}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow \bar{K}_0^{*0} K_0^{*0}$	$-12.69^{+0.51+3.65}_{-0.50-5.04}$	$6.55^{+0.24+1.16}_{-0.25-1.12}$	$-22.43^{+0.88+2.88}_{-0.86-2.65}$	$3.98^{+0.15+3.21}_{-0.15-3.96}$
$\bar{B}_d^0 \rightarrow K_0^{*-} K_0^{*+}$	$-0.31^{+0.01+1.67}_{-0.01-1.47}$	$-43.94^{+6.48+2.44}_{-6.05-2.77}$	$1.31^{+0.06+0.28}_{-0.06-0.31}$	$-57.28^{+5.61+0.91}_{-5.24-0.97}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*-} K_0^{*+}$	$10.48^{+0.33+2.19}_{-0.33-2.92}$	$9.83^{+0.31+2.57}_{-0.31-2.58}$	$11.08^{+0.34+1.57}_{-0.34-2.48}$	$8.45^{+0.26+2.41}_{-0.26-2.44}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*0} a_0^0$	$-85.18^{+1.95+9.75}_{-1.77-8.20}$	$43.95^{+2.44+14.42}_{-2.45-16.13}$	$-92.94^{+1.53+5.48}_{-0.38-3.50}$	$30.49^{+3.26+12.79}_{-8.02-12.77}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow \bar{K}_0^{*0} K_0^{*0}$	$0.90^{+0.02+0.11}_{-0.02-0.11}$	$-0.03^{+0.00+0.14}_{-0.00-0.11}$	$0.92^{+0.02+0.11}_{-0.02-0.11}$	$-0.12^{+0.00+0.14}_{-0.00-0.10}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow a_0^0 a_0^0$		$27.62^{+0.84+1.09}_{-0.84-1.09}$		$27.62^{+0.84+0.32}_{-0.84-0.32}$
$\bar{B}_s^0 \rightarrow a_0^+ a_0^-$		$27.62^{+0.84+1.09}_{-0.84-1.09}$		$27.62^{+0.84+0.32}_{-0.84-0.32}$

有影响, 这是由于 $b_{0,2}^{a_0}$ 为零造成的。

4.5 小结

本章用QCDF方法, 分别在S1 (将 $S = K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 当成两夸克激发态) 和S2 (将 $S = K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 当成两夸克基态) 方案下, 研究了 $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 的衰变。对于必要的非微扰输入参数, 都是在自洽的CLF夸克模型下计算得到的。之后, 我们在QCDF框架下给出了 $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 衰变的分支比和CP破坏, 并且分析湮灭图贡献的影响, 在本工作中也对部分衰变模式进行首次预言。结果表明, 这些衰变过程有着较大的分支比 ($10^{-7} - 10^{-5}$), 有望在Belle-II和LHCb实验中被观测到。对这些过程的研究并结合将来的实验, 将有利于我们判断 $K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 等标量粒子是两夸克基态还是第一激发态。

第五章 总结与展望

本文首先简要介绍了我们工作的研究背景、研究内容以及文章结构；接着我们详细介绍了和光前夸克模型、QCD因子化方法等相关的理论框架和计算方法；然后我们在光前夸克模型下详细研究了 $P \rightarrow (P, S, A)$ 跃迁的形状因子；最后我们在QCD因子化框架下，利用前面得到的形状因子，进而对 $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 的衰变进行了计算和唯象分析。

具体的研究内容可以分为两部分，第一部分是在光前夸克模型的框架下，分别采用SLF和CLF方法计算了 $P \rightarrow (P, S, A)$ 跃迁过程的形状因子的理论结果，并在type-II方案下给出了这些过程形状因子的数值结果和形状因子对 q^2 的依赖图像。由于采用自洽的CLF夸克模型计算得到的形状因子是类空空间的结果，因此我们需要对这个结果进行延拓，从而得到类时空间的形状因子。在延拓的过程中，我们选择不同的参数化方法，结果表明形状因子具有模型依赖性，最后我们采用的参数化方法的是BCL方法。此外，本文给出的跃迁形状因子的数值结果可以作为非微扰物理参数，用于介子衰变的唯象研究。

第二部分是，在QCDF的框架下，利用前面在自洽的CLF夸克模型下得到的形状因子，基于S1（将 $K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 作为两夸克激发态）和S2（将 $K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 作为两夸克基态）方案，研究了 $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ 的衰变，计算了该过程的分支比、CP破坏以及分析了湮灭图贡献的影响。结果表明，这些衰变过程有着较大的分支比（ $10^{-7} - 10^{-5}$ ），有望在未来的高能物理实验中被观测到，通过和将来的实验进行对比，将有利于我们对 $K_0^*(1430)$ 和 $a_0(1450)$ 等标量粒子是两夸克基态还是两夸克激发态做出一个相对肯定的判断。

随着高能物理实验深入开展，实验测量的精度将大幅提高，重味物理也将进入精确检验时代，同时更多衰变模式将会被观测到，例如末态为p波介子（标量介子、张量介子以及轴矢量介子）的B介子衰变等。这对我们进一步研究重味介子衰变动力学机制、精确检验标准模型、探索CP破坏以及超出标准模型之外的新物理迹象、提高理论预言的精度及可靠性等具有重要的科学意义。

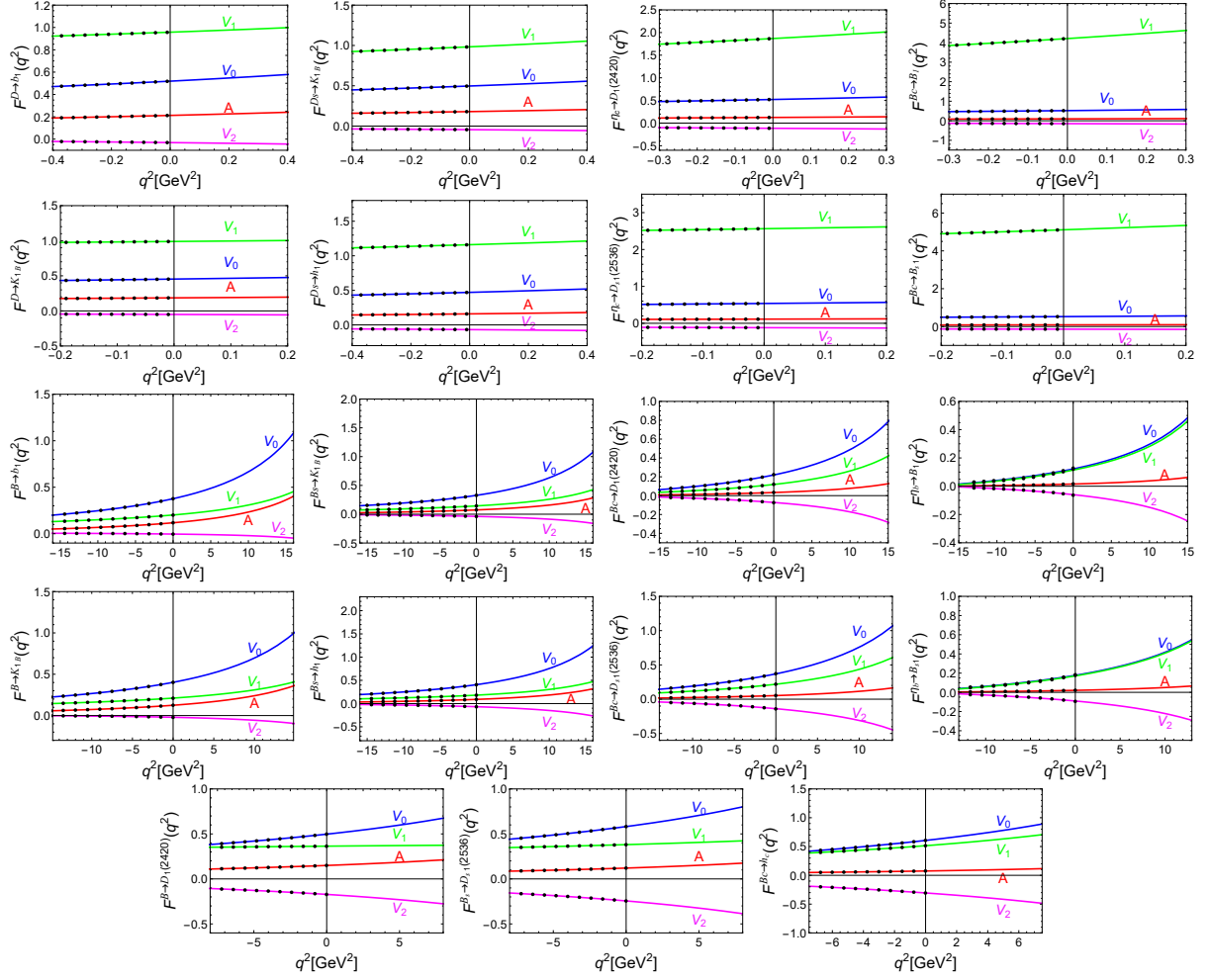
附录 A $P \rightarrow {}^1A$ 衰变形状因子结果

 图 A-1 $P \rightarrow {}^1A$ 衰变过程对 q^2 的依赖图

表 A-1 $P \rightarrow {}^1A$ 形状因子的数值结果(单位: GeV).

	$F(0)$	b_1		$F(0)$	b_1
$A^D \rightarrow b_1$	$0.21^{+0.02}_{-0.02}$	$-1.90^{+0.08}_{-0.05}$	$A^{D_s} \rightarrow K_{1B}$	$0.18^{+0.02}_{-0.03}$	$-2.90^{+0.18}_{-0.18}$
$V_0^D \rightarrow b_1$	$0.52^{+0.03}_{-0.07}$	$-0.38^{+0.01}_{-0.03}$	$V_0^{D_s} \rightarrow K_{1B}$	$0.50^{+0.03}_{-0.07}$	$-0.85^{+0.09}_{-0.07}$
$V_1^D \rightarrow b_1$	$0.96^{+0.36}_{-0.23}$	$5.80^{+0.04}_{-0.01}$	$V_1^{D_s} \rightarrow K_{1B}$	$0.98^{+0.40}_{-0.26}$	$3.80^{+0.24}_{-0.09}$
$V_2^D \rightarrow b_1$	$-0.03^{+0.06}_{-0.05}$	$-26.00^{+0.41}_{-0.34}$	$V_2^{D_s} \rightarrow K_{1B}$	$-0.04^{+0.07}_{-0.05}$	$-13.00^{+1.20}_{-1.00}$
$A^{\eta_c} \rightarrow D_1(2420)$	$0.12^{+0.03}_{-0.03}$	$-13.00^{+0.57}_{-0.35}$	$A^{B_c} \rightarrow B_1$	$0.10^{+0.02}_{-0.02}$	$-99.00^{+1.80}_{-1.20}$
$V_0^{\eta_c} \rightarrow D_1(2420)$	$0.52^{+0.02}_{-0.08}$	$-7.40^{+0.83}_{-0.87}$	$V_0^{B_c} \rightarrow B_1$	$0.51^{+0.02}_{-0.06}$	$-64.00^{+0.98}_{-0.69}$
$V_1^{\eta_c} \rightarrow D_1(2420)$	$1.87^{+1.21}_{-0.61}$	$1.00^{+0.09}_{-0.07}$	$V_1^{B_c} \rightarrow B_1$	$4.21^{+3.10}_{-1.64}$	$-32.00^{+6.70}_{-7.70}$
$V_2^{\eta_c} \rightarrow D_1(2420)$	$-0.12^{+0.12}_{-0.08}$	$-21.00^{+0.87}_{-0.83}$	$V_2^{B_c} \rightarrow B_1$	$-0.15^{+0.13}_{-0.08}$	$-85.00^{+6.80}_{-7.10}$
$A^D \rightarrow K_{1B}$	$0.19^{+0.02}_{-0.03}$	$-1.50^{+0.20}_{-0.13}$	$A^{D_s} \rightarrow h_1$	$0.16^{+0.02}_{-0.03}$	$-2.00^{+0.07}_{-0.08}$
$V_0^D \rightarrow K_{1B}$	$0.45^{+0.08}_{-0.12}$	$-0.30^{+0.13}_{-0.16}$	$V_0^{D_s} \rightarrow h_1$	$0.47^{+0.07}_{-0.13}$	$-0.40^{+0.92}_{-0.62}$
$V_1^D \rightarrow K_{1B}$	$0.99^{+0.45}_{-0.25}$	$6.40^{+0.83}_{-0.60}$	$V_1^{D_s} \rightarrow h_1$	$1.16^{+0.57}_{-0.32}$	$5.10^{+1.10}_{-1.20}$
$V_2^D \rightarrow K_{1B}$	$-0.05^{+0.07}_{-0.05}$	$-14.00^{+0.23}_{-0.25}$	$V_2^{D_s} \rightarrow h_1$	$-0.07^{+0.09}_{-0.06}$	$-8.10^{+2.60}_{-2.70}$
$A^{\eta_c} \rightarrow D_{s1}(2536)$	$0.11^{+0.02}_{-0.02}$	$-10.00^{+0.44}_{-0.78}$	$A^{B_c} \rightarrow B_{s1}$	$0.09^{+0.01}_{-0.01}$	$-91.00^{+9.10}_{-9.10}$
$V_0^{\eta_c} \rightarrow D_{s1}(2536)$	$0.54^{+0.07}_{-0.14}$	$-3.80^{+0.85}_{-0.72}$	$V_0^{B_c} \rightarrow B_{s1}$	$0.52^{+0.04}_{-0.12}$	$-66.00^{+20.00}_{-17.00}$
$V_1^{\eta_c} \rightarrow D_{s1}(2536)$	$2.56^{+1.87}_{-0.88}$	$16.00^{+5.50}_{-3.60}$	$V_1^{B_c} \rightarrow B_{s1}$	$5.12^{+5.32}_{-2.03}$	$-6.10^{+2.60}_{-3.20}$
$V_2^{\eta_c} \rightarrow D_{s1}(2536)$	$-0.12^{+0.16}_{-0.11}$	$-23.00^{+2.30}_{-2.30}$	$V_2^{B_c} \rightarrow B_{s1}$	$-0.14^{+0.17}_{-0.10}$	$-74.00^{+7.00}_{-7.00}$
$A^B \rightarrow b_1$	$0.12^{+0.03}_{-0.02}$	$-4.20^{+0.30}_{-0.22}$	$A^{B_s} \rightarrow K_{1B}$	$0.07^{+0.02}_{-0.02}$	$-6.10^{+0.02}_{-0.11}$
$V_0^B \rightarrow b_1$	$0.38^{+0.03}_{-0.03}$	$-2.10^{+0.79}_{-1.00}$	$V_0^{B_s} \rightarrow K_{1B}$	$0.33^{+0.02}_{-0.02}$	$-4.00^{+1.40}_{-1.60}$
$V_1^B \rightarrow b_1$	$0.20^{+0.05}_{-0.04}$	$0.16^{+0.30}_{-0.31}$	$V_1^{B_s} \rightarrow K_{1B}$	$0.14^{+0.05}_{-0.04}$	$-2.60^{+0.62}_{-0.62}$
$V_2^B \rightarrow b_1$	$-0.01^{+0.01}_{-0.01}$	$-40.00^{+15.00}_{-14.00}$	$V_2^{B_s} \rightarrow K_{1B}$	$-0.04^{+0.02}_{-0.02}$	$-7.50^{+0.24}_{-1.00}$
$A^{B_c} \rightarrow D_1(2420)$	$0.03^{+0.02}_{-0.02}$	$-14.00^{+1.40}_{-1.30}$	$A^{\eta_b} \rightarrow B_1$	$0.02^{+0.01}_{-0.01}$	$-54.00^{+1.20}_{-1.30}$
$V_0^{B_c} \rightarrow D_1(2420)$	$0.22^{+0.08}_{-0.07}$	$-12.00^{+1.80}_{-1.60}$	$V_0^{\eta_b} \rightarrow B_1$	$0.13^{+0.05}_{-0.04}$	$-51.00^{+1.50}_{-1.50}$
$V_1^{B_c} \rightarrow D_1(2420)$	$0.12^{+0.08}_{-0.05}$	$-12.00^{+2.20}_{-1.90}$	$V_1^{\eta_b} \rightarrow B_1$	$0.12^{+0.07}_{-0.05}$	$-53.00^{+1.50}_{-1.40}$
$V_2^{B_c} \rightarrow D_1(2420)$	$-0.07^{+0.02}_{-0.01}$	$-15.00^{+0.84}_{-0.36}$	$V_2^{\eta_b} \rightarrow B_1$	$-0.06^{+0.02}_{-0.02}$	$-56.00^{+0.36}_{-3.90}$
$A^B \rightarrow K_{1B}$	$0.13^{+0.03}_{-0.02}$	$-4.10^{+0.19}_{-0.10}$	$A^{B_s} \rightarrow h_1$	$0.09^{+0.03}_{-0.02}$	$-5.50^{+0.02}_{-0.02}$
$V_0^B \rightarrow K_{1B}$	$0.40^{+0.03}_{-0.03}$	$-2.20^{+1.00}_{-0.94}$	$V_0^{B_s} \rightarrow h_1$	$0.41^{+0.04}_{-0.05}$	$-3.50^{+0.14}_{-0.08}$
$V_1^B \rightarrow K_{1B}$	$0.21^{+0.05}_{-0.04}$	$0.48^{+0.54}_{-0.52}$	$V_1^{B_s} \rightarrow h_1$	$0.18^{+0.06}_{-0.05}$	$-1.70^{+0.62}_{-0.55}$
$V_2^B \rightarrow K_{1B}$	$-0.02^{+0.02}_{-0.02}$	$-12.00^{+3.30}_{-3.20}$	$V_2^{B_s} \rightarrow h_1$	$-0.07^{+0.02}_{-0.02}$	$-7.10^{+0.52}_{-0.81}$
$A^{B_c} \rightarrow D_{s1}(2536)$	$0.05^{+0.03}_{-0.02}$	$-13.00^{+1.40}_{-1.30}$	$A^{\eta_b} \rightarrow B_{s1}$	$0.02^{+0.01}_{-0.01}$	$-53.00^{+1.10}_{-1.00}$
$V_0^{B_c} \rightarrow D_{s1}(2536)$	$0.37^{+0.08}_{-0.09}$	$-10.00^{+1.50}_{-1.30}$	$V_0^{\eta_b} \rightarrow B_{s1}$	$0.18^{+0.06}_{-0.05}$	$-50.00^{+1.00}_{-1.00}$
$V_1^{B_c} \rightarrow D_{s1}(2536)$	$0.22^{+0.10}_{-0.08}$	$-9.10^{+2.40}_{-2.10}$	$V_1^{\eta_b} \rightarrow B_{s1}$	$0.18^{+0.09}_{-0.06}$	$-52.00^{+1.20}_{-1.10}$
$V_2^{B_c} \rightarrow D_{s1}(2536)$	$-0.14^{+0.02}_{-0.02}$	$-14.00^{+2.90}_{-1.50}$	$V_2^{\eta_b} \rightarrow B_{s1}$	$-0.09^{+0.02}_{-0.02}$	$-55.00^{+0.07}_{-0.02}$
$A^B \rightarrow D_1(2420)$	$0.15^{+0.02}_{-0.02}$	$-4.80^{+0.10}_{-0.73}$	$A^{B_s} \rightarrow D_{s1}(2536)$	$0.12^{+0.02}_{-0.01}$	$-4.80^{+0.60}_{-0.97}$
$V_0^B \rightarrow D_1(2420)$	$0.50^{+0.05}_{-0.08}$	$-3.10^{+0.13}_{-0.11}$	$V_0^{B_s} \rightarrow D_{s1}(2536)$	$0.58^{+0.04}_{-0.09}$	$-3.00^{+0.09}_{-0.06}$
$V_1^B \rightarrow D_1(2420)$	$0.36^{+0.08}_{-0.07}$	$6.40^{+2.80}_{-2.30}$	$V_1^{B_s} \rightarrow D_{s1}(2536)$	$0.38^{+0.11}_{-0.08}$	$3.20^{+2.10}_{-1.80}$
$V_2^B \rightarrow D_1(2420)$	$-0.17^{+0.04}_{-0.02}$	$-10.00^{+0.96}_{-0.23}$	$V_2^{B_s} \rightarrow D_{s1}(2536)$	$-0.25^{+0.03}_{-0.02}$	$-7.70^{+0.83}_{-0.62}$
$A^{B_c} \rightarrow h_c$	$0.08^{+0.02}_{-0.02}$	$-12.00^{+0.35}_{-0.49}$			
$V_0^{B_c} \rightarrow h_c$	$0.61^{+0.01}_{-0.07}$	$-9.60^{+2.70}_{-2.30}$			
$V_1^{B_c} \rightarrow h_c$	$0.51^{+0.21}_{-0.16}$	$-5.60^{+3.80}_{-2.80}$			
$V_2^{B_c} \rightarrow h_c$	$-0.31^{+0.04}_{-0.02}$	$-14.00^{+0.64}_{-0.69}$			

附录 B $P \rightarrow {}^3A$ 过程形状因子的结果

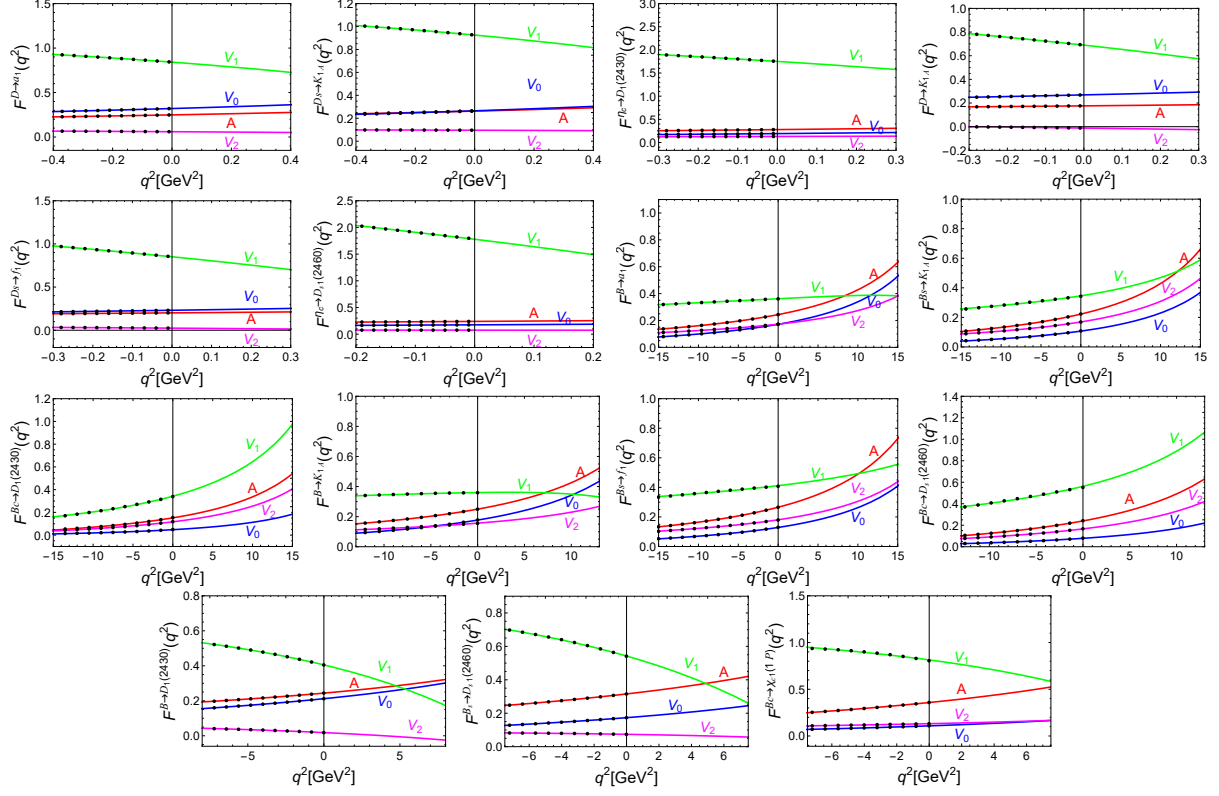


图 B-1 $P \rightarrow {}^3A$ 衰变过程对 q^2 的依赖图

表 B-1 $P \rightarrow {}^3A$ 形状因子的数值结果(单位: GeV).

$F(0)$	a	b	$F(0)$	a	b
$A^{D \rightarrow a_1}$	$0.25^{+0.05}_{-0.09}$	$-0.06^{+0.01}_{-0.01}$	$A^{D_s \rightarrow K_{1A}}$	$0.26^{+0.04}_{-0.09}$	$0.15^{+0.08}_{-0.07}$
$V_0^{D \rightarrow a_1}$	$0.32^{+0.03}_{-0.04}$	$-1.80^{+0.26}_{-0.09}$	$V_0^{D_s \rightarrow K_{1A}}$	$0.27^{+0.04}_{-0.04}$	$3.40^{+0.18}_{-0.19}$
$V_1^{D \rightarrow a_1}$	$0.84^{+0.18}_{-0.13}$	$21.00^{+4.30}_{-4.90}$	$V_1^{D_s \rightarrow K_{1A}}$	$0.93^{+0.21}_{-0.15}$	$22.00^{+4.40}_{-4.90}$
$V_2^{D \rightarrow a_1}$	$0.06^{+0.07}_{-0.08}$	$22.00^{+4.10}_{-3.60}$	$V_2^{D_s \rightarrow K_{1A}}$	$0.10^{+0.06}_{-0.08}$	$14.00^{+0.96}_{-0.91}$
$A^{\eta_c \rightarrow D_1(2430)}$	$0.28^{+0.03}_{-0.09}$	$-7.30^{+0.69}_{-0.96}$	$A^{D \rightarrow K_{1A}}$	$0.18^{+0.09}_{-0.13}$	$2.20^{+0.90}_{-1.00}$
$V_0^{\eta_c \rightarrow D_1(2430)}$	$0.19^{+0.04}_{-0.04}$	$-15.00^{+2.20}_{-1.10}$	$V_0^{D \rightarrow K_{1A}}$	$0.27^{+0.03}_{-0.05}$	$-1.90^{+0.07}_{-0.08}$
$V_1^{\eta_c \rightarrow D_1(2430)}$	$1.75^{+0.60}_{-0.40}$	$65.00^{+20.00}_{-19.00}$	$V_1^{D \rightarrow K_{1A}}$	$0.69^{+0.04}_{-0.06}$	$30.00^{+4.20}_{-15.00}$
$V_2^{\eta_c \rightarrow D_1(2430)}$	$0.13^{+0.04}_{-0.07}$	$13.00^{+0.12}_{-0.42}$	$V_2^{D \rightarrow K_{1A}}$	$-0.01^{+0.04}_{-0.04}$	$-130.00^{+5.60}_{-5.10}$
$A^{D_s \rightarrow f_1}$	$0.20^{+0.09}_{-0.14}$	$2.30^{+0.27}_{-0.15}$	$A^{\eta_c \rightarrow D_{s1}(2460)}$	$0.24^{+0.08}_{-0.15}$	$-6.20^{+0.49}_{-0.57}$
$V_0^{D_s \rightarrow f_1}$	$0.23^{+0.02}_{-0.04}$	$-2.70^{+0.53}_{-0.53}$	$V_0^{\eta_c \rightarrow D_{s1}(2460)}$	$0.17^{+0.03}_{-0.03}$	$-9.20^{+0.96}_{-0.01}$
$V_1^{D_s \rightarrow f_1}$	$0.85^{+0.16}_{-0.16}$	$35.00^{+11.00}_{-9.80}$	$V_1^{\eta_c \rightarrow D_{s1}(2460)}$	$1.78^{+0.52}_{-0.37}$	$120.00^{+2.80}_{-2.70}$
$V_2^{D_s \rightarrow f_1}$	$0.02^{+0.07}_{-0.07}$	$68.00^{+3.40}_{-3.60}$	$V_2^{\eta_c \rightarrow D_{s1}(2460)}$	$0.07^{+0.07}_{-0.08}$	$34.00^{+1.60}_{-1.10}$
$A^B \rightarrow a_1$	$0.24^{+0.02}_{-0.02}$	$-2.00^{+1.10}_{-0.99}$	$A^{B_s \rightarrow K_{1A}}$	$0.22^{+0.03}_{-0.03}$	$-3.90^{+0.02}_{-0.06}$
$V_0^B \rightarrow a_1$	$0.17^{+0.04}_{-0.03}$	$-4.20^{+0.32}_{-0.23}$	$V_0^{B_s \rightarrow K_{1A}}$	$0.11^{+0.03}_{-0.03}$	$-6.10^{+0.01}_{-0.06}$
$V_1^B \rightarrow a_1$	$0.36^{+0.04}_{-0.03}$	$4.60^{+0.75}_{-0.65}$	$V_1^{B_s \rightarrow K_{1A}}$	$0.34^{+0.05}_{-0.05}$	$1.90^{+0.22}_{-0.30}$
$V_2^B \rightarrow a_1$	$0.17^{+0.01}_{-0.01}$	$-0.38^{+0.09}_{-0.06}$	$V_2^{B_s \rightarrow K_{1A}}$	$0.17^{+0.01}_{-0.02}$	$-2.90^{+0.19}_{-0.23}$
$A^{B_c \rightarrow D_1(2430)}$	$0.15^{+0.05}_{-0.05}$	$-12.00^{+1.80}_{-1.70}$	$A^{B \rightarrow K_{1A}}$	$0.25^{+0.02}_{-0.02}$	$-1.90^{+1.00}_{-0.92}$
$V_0^{B_c \rightarrow D_1(2430)}$	$0.05^{+0.04}_{-0.02}$	$-15.00^{+1.30}_{-1.30}$	$V_0^{B \rightarrow K_{1A}}$	$0.18^{+0.04}_{-0.03}$	$-4.10^{+0.21}_{-0.12}$
$V_1^{B_c \rightarrow D_1(2430)}$	$0.34^{+0.11}_{-0.10}$	$-6.20^{+3.70}_{-3.00}$	$V_1^{B \rightarrow K_{1A}}$	$0.36^{+0.04}_{-0.04}$	$5.50^{+0.82}_{-0.74}$
$V_2^{B_c \rightarrow D_1(2430)}$	$0.12^{+0.03}_{-0.04}$	$-12.00^{+2.50}_{-2.10}$	$V_2^{B \rightarrow K_{1A}}$	$0.16^{+0.02}_{-0.03}$	$0.54^{+0.08}_{-0.06}$
$A^{B_s \rightarrow f_1}$	$0.27^{+0.02}_{-0.03}$	$-3.50^{+0.02}_{-0.01}$	$A^{B_c \rightarrow D_{s1}(2460)}$	$0.24^{+0.05}_{-0.06}$	$-9.90^{+1.60}_{-1.50}$
$V_0^{B_s \rightarrow f_1}$	$0.13^{+0.04}_{-0.03}$	$-5.60^{+0.05}_{-0.01}$	$V_0^{B_c \rightarrow D_{s1}(2460)}$	$0.08^{+0.04}_{-0.03}$	$-12.00^{+3.70}_{-1.20}$
$V_1^{B_s \rightarrow f_1}$	$0.41^{+0.03}_{-0.05}$	$3.50^{+1.50}_{-1.20}$	$V_1^{B_c \rightarrow D_{s1}(2460)}$	$0.55^{+0.11}_{-0.12}$	$-1.20^{+0.21}_{-0.68}$
$V_2^{B_s \rightarrow f_1}$	$0.18^{+0.01}_{-0.01}$	$-1.90^{+0.01}_{-0.02}$	$V_2^{B_c \rightarrow D_{s1}(2460)}$	$0.17^{+0.02}_{-0.03}$	$-8.80^{+1.90}_{-1.60}$
$A^{B \rightarrow D_1(2430)}$	$0.24^{+0.05}_{-0.07}$	$-1.50^{+0.37}_{-1.30}$	$A^{B_s \rightarrow D_{s1}(2460)}$	$0.32^{+0.05}_{-0.08}$	$-2.50^{+0.27}_{-0.16}$
$V_0^{B \rightarrow D_1(2430)}$	$0.21^{+0.02}_{-0.03}$	$-3.90^{+0.02}_{-0.04}$	$V_0^{B_s \rightarrow D_{s1}(2460)}$	$0.17^{+0.02}_{-0.02}$	$-4.50^{+0.02}_{-0.01}$
$V_1^{B \rightarrow D_1(2430)}$	$0.40^{+0.05}_{-0.06}$	$18.00^{+2.70}_{-3.30}$	$V_1^{B_s \rightarrow D_{s1}(2460)}$	$0.54^{+0.07}_{-0.06}$	$19.00^{+0.99}_{-0.89}$
$V_2^{B \rightarrow D_1(2430)}$	$0.02^{+0.07}_{-0.06}$	$58.00^{+31.00}_{-33.00}$	$V_2^{B_s \rightarrow D_{s1}(2460)}$	$0.07^{+0.07}_{-0.07}$	$11.00^{+0.37}_{-0.33}$
$A^{B_c \rightarrow \chi_{c1}}$	$0.36^{+0.01}_{-0.08}$	$-9.20^{+0.21}_{-0.20}$			
$V_0^{B_c \rightarrow \chi_{c1}}$	$0.11^{+0.03}_{-0.02}$	$-12.00^{+0.46}_{-0.56}$			
$V_1^{B_c \rightarrow \chi_{c1}}$	$0.80^{+0.11}_{-0.11}$	$20.00^{+0.45}_{-0.41}$			
$V_2^{B_c \rightarrow \chi_{c1}}$	$0.13^{+0.04}_{-0.08}$	$-1.30^{+0.13}_{-0.14}$			

附录 C $B \rightarrow SS$ 的衰变振幅

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\mathcal{A}(B^- \rightarrow a_0^- a_0^0) &= A_{a_0^- a_0^0}[\delta_u^p \alpha_2 - \alpha_4^p + \frac{3}{2}\alpha_{3,\text{EW}}^p + \frac{1}{2}\alpha_{4,\text{EW}}^p - \delta_u^p \beta_2 - \beta_3^p - \beta_{3,\text{EW}}^p] \\ &\quad + A_{a_0 a_0^-}[\delta_u^p \alpha_1 + \alpha_4^p + \alpha_{4,\text{EW}}^p + \delta_u^p \beta_2 + \beta_3^p + \beta_{3,\text{EW}}^p],\end{aligned}\quad (\text{C-1})$$

$$\mathcal{A}(B^- \rightarrow a_0^- K_0^{*0}) = A_{a_0 \bar{K}_0^*}[\alpha_4^p - \frac{1}{2}\alpha_{4,\text{EW}}^p + \delta_u^p \beta_2 + \beta_3^p + \beta_{3,\text{EW}}^p], \quad (\text{C-2})$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\mathcal{A}(B^- \rightarrow a_0^0 K_0^{*-}) &= A_{a_0 K_0^*}[\delta_u^p \alpha_1 + \alpha_4^p + \alpha_{4,\text{EW}}^p + \delta_u^p \beta_2 + \beta_3^p + \beta_{3,\text{EW}}^p] \\ &\quad + A_{K_0^* a_0}[\delta_u^p \alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_{3,\text{EW}}^p],\end{aligned}\quad (\text{C-3})$$

$$\mathcal{A}(B^- \rightarrow K_0^{*-} K_0^{*0}) = A_{K_0^{*-} K_0^{*0}}[\alpha_4^p - \frac{1}{2}\alpha_{4,\text{EW}}^p + \delta_u^p \beta_2 + \beta_3^p + \beta_{3,\text{EW}}^p], \quad (\text{C-4})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^+ a_0^-) &= A_{a_0^+ a_0^-}[\delta_u^p \alpha_1 + \alpha_4^p + \alpha_{4,\text{EW}}^p + \beta_3^p + \beta_4^p - \frac{1}{2}\beta_{3,\text{EW}}^p - \frac{1}{2}\beta_{4,\text{EW}}^p] \\ &\quad + A_{a_0^- a_0^+}[\delta_u^p \beta_1 + \beta_4^p + \beta_{4,\text{EW}}^p],\end{aligned}\quad (\text{C-5})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^0 a_0^0) &= -A_{a_0 a_0}[\delta_u^p \alpha_2 - \alpha_4^p + \frac{3}{2}\alpha_3^p + \frac{1}{2}\alpha_{4,\text{EW}}^p \\ &\quad - \delta_u^p \beta_1 - \beta_3^p - 2\beta_4^p + \frac{1}{2}\beta_{3,\text{EW}}^p - \frac{1}{2}\beta_{4,\text{EW}}^p],\end{aligned}\quad (\text{C-6})$$

$$\mathcal{A}(\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^+ K_0^{*-}) = A_{a_0 K_0^*}[\delta_u^p \alpha_1 + \alpha_4^p + \alpha_{4,\text{EW}}^p + \beta_3^p - \frac{1}{2}\beta_{3,\text{EW}}^p], \quad (\text{C-7})$$

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\mathcal{A}(\bar{B}_d^0 \rightarrow a_0^0 \bar{K}_0^{*0}) &= A_{a_0 \bar{K}_0^*}[-\alpha_4^p + \frac{1}{2}\alpha_{4,\text{EW}}^p - \beta_3^p + \frac{1}{2}\beta_{3,\text{EW}}^p] \\ &\quad + A_{\bar{K}_0^* a_0}[\delta_u^p \alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_{3,\text{EW}}^p],\end{aligned}\quad (\text{C-8})$$

$$\mathcal{A}(\bar{B}_d^0 \rightarrow K_0^{*-} K_0^{*+}) = A_{K_0^{*-} K_0^{*+}}[\delta_u^p \beta_1 + \beta_4^p + \beta_{4,\text{EW}}^p] + B_{K_0^{*+} K_0^{*-}}[b_4^p - \frac{1}{2}b_{4,\text{EW}}^p], \quad (\text{C-9})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\bar{B}_d^0 \rightarrow \bar{K}_0^{*0} K_0^{*0}) &= A_{\bar{K}_0^{*0} K_0^{*0}}[\alpha_4^p - \frac{1}{2}\alpha_{4,\text{EW}}^p + \beta_3^p + \beta_4^p - \frac{1}{2}\beta_{3,\text{EW}}^p - \frac{1}{2}\beta_{4,\text{EW}}^p] \\ &\quad + B_{K_0^{*0} \bar{K}_0^{*0}}[b_4^p - \frac{1}{2}b_{4,\text{EW}}^p],\end{aligned}\quad (\text{C-10})$$

$$\mathcal{A}(\bar{B}_s^0 \rightarrow a_0^+ a_0^-) = B_{a_0^+ a_0^-}[b_4^p - \frac{1}{2}b_{4,\text{EW}}^p] + B_{a_0^- a_0^+}[\delta_u^p b_1 + b_4^p + b_{4,\text{EW}}^p], \quad (\text{C-11})$$

$$\mathcal{A}(\bar{B}_s^0 \rightarrow a_0^0 a_0^0) = B_{a_0 a_0}[\delta_u^p b_1 + 2b_4^p + \frac{1}{2}b_{4,\text{EW}}^p], \quad (\text{C-12})$$

$$\mathcal{A}(\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*+} a_0^-) = A_{K_0^* a_0}[\delta_u^p \alpha_1 + \alpha_4^p + \alpha_{4,\text{EW}}^p + \beta_3^p - \frac{1}{2}\beta_{3,\text{EW}}^p], \quad (\text{C-13})$$

$$\sqrt{2}\mathcal{A}(\bar{B}_s^0 \rightarrow K_0^{*0} a_0^0) = A_{K_0^* a_0}[\delta_u^p \alpha_2 - \alpha_4^p + \frac{3}{2}\alpha_{3,\text{EW}}^p + \frac{1}{2}\alpha_{4,\text{EW}}^p - \beta_3^p + \frac{1}{2}\beta_{3,\text{EW}}^p], \quad (\text{C-14})$$

$$\mathcal{A}(\bar{B}_s \rightarrow \bar{K}_0^{*0} K_0^{*0}) = B_{\bar{K}_0^* K_0^*}[b_4^p - \frac{1}{2}b_{4,\text{EW}}^p]$$

$$+ A_{K_0^* \bar{K}_0^*} [\alpha_4^p - \frac{1}{2} \alpha_{4,\text{EW}}^p + \beta_3^p + \beta_4^p - \frac{1}{2} \beta_{3,\text{EW}}^p - \frac{1}{2} \beta_{4,\text{EW}}^p], \quad (\text{C-15})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\bar{B}_s \rightarrow K_0^{*-} K_0^{*+}) &= B_{K_0^{*-} K_0^{*+}} [\delta_u^p b_1 + b_4^p + b_{4,\text{EW}}^p] \\ &+ A_{K_0^{*+} K_0^{*-}} [\delta_u^p \alpha_1 + \alpha_4^p + \alpha_{4,\text{EW}}^p + \beta_3^p + \beta_4^p - \frac{1}{2} \beta_{3,\text{EW}}^p - \frac{1}{2} \beta_{4,\text{EW}}^p]. \end{aligned} \quad (\text{C-16})$$

参考文献

- [1] M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert, *et al.* QCD factorization for $B \rightarrow \pi\pi$ decays: Strong phases and CP violation in the heavy quark limit[J]. Phys. Rev. Lett. **83** (1999), 1914-1917.
- [2] M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert, *et al.* QCD factorization for exclusive, nonleptonic B meson decays: General arguments and the case of heavy light final states[J]. Nucl. Phys. B **591** (2000), 313-418.
- [3] Y. Y. Keum, H. n. Li and A. I. Sanda. Fat penguins and imaginary penguins in perturbative QCD[J]. Phys. Lett. B **504** (2001), 6-14.
- [4] Y. Y. Keum, H. N. Li and A. I. Sanda. Penguin enhancement and $B \rightarrow K\pi$ decays in perturbative QCD[J]. Phys. Rev. D **63** (2001), 054008.
- [5] C. W. Bauer, S. Fleming, D. Pirjol, *et al.* An Effective field theory for collinear and soft gluons: Heavy to light decays[J]. Phys. Rev. D **63** (2001), 114020.
- [6] C. W. Bauer, D. Pirjol and I. W. Stewart. Soft collinear factorization in effective field theory[J]. Phys. Rev. D **65** (2002), 054022.
- [7] M. Beneke, A. P. Chapovsky, M. Diehl, *et al.* Soft collinear effective theory and heavy to light currents beyond leading power[J]. Nucl. Phys. B **643** (2002), 431-476.
- [8] M. Beneke and T. Feldmann. Multipole expanded soft collinear effective theory with non-Abelian gauge symmetry[J]. Phys. Lett. B **553** (2003), 267-276.
- [9] Q. Chang, J. Sun, Y. Yang, *et al.* A combined fit on the annihilation corrections in $B_{u,d,s} \rightarrow PP$ decays within QCDF[J]. Phys. Lett. B **740** (2015), 56-60.
- [10] Q. Chang, L. X. Chen, Y. Y. Zhang, *et al.* $\bar{B}_{d,s} \rightarrow D_{d,s}^* V$ and $\bar{B}_{d,s}^* \rightarrow D_{d,s} V$ decays within QCD Factorization and Possible Puzzles[J]. Eur. Phys. J. C **76** (2016) no.10, 523.
- [11] Q. Chang, X. Li, X. Q. Li, *et al.* Study of the weak annihilation contributions in charmless $B_s \rightarrow VV$ decays[J]. Eur. Phys. J. C **77** (2017) no.6, 415.
- [12] D. Daniel, R. Gupta and D. G. Richards. A Calculation of the pion's quark distribution amplitude in lattice QCD with dynamical fermions[J]. Phys. Rev. D **43** (1991), 3715-3724.
- [13] M. Wirbel, B. Stech and M. Bauer. Exclusive Semileptonic Decays of Heavy Mesons[J]. Z. Phys. C **29** (1985), 637.
- [14] L. Ametller, A. Bramon and E. Masso. The $\pi^0 \rightarrow e^+ e^-$ and $\eta \rightarrow \mu^+ \mu^-$ decays revisited[J]. Phys. Rev. D **48** (1993), 3388-3391.
- [15] J. Gao and B. A. Li. Form-factors of pion and kaon[J]. Phys. Rev. D **61** (2000), 113006.

- [16] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov. QCD and Resonance Physics. Theoretical Foundations[J]. Nucl. Phys. B **147** (1979), 385-447.
- [17] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov. QCD and Resonance Physics: Applications[J]. Nucl. Phys. B **147** (1979), 448-518.
- [18] M. V. Terentev, On the Structure of Wave Functions of Mesons as Bound States of Relativistic Quarks[J]. Sov. J. Nucl. Phys. **24** (1976), 106.
- [19] V. B. Berestetsky and M. V. Terentev. Nucleon Form-Factors and Dynamics of the Light Front[J]. Sov. J. Nucl. Phys. **25** (1977), 347-354.
- [20] H. Y. Cheng, C. Y. Cheung, C. W. Hwang, *et al.* A Covariant light front model of heavy mesons within HQET[J]. Phys. Rev. D **57** (1998), 5598-5610.
- [21] J. Carbonell, B. Desplanques, V. A. Karmanov, *et al.* Explicitly covariant light front dynamics and relativistic few body systems[J]. Phys. Rept. **300** (1998), 215-347.
- [22] W. Jaus. Covariant analysis of the light front quark model[J]. Phys. Rev. D **60** (1999), 054026.
- [23] W. Jaus. Semileptonic Decays of B and d Mesons in the Light Front Formalism[J]. Phys. Rev. D **41** (1990), 3394.
- [24] W. Jaus and D. Wyler. The Rare Decays of $B \rightarrow K$ Lepton anti-Lepton and $B \rightarrow K^*$ Lepton anti-Lepton[J]. Phys. Rev. D **41** (1990), 3405.
- [25] S. J. Brodsky, H. C. Pauli and S. S. Pinsky. Quantum chromodynamics and other field theories on the light cone[J]. Phys. Rept. **301** (1998), 299-486.
- [26] W. Jaus. Relativistic constituent quark model of electroweak properties of light mesons[J]. Phys. Rev. D **44** (1991), 2851-2859.
- [27] W. Jaus. Semileptonic, radiative, and pionic decays of B, B^* and D, D^* mesons[J]. Phys. Rev. D **53** (1996), 1349.
- [28] H. Y. Cheng, C. Y. Cheung and C. W. Hwang. Mesonic form-factors and the Isgur-Wise function on the light front[J]. Phys. Rev. D **55** (1997), 1559-1577.
- [29] P. J. O'Donnell and G. Turan. Charm and bottom semileptonic decays[J]. Phys. Rev. D **56** (1997), 295-302.
- [30] C. Y. Cheung, C. W. Hwang and W. M. Zhang. $B \rightarrow \pi$ lepton neutrino form-factors calculated on the light front[J]. Z. Phys. C **75** (1997), 657-664.
- [31] H. M. Choi and C. R. Ji. Light cone quark model predictions for radiative meson decays[J]. Nucl. Phys. A **618** (1997), 291-316.
- [32] H. M. Choi and C. R. Ji. Mixing angles and electromagnetic properties of ground state pseudoscalar and vector meson nonets in the light cone quark model[J]. Phys. Rev. D **59** (1999), 074015.

-
- [33] H. M. Choi and C. R. Ji. Kaon electroweak form-factors in the light front quark model[J]. Phys. Rev. D **59** (1999), 034001.
 - [34] M. A. DeWitt, H. M. Choi and C. R. Ji. Radiative scalar meson decays in the light front quark model[J]. Phys. Rev. D **68** (2003), 054026.
 - [35] H. M. Choi and C. R. Ji. Distribution amplitudes and decay constants for (π , K, ρ , K^*) mesons in light-front quark model[J]. Phys. Rev. D **75** (2007), 034019.
 - [36] H. M. Choi. Decay constants and radiative decays of heavy mesons in light-front quark model[J]. Phys. Rev. D **75** (2007), 073016.
 - [37] N. Barik, S. K. Tripathy, S. Kar and P. C. Dash. Exclusive semileptonic decays of charmed and b flavored mesons[J]. Phys. Rev. D **56** (1997), 4238-4249.
 - [38] C. W. Hwang. Charge and transition form-factors of light mesons with light front quark model[J]. Eur. Phys. J. C **19** (2001), 105-111.
 - [39] C. W. Hwang. Analyses of decay constants and light-cone distribution amplitudes for s-wave heavy meson[J]. Phys. Rev. D **81** (2010), 114024.
 - [40] C. W. Hwang. Electromagnetic properties of heavy mesons in heavy quark limit[J]. Phys. Lett. B **516** (2001), 65-71.
 - [41] C. Q. Geng, C. W. Hwang, C. C. Lih, *et al.* Mesonic tensor form-factors with light front quark model[J] Phys. Rev. D **64** (2001), 114024.
 - [42] Q. Chang, S. J. Brodsky and X. Q. Li. Light-front holographic distribution amplitudes of pseudoscalar mesons and their application to B -meson decays[J] Phys. Rev. D **95** (2017) no.9, 094025.
 - [43] Q. Chang, L. L. Chen and S. Xu. Study of $B_c \rightarrow J/\psi V$ and $B_c^* \rightarrow \eta_c V$ decays within the QCD factorization[J]. J. Phys. G **45** (2018) no.7, 075005.
 - [44] H. M. Choi and C. R. Ji. Nonvanishing zero modes in the light front current[J]. Phys. Rev. D **58** (1998), 071901.
 - [45] E. E. Salpeter and H. A. Bethe. A Relativistic equation for bound state problems[J]. Phys. Rev. **84** (1951), 1232-1242.
 - [46] E. E. Salpeter. Mass corrections to the fine structure of hydrogen - like atoms[J]. Phys. Rev. **87** (1952), 328-342.
 - [47] H. M. Choi and C. R. Ji. Self-consistent covariant description of vector meson decay constants and chirality-even quark-antiquark distribution amplitudes up to twist-3 in the light-front quark model[J]. Phys. Rev. D **89** (2014) no.3, 033011.
 - [48] P. A. M. Dirac. Forms of Relativistic Dynamics[J]. Rev. Mod. Phys. **21** (1949), 392-399.
 - [49] H. Weyl. Electron and Gravitation. 1. (In German)[J]. Z. Phys. **56** (1929), 330-352.

- [50] S. J. Brodsky, G. F. de Teramond, H. G. Dosch, *et al.* Light-Front Holographic QCD and Emerging Confinement[J]. Phys. Rept. **584** (2015), 1-105.
- [51] H. Y. Cheng, C. K. Chua and C. W. Hwang. Covariant light front approach for s wave and p wave mesons: Its application to decay constants and form-factors[J]. Phys. Rev. D **69** (2004), 074025.
- [52] Q. Chang, X. N. Li, X. Q. Li, *et al.* Self-consistency and covariance of light-front quark models: testing via P , V and A meson decay constants, and $P \rightarrow P$ weak transition form factors[J]. Phys. Rev. D **98** (2018) no.11, 114018.
- [53] M. Beneke and M. Neubert. QCD factorization for $B \rightarrow PP$ and $B \rightarrow PV$ decays[J]. Nucl. Phys. B **675** (2003), 333-415.
- [54] Q. Chang, X. N. Li and L. T. Wang. Revisiting the form factors of $P \rightarrow V$ transition within the light-front quark models[J]. Eur. Phys. J. C **79** (2019) no.5, 422.
- [55] Q. Chang, L. T. Wang and X. N. Li. Form factors of $V' \rightarrow V''$ transition within the light-front quark models[J]. JHEP **12** (2019), 102.
- [56] L. Chen, Y. W. Ren, L. T. Wang, *et al.* Form factors of $P \rightarrow T$ transition within the light-front quark models[J]. Eur. Phys. J. C **82** (2022) no.5, 451.
- [57] Q. Chang, X. L. Wang and L. T. Wang. Tensor form factors of $P \rightarrow P, S, V$ and A transitions within standard and covariant light-front approaches[J]. Chin. Phys. C **44** (2020) no.8, 083105.
- [58] B. L. G. Bakker, H. M. Choi and C. R. Ji. Transition form-factors between pseudoscalar and vector mesons in light front dynamics[J]. Phys. Rev. D **67** (2003), 113007.
- [59] H. Y. Cheng and C. K. Chua. Covariant light front approach for $B \rightarrow K^* \gamma, K(1) \gamma, K^*(2) \gamma$ decays[J]. Phys. Rev. D **69** (2004), 094007.
- [60] P. Ball and V. M. Braun. Exclusive semileptonic and rare B meson decays in QCD[J]. Phys. Rev. D **58** (1998), 094016.
- [61] H. Y. Cheng and C. K. Chua. B to V, A, T Tensor Form Factors in the Covariant Light-Front Approach: Implications on Radiative B Decays[J]. Phys. Rev. D **81** (2010), 114006.
- [62] C. Bourrely, I. Caprini and L. Lellouch. Model-independent description of $B \rightarrow \pi l \nu$ decays and a determination of $|V_{ub}|$ [J]. Phys. Rev. D **79** (2009), 013008.
- [63] J. Gao, C. D. Lü, Y. L. Shen, *et al.* Precision calculations of $B \rightarrow V$ form factors from soft-collinear effective theory sum rules on the light-cone[J]. Phys. Rev. D **101** (2020) no.7, 074035.
- [64] K. C. Yang. Light-cone distribution amplitudes of axial-vector mesons[J]. Nucl. Phys. B **776** (2007), 187-257.

-
- [65] R. L. Jaffe. Multi-Quark Hadrons. 1. The Phenomenology of (2 Quark 2 anti-Quark) Mesons[J]. Phys. Rev. D **15** (1977), 267.
 - [66] R. L. Jaffe. Multi-Quark Hadrons. 2. Methods[J]. Phys. Rev. D **15** (1977), 281.
 - [67] K. Abe *et al.* [Belle], Study of three-body charmless B decays[J]. Phys. Rev. D **65** (2002), 092005.
 - [68] A. Garmash *et al.* [Belle], Evidence for large direct CP violation in $B^{+-} \rightarrow \rho(770)0K^{+-}$ from analysis of the three-body charmless $B^{+-} \rightarrow K^{+-} \pi^{+} \pi^{-}$ decay[J]. Phys. Rev. Lett. **96** (2006), 251803.
 - [69] P. Chang *et al.* [Belle], Observation of the decays $B^0 \rightarrow K^{+} \pi^{-} \pi^0$ and $B^0 \rightarrow \rho^{+} K^{-}$ [J]. Phys. Lett. B **599** (2004), 148-158.
 - [70] M. Prim *et al.* [Belle], Angular analysis of $B^0 \rightarrow \phi K^{*}$ decays and search for CP violation at Belle[J]. Phys. Rev. D **88** (2013) no.7, 072004.
 - [71] C. C. Chiang *et al.* [Belle], Search for $B^0 \rightarrow K^{*0} \bar{K}^{*0}$, $B^0 \rightarrow K^{*0} K^{*0}$ and $B^0 \rightarrow K^{+} \pi^{-} K^{\mp} \pi^{\pm}$ Decays[J]. Phys. Rev. D **81** (2010), 071101.
 - [72] B. Aubert *et al.* [BaBar], Measurements of the branching fractions of charged B decays to $K^{\pm} \pi^{\mp} \pi^{\pm}$ final states[J]. Phys. Rev. D **70** (2004), 092001.
 - [73] J. P. Lees *et al.* [BaBar], Study of CP violation in Dalitz-plot analyses of $B^0 \rightarrow K^{+} K^{-} K^0(S)$, $B^{+} \rightarrow K^{+} K^{-} K^{+}$, and $B^{+} \rightarrow K^0(S) K^0(S) K^{+}$ [J]. Phys. Rev. D **85** (2012), 112010.
 - [74] J. P. Lees *et al.* [BaBar], Amplitude Analysis of $B^0 \rightarrow K^{+} \pi^{-} \pi^0$ and Evidence of Direct CP Violation in $B \rightarrow K^{*} \pi$ decays[J]. Phys. Rev. D **83** (2011), 112010.
 - [75] B. Aubert *et al.* [BaBar], Observation of B Meson Decays to omega K^{*} and Improved Measurements for omega ρ and omega f_0 [J]. Phys. Rev. D **79** (2009), 052005.
 - [76] B. Aubert *et al.* [BaBar], Evidence for Direct CP Violation from Dalitz-plot analysis of $B^{\pm} \rightarrow K^{\pm} \pi^{\mp} \pi^{\pm}$ [J]. Phys. Rev. D **78** (2008), 012004.
 - [77] B. Aubert *et al.* [BaBar], Observation and Polarization Measurements of $B^{\pm} \rightarrow \phi K_1^{\pm}$ and $B^{\pm} \rightarrow \phi K_2^{*\pm}$ [J]. Phys. Rev. Lett. **101** (2008), 161801.
 - [78] B. Aubert *et al.* [BaBar], Time-Dependent and Time-Integrated Angular Analysis of $B \rightarrow \phi K_s \pi^0$ and $B \rightarrow \phi K^{+} \pi^{-}$ [J]. Phys. Rev. D **78** (2008), 092008.
 - [79] J. P. Lees *et al.* [BaBar], B^0 meson decays to $\rho^0 K^{*0}$, $f_0 K^{*0}$, and $\rho^{-} K^{*+}$, including higher K^{*} resonances[J]. Phys. Rev. D **85** (2012), 072005.
 - [80] B. Aubert *et al.* [BaBar], Search for the decay $B^{+} \rightarrow \bar{K}^{*} 0(892) K^{+}$ [J]. Phys. Rev. D **76** (2007), 071103.
 - [81] R. Aaij *et al.* [LHCb], Amplitude analysis of $B_s^0 \rightarrow K_s^0 K^{\pm} \pi^{\mp}$ decays[J]. JHEP **06** (2019), 114.

- [82] R. Aaij *et al.* [LHCb], Amplitude analysis of the $B_{(s)}^0 \rightarrow K^{*0} \bar{K}^{*0}$ decays and measurement of the branching fraction of the $B^0 \rightarrow K^{*0} \bar{K}^{*0}$ decay[J]. JHEP **07** (2019), 032.
- [83] P. A. Zyla *et al.* [Particle Data Group], Review of Particle Physics[J]. PTEP **2020** (2020) no.8, 083C01.
- [84] H. Y. Cheng, C. K. Chua, K. C. Yang *et al.* Revisiting charmless hadronic B decays to scalar mesons[J]. Phys. Rev. D **87** (2013) no.11, 114001.
- [85] L. Chen, M. Zhao, Y. Zhang, *et al.* Study of $B_{u,d,s} \rightarrow K_0^* (1430) P$ and $K_0^* (1430) V$ decays within QCD factorization[J]. Phys. Rev. D **105** (2022) no.1, 016002.
- [86] H. Y. Cheng, C. K. Chua and K. C. Yang. Charmless hadronic B decays involving scalar mesons: Implications to the nature of light scalar mesons[J]. Phys. Rev. D **73** (2006), 014017.
- [87] X. Liu, Z. J. Xiao and Z. T. Zou. Branching ratios and CP asymmetries of $B/s(u/d) \rightarrow K^{*0}(1430) \text{ anti-}K^{*0}(1430)$ decays in the pQCD approach[J]. J. Phys. G **40** (2013), 025002.

致 谢

时光匆匆，三年硕士学习生涯即将结束，回想起这三年，不禁感慨万千。这三年，疫情封控几乎已成为常态，学生的学习和生活都受到了很大的影响，最终能够顺利完成学位论文，离不开学院和老师的帮助，在此我要向母校的老师同学表达最诚挚的谢意。

本论文是在常钦教授和陈丽丽副教授的悉心指导下完成的，从论文的选题、开题、中期审核到现在的完成，都离不开两位老师的悉心指导和栽培。虽然两位老师平时都非常繁忙，但是只要我们在工作、学习和生活中遇到问题的时候，他们都会第一时间帮我们解决难题。而且两位老师对待工作和科研的认真严谨的态度也深深地影响着我们。在此向两位导师致以崇高的敬意。

由衷感谢孙俊峰老师、杨悦玲老师、姬清平老师、李惠静老师、宋娇娇老师、王晓琳老师、王艺龙老师、蔡芳敏老师和严鑫帅老师在我工作学习期间给予的热情帮助。

感谢王丽婷师姐和任玉宛师姐帮我认真解答在工作中遇到的各种问题，一步步教会我算形状因子、改程序；感谢赵萌非师兄和杨雷师兄不厌其烦地教我调程序。还要感谢刘文凤师姐、姚德华师兄、张亮辉师弟、乔家辉师弟、程清风师弟、李凯路师妹、马若云师妹和高雨浓师妹在我生活中的帮助

最后我要感谢我的家人，在我求学路上一直默默地支持我、鼓励我，他们给了我不断前进的底气和动力。

康悦杨

二〇二三年四月

攻读硕士学位期间完成的论文

题目：“The charmless $B \rightarrow SS(S = K_0^*(1430), a_0(1450))$ decays in QCD factorization”.

刊物：Submitted to EPJC.

独创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写的研究成果，也不包含为获得河南师范大学或其他教育机构的学位或证书所使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

签名：_____ 日期： 2023年5月21日

关于论文使用授权的说明

本人完全了解河南师范大学有关保留、使用学位论文的规定，即：有权保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权河南师范大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

签名：_____ 导师签名：_____ 日期： 2023年5月21日