

# 物理分析II

高能物理研究所 朱凯

[zhuk@ihep.ac.cn](mailto:zhuk@ihep.ac.cn)

第五届北京谱仪十一科学研讨会  
内蒙古大学，2023年9月29日-10月6日

# 主要内容与目标

- 事例选择与本底分析
  - 目标：掌握事例选择的三大原则
- 信号数
  - 目标：了解三种常用提取信号数的方法
- 效率
  - 目标：熟悉与效率相关的三个问题



本次课



将来

以李刚老师在BESIII上的工作  $\psi(2S) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$  为例

# 热身

- 接着赵明刚老师的课谈谈分支比测量
  1. 测量  $B(\psi(2S) \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi)$ ,  $B(J/\psi \rightarrow l^+l^-)$  时, 过程的末态是什么?
  2. 为什么要测量分支比, 即物理动机是什么?
  3. 分支比的测量实质上测量的什么? 但又转换成了什么的测量? 分支比的计算公式?

# 末态

- BESIII 上能探测到的末态粒子
  - 中性：光子 ( $\gamma$ )、正反中子 ( $n$  and  $\bar{n}$ )
  - 带电粒子：正反电子 ( $e^\pm$ )、正反缪子 ( $\mu^\pm$ )、正负 $\pi$ 介子 ( $\pi^\pm$ )，正负K介子 ( $K^\pm$ )、正反质子 ( $p$  and  $\bar{p}$ )
- $\psi(2S) \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi, J/\psi \rightarrow anything$  【半单举 (semi-inclusive)】
  - $\pi^+\pi^- + anything$
- $\psi(2S) \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi, J/\psi \rightarrow l^+l^-$  【遍举 (exclusive)】
  - $\pi^+\pi^-e^+e^-$  或者  $\pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$

术语园地

inclusive MC, generic MC

exclusive MC, signal MC

# 热身

- 接着赵明刚老师的课以分支比测量为例
  1. 测量  $B(\psi(2S) \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi)$ ,  $B(J/\psi \rightarrow l^+l^-)$  时, 过程的末态是什么?
  2. 为什么要测量分支比, 即物理动机是什么?
  3. 分支比的测量实质上测量的什么? 但又转换成了什么的测量? 分支比的计算公式?

# 动机

- 实验上
  - 其他测量（例如  $J/\psi \rightarrow \gamma A$ ）或实验（例如 LHCb）的输入
- 理论上
  - 末态相互作用（FSI: final state interaction）
  - QCD 多极展开、QCD 手征对称性、势模型
  - 轻子普适性

# 热身

- 接着赵明刚老师的课以分支比测量为例
  1. 测量  $B(\psi(2S) \rightarrow \pi^+\pi^-J/\psi)$ ,  $B(J/\psi \rightarrow l^+l^-)$  时, 过程的末态是什么?
  2. 为什么要测量分支比, 即物理动机是什么?
  3. 分支比的测量实质上测量的什么? 但又转换成了什么的测量? 分支比的计算公式?

# 分支比测量的实质是反应截面的测量

- 转换为信号事例数的测量，因为  $N_{sig} = \sigma \cdot L \cdot \epsilon$ （截面 $\times$ 亮度 $\times$ 效率）

$$B_{\pi\pi J/\psi} = \frac{\sigma_{\pi\pi J/\psi}}{\sigma_{tot}} = \frac{N_{\pi\pi J/\psi}}{\frac{L \cdot \epsilon_{\pi\pi J/\psi}}{\frac{N_{tot}}{L}}}$$



$$\mathcal{B}_{\pi\pi J/\psi} = \frac{N_{\pi\pi J/\psi}}{\epsilon_{\pi\pi J/\psi} \times N_{tot}}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ll} &= \frac{\mathcal{B}_{\pi\pi J/\psi} \times \mathcal{B}_{ll}}{\mathcal{B}_{\pi\pi J/\psi}} \\ &= \frac{N_{ll}/(\epsilon_{ll} \times N_{tot})}{N_{\pi\pi J/\psi}/(\epsilon_{\pi\pi J/\psi} \times N_{tot})} \\ &= \frac{N_{ll}/\epsilon_{ll}}{N_{\pi\pi J/\psi}/\epsilon_{\pi\pi J/\psi}} \end{aligned}$$

# 分支比测量的通用公式

$$B(X \rightarrow f) = \frac{N^{sig}}{\epsilon \cdot N^X}$$



- B: 待测分支比, 无量纲
- $N^{sig}$ : 信号事例数
- $N^X$ : 总事例数
- $\epsilon$ : 事例选择效率, 通常由蒙卡模拟确定, 需特别关注

拿到课题, 知道了反应道末态, 写出Br公式, 你的事例选择就开始了!

# 事例选择

目的：提高信噪比

# 事例选择 ABC

好的选择应该考虑到系统误差

- 事例选择益简、松、少
  - 有利于减少系统误差
- 利用统计原理减少误差
  - 相对测量，抵消（系统）误差
  - 同时测量，约束（统计）误差
- 利用运动学、动力学特征
  - 动量分布
  - 角分布
  - 中间窄共振

## 例子

- Track level cuts for soft pion candidates

- $|V_z| < 10\text{cm}$

- $|V_r| < 1\text{cm}$

- $|\cos\theta| < 0.80$

- $|\vec{p}| < 0.45\text{GeV}/c$

- all charged tracks satisfy above selection criteria are assumed to be pion.

$$\psi' \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$$

- $n\text{Good}+ \geq 1 \ \&\& \ n\text{Good}- \geq 1$

- $\cos\theta_{\pi^+\pi^-} < 0.95$  to remove the photon conversion

- $3.05\text{GeV}/c^2 \leq M_{\pi^+\pi^-}^{\text{rec.}} \leq 3.15\text{GeV}/c^2$

assuming all charge tracks are pions,  $M_{\pi^+\pi^-}^{\text{rec.}}$  is defined as:

$$M_{\pi^+\pi^-}^{\text{rec.}} = \sqrt{(p_{\text{ecm}} - p_{\pi^+} - p_{\pi^-})^2},$$

where  $p$  is 4 momentum of pion.

术语园地

soft, slow, low p

hard, fast, high p

# 关于挑选 $\pi$ 的更多解释

$$\psi' \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$$

- 这是一个三体衰变，母粒子和子粒子的质量等非常清楚，那么末态粒子的动量范围就很容易知道：[运动学知识](#)。
- PDG 上也可以查到
  - 末态  $\pi$  动量不超过401 MeV，考虑了分辨后 450 MeV 依然非常安全：无需考虑这个 cut 的系统误差；
  - $\pi$  的动量不高，故其动量的绝对误差也就很小；
  - $\pi^+ \pi^-$  的反冲侧是非常窄的  $J/\psi$ ，可以对  $\pi^+ \pi^-$  系统进行很好的约束，故无需粒子鉴别。

术语园地  
 $\psi(2S)$ 、 $\psi'$ 、 $\psi(3686)$

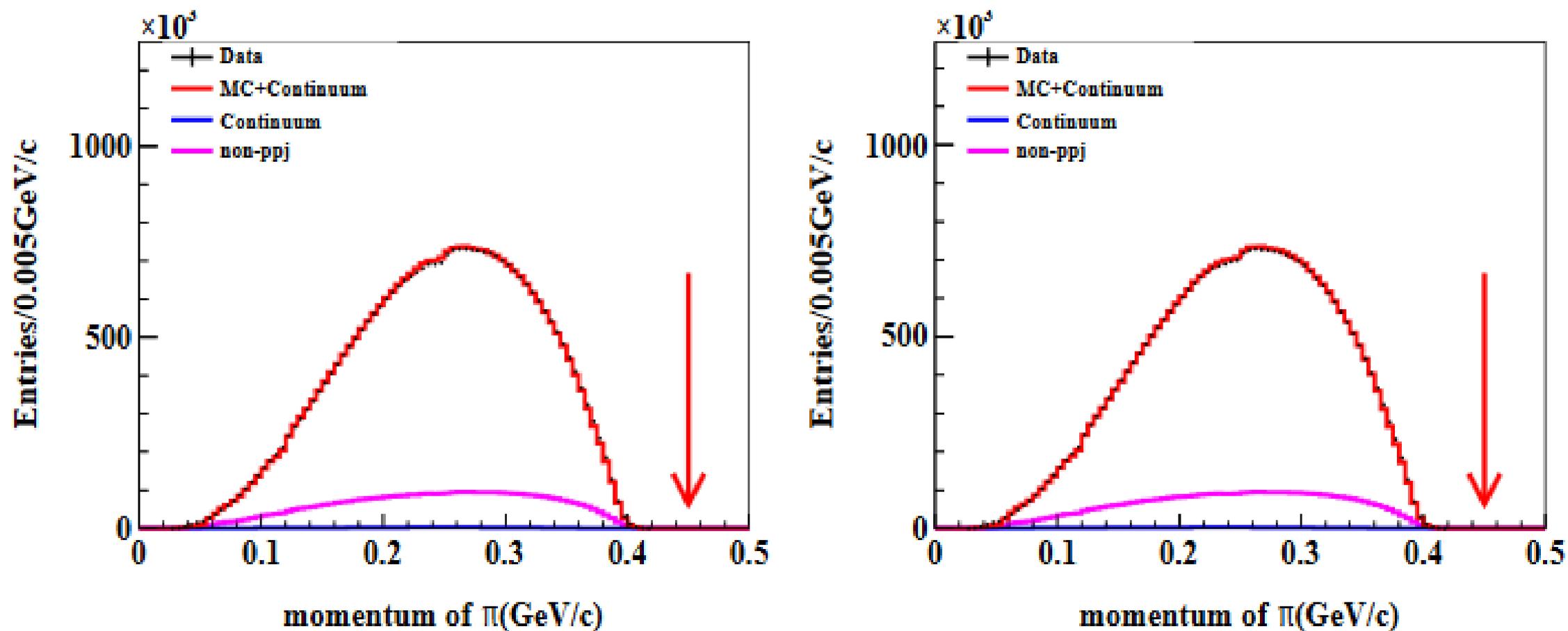


FIG. 2. The momenta of  $\pi^+$  (left) and  $\pi^-$  (right)

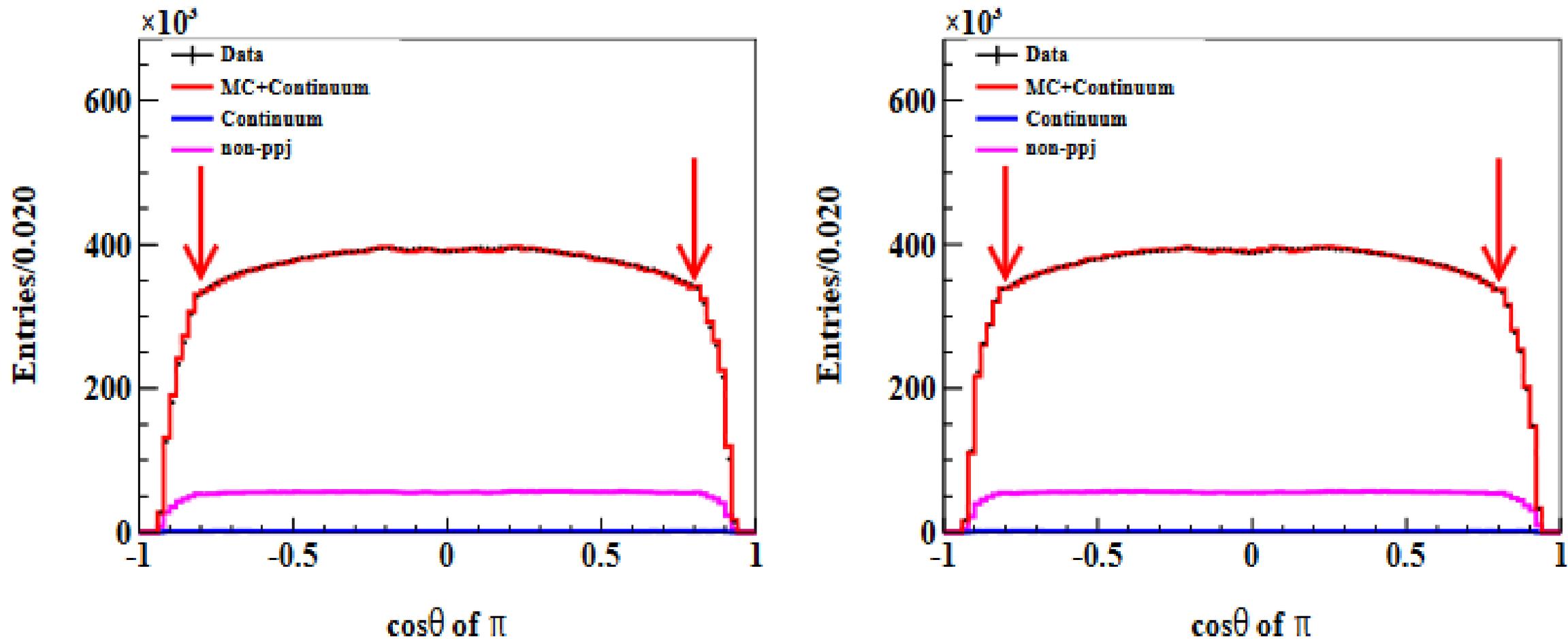


FIG. 3. The cosine of polar angle of  $\pi^+$  (left) and  $\pi^-$  (right) in lab frame

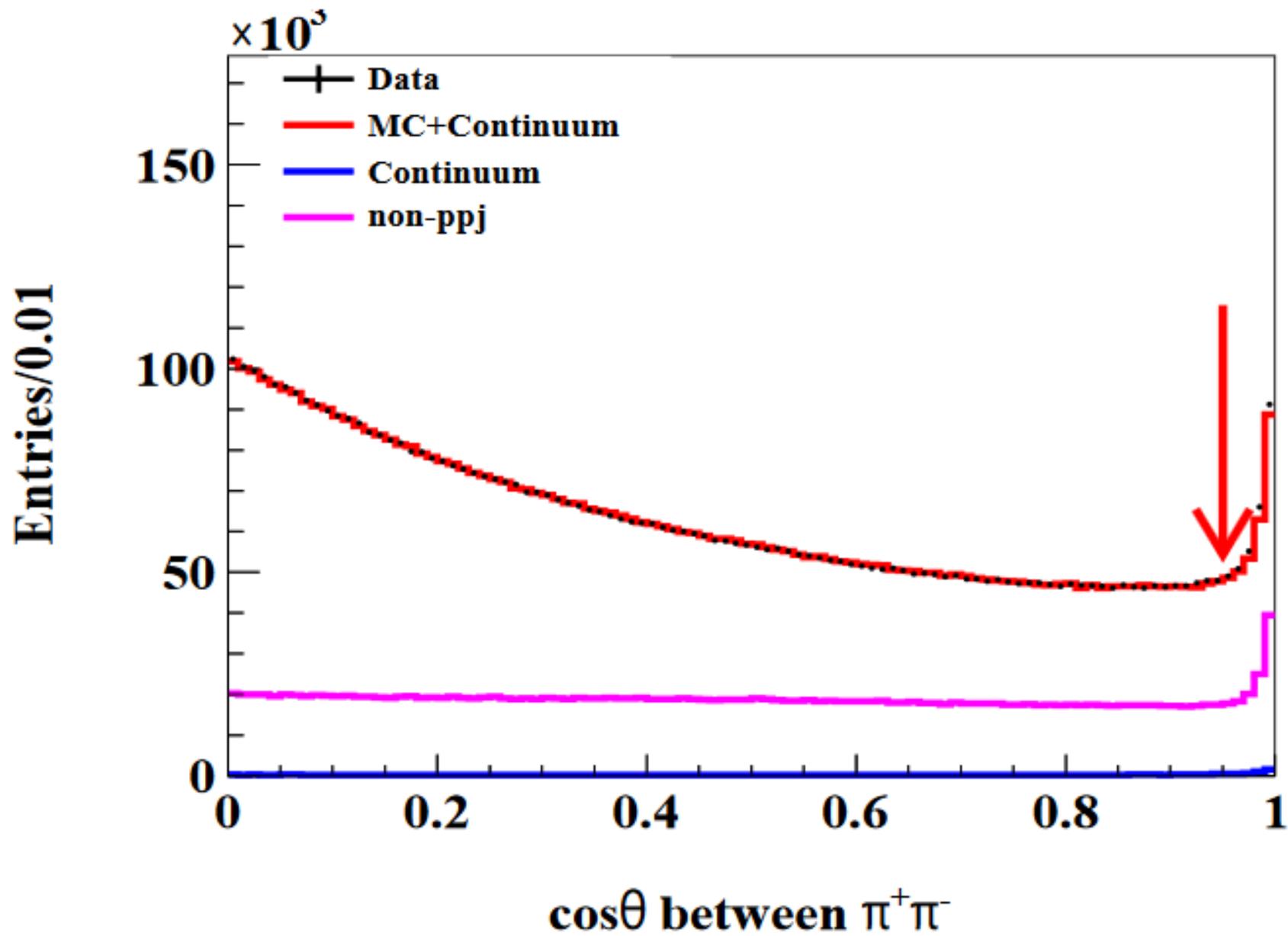
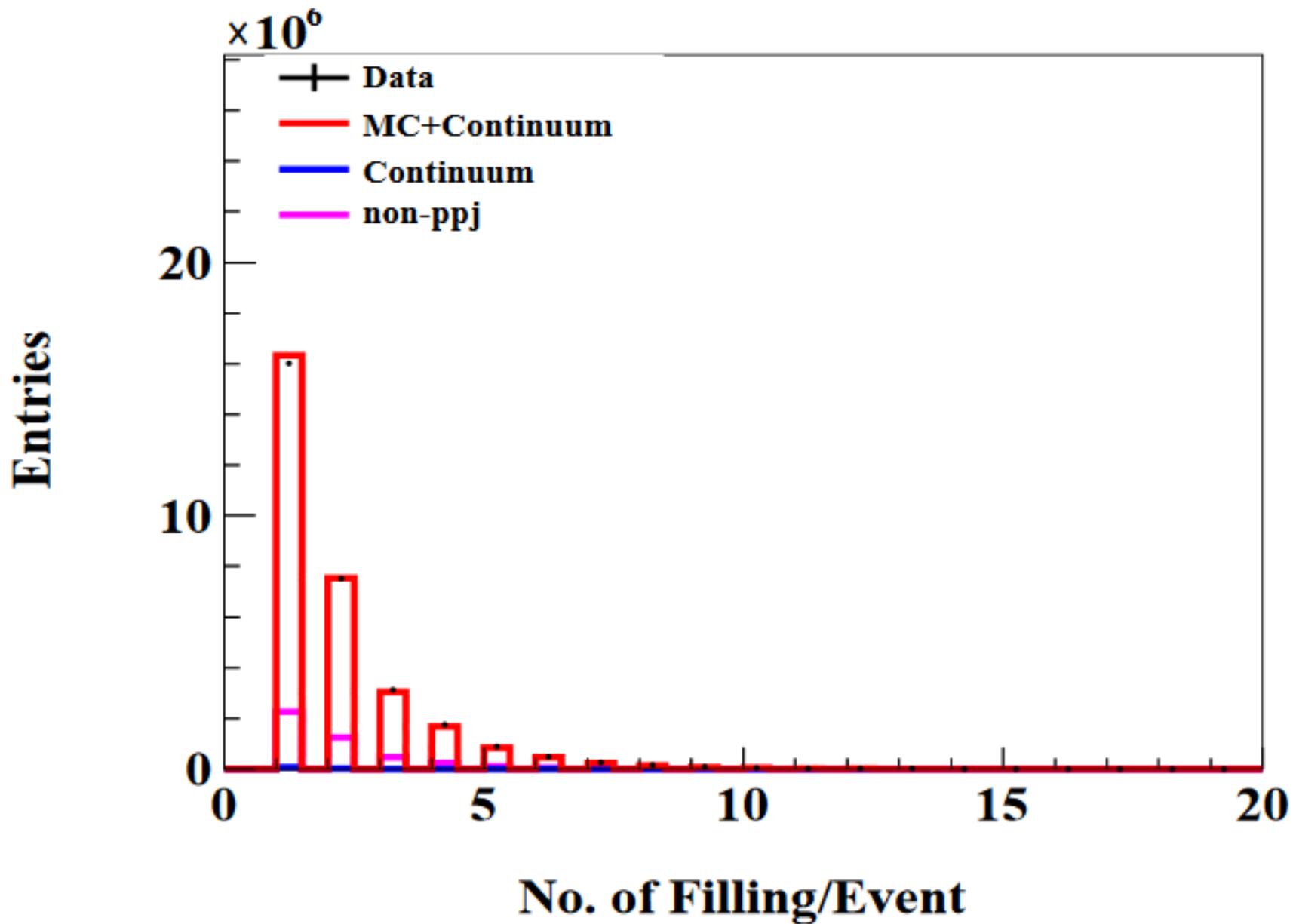
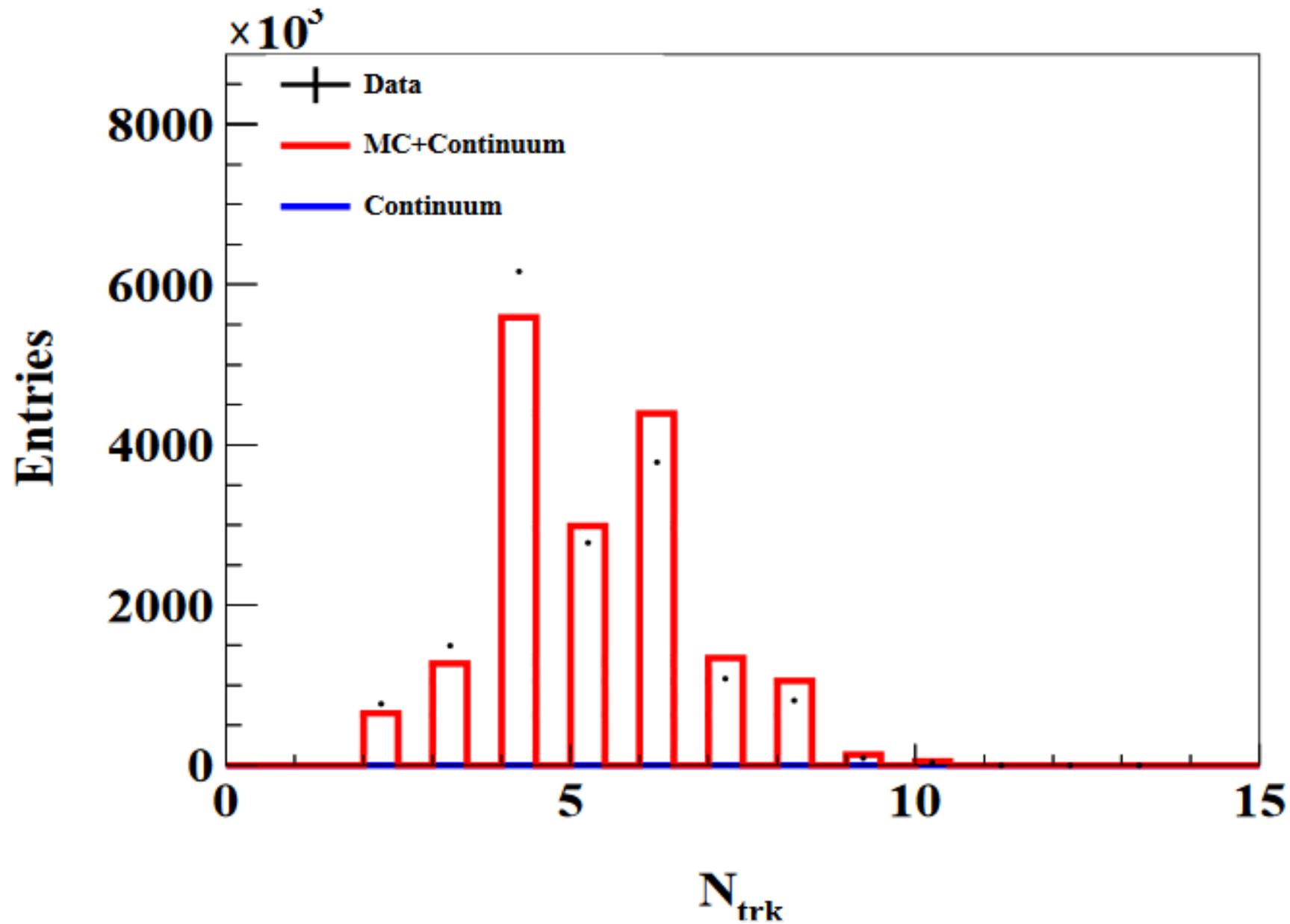


FIG. 4. Cosine distributions of the angle between two pions in  $\pi^+\pi^- J/\psi$



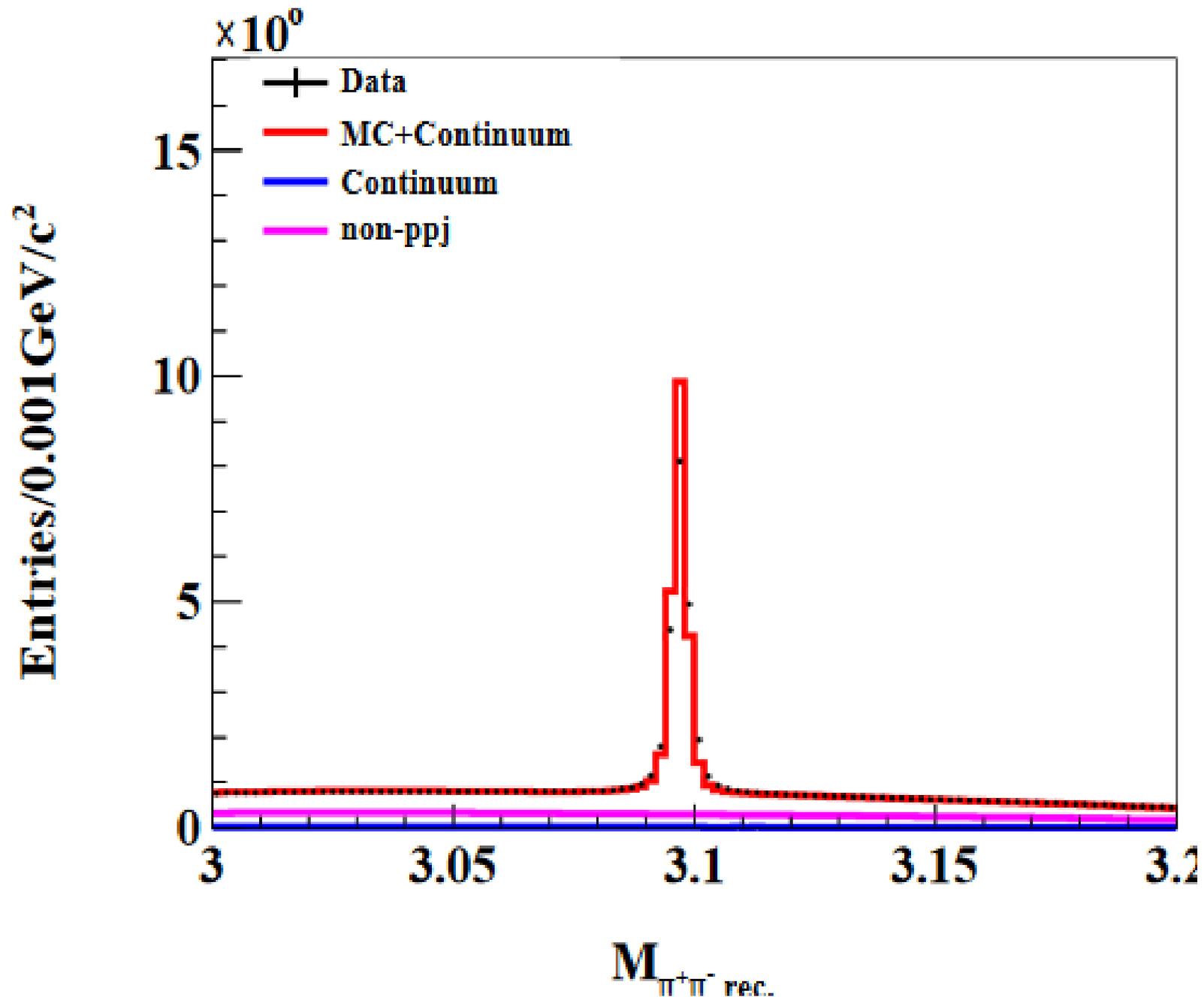
术语园地  
event 事例  
entry 记录

FIG. 5. The number of filling time of each event



术语园地  
multiplicity,  
prong

FIG. 6. The number of good tracks of each event



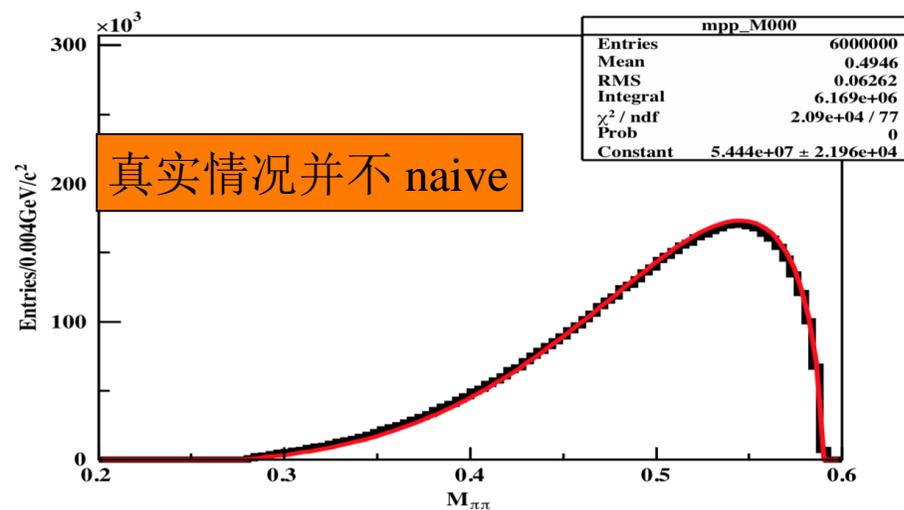
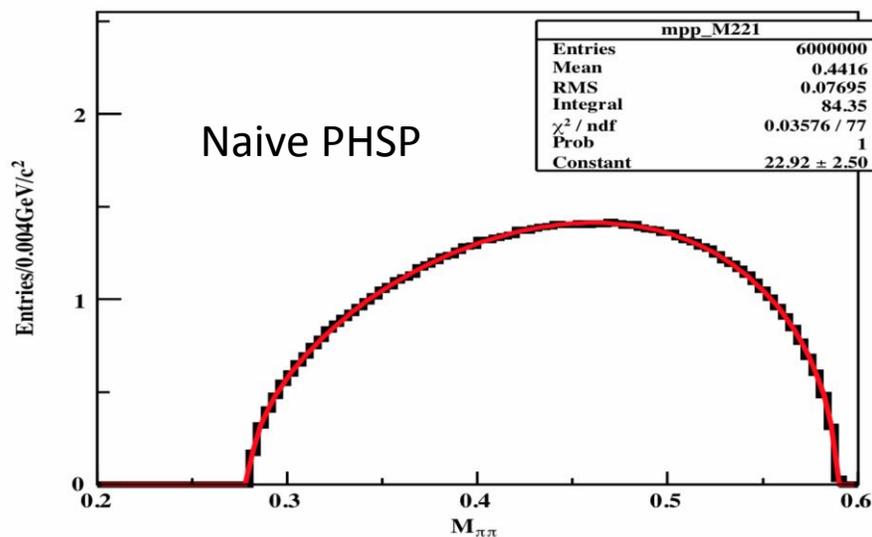
术语园地  
 信号 signal  
 本底 backgrounds (BG)

- 在物理分析中，一般用信号MC来代表信号的分布；在数据中，常常是信号与本底同时存在
- 为了方便，常常（不严谨地）将信号中的典型“峰”状分布称为信号

# $M_{\pi\pi}$ spectrum

BesEvtGen : JPIPI model

Phys. Rev. D 62, 032002



两  $\pi$  倾向于背对背,  $M_{\pi\pi}$  对效率有显著影响。

$$\frac{d\sigma}{dm_{\pi\pi}} \propto (s - 2m_{\pi\pi}^2)$$

# 例子

$$\psi(2S) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$$
$$J/\psi \rightarrow l^+ l^-$$

- Track level cuts
  - $|V_z| < 10\text{cm}$
  - $|V_r| < 1\text{cm}$
  - $|\cos\theta| < 0.80$
  - $|\vec{p}| < 2.0\text{GeV}/c$
- nGood  $\geq 4$
- The charged tracks with  $|\vec{p}| < 0.45\text{ GeV}/c$  are assumed to be pion, select the  $\pi^+\pi^-$  pair candidates by minimizing  $|M_{\pi^+\pi^-}^{rec.} - M_{J/\psi}|$
- $\cos\theta_{\pi^+\pi^-} < 0.95$
- $3.05\text{GeV}/c^2 \leq M_{\pi^+\pi^-}^{rec.} \leq 3.15\text{GeV}/c^2$
- Take the two fastest positive and negative tracks as lepton candidates, identify the  $e/\mu$  pair
  - $\mu^+\mu^-: [E/p]^+ < 0.26$  and  $[E/p]^- < 0.26$
  - $e^+e^-: [E/p]^+ > 0.80$  or  $[E/p]^- > 0.80$  or  $\sqrt{([E/p]^+ - 1)^2 + ([E/p]^- - 1)^2} < 0.4$
- $\cos\theta_{l^+l^-} < -0.95$  in lab frame.
- $2.7\text{GeV}/c^2 < m_{l^+l^-} < 3.2\text{GeV}/c^2$  for  $\pi^+\pi^-e^+e^-$  channel and  $3.0\text{GeV}/c^2 < m_{l^+l^-} < 3.2\text{GeV}/c^2$  for  $\pi^+\pi^-\mu^+\mu^-$  channel

# 轻子选择的一些说明

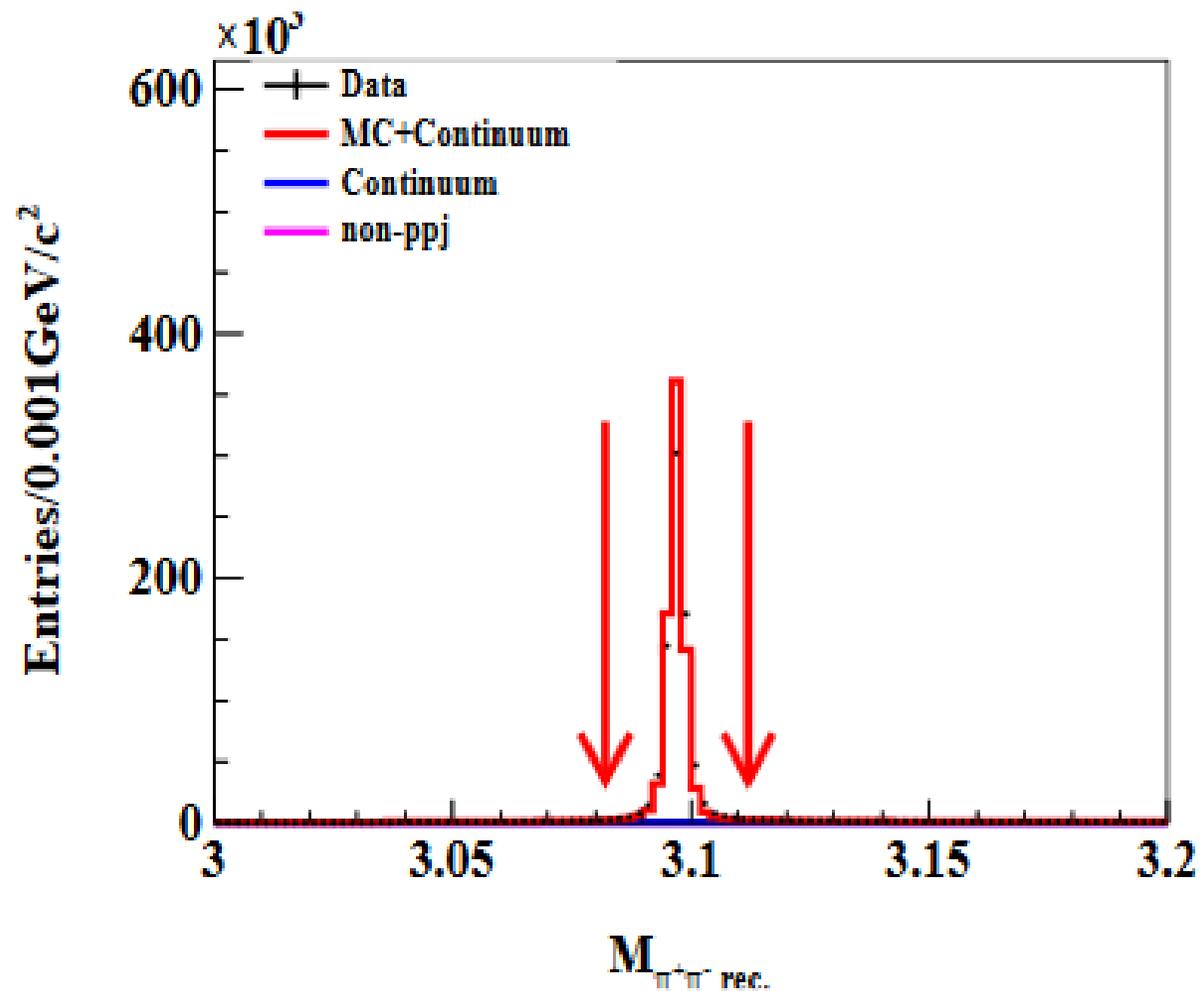
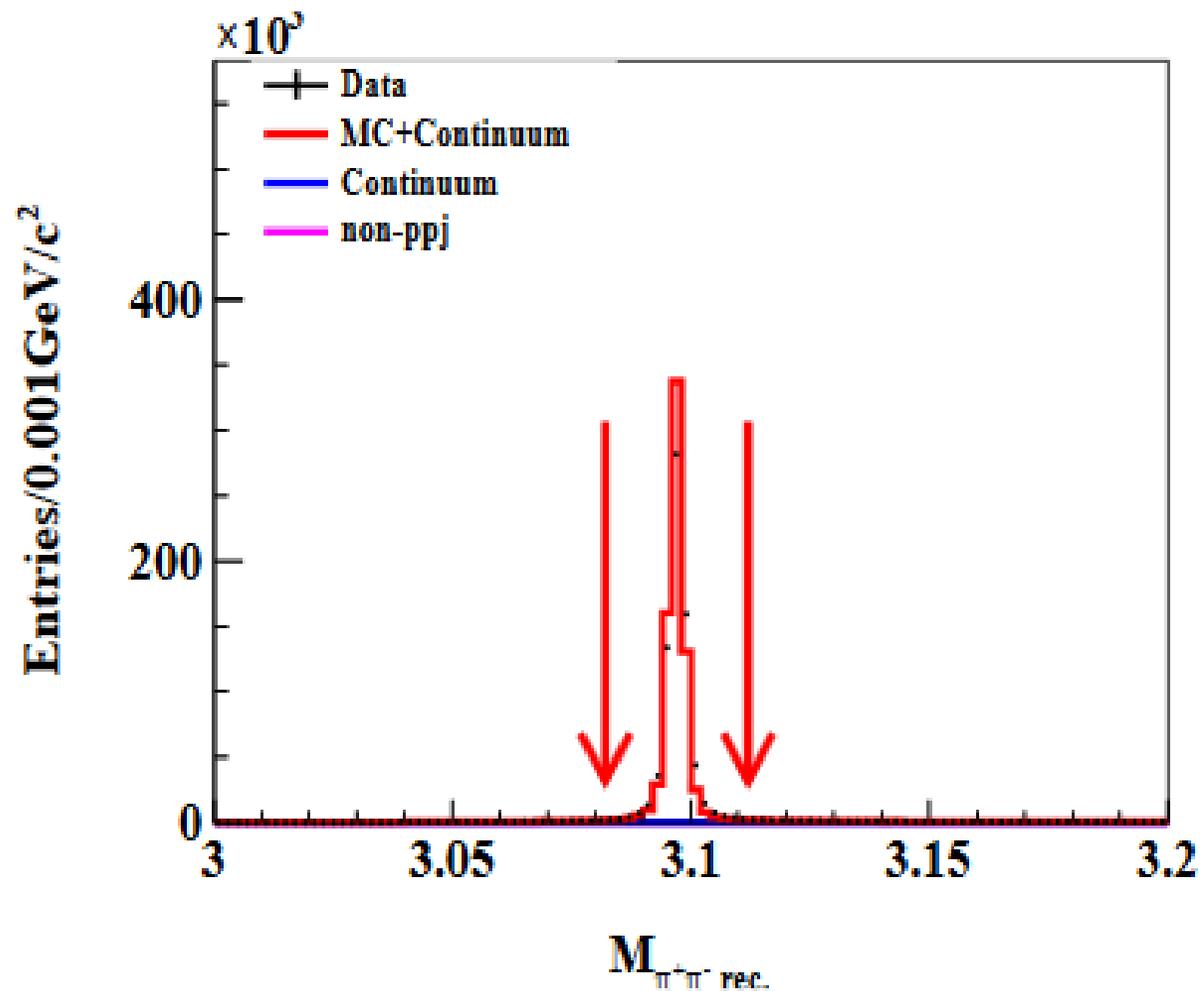
- 两体衰变，在母粒子质心系是单（高）能的：大约1.55 GeV
- 即使  $J/\psi$  运动导致一定的动量展宽，仍然和  $\pi$  的动量区间完全无重叠：无需粒子鉴别，只需区分  $e$ 、 $\mu$  即可
- 因此这个分析无需用到  $dE/dx$  和 TOF 的 PID，也就不需要分析这项系统误差

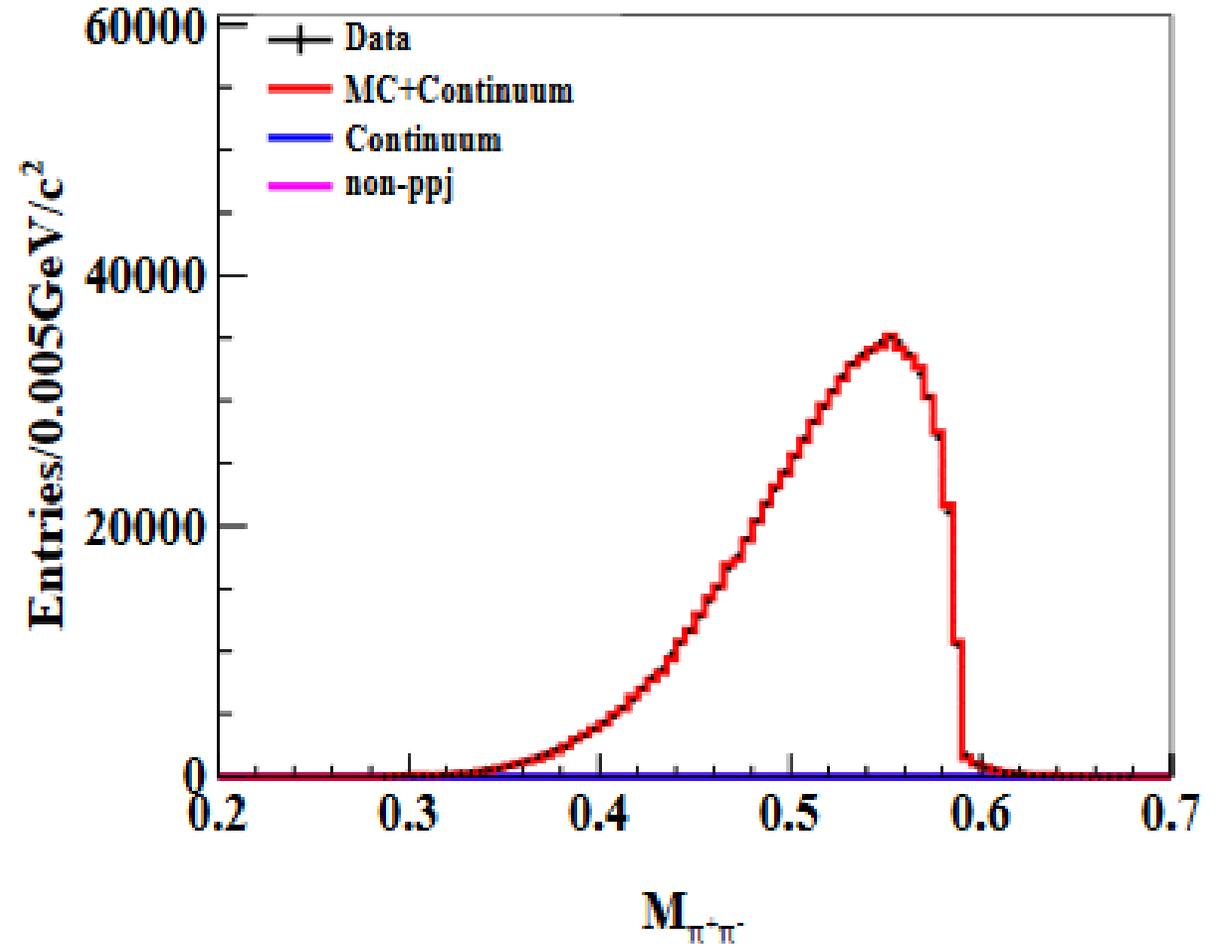
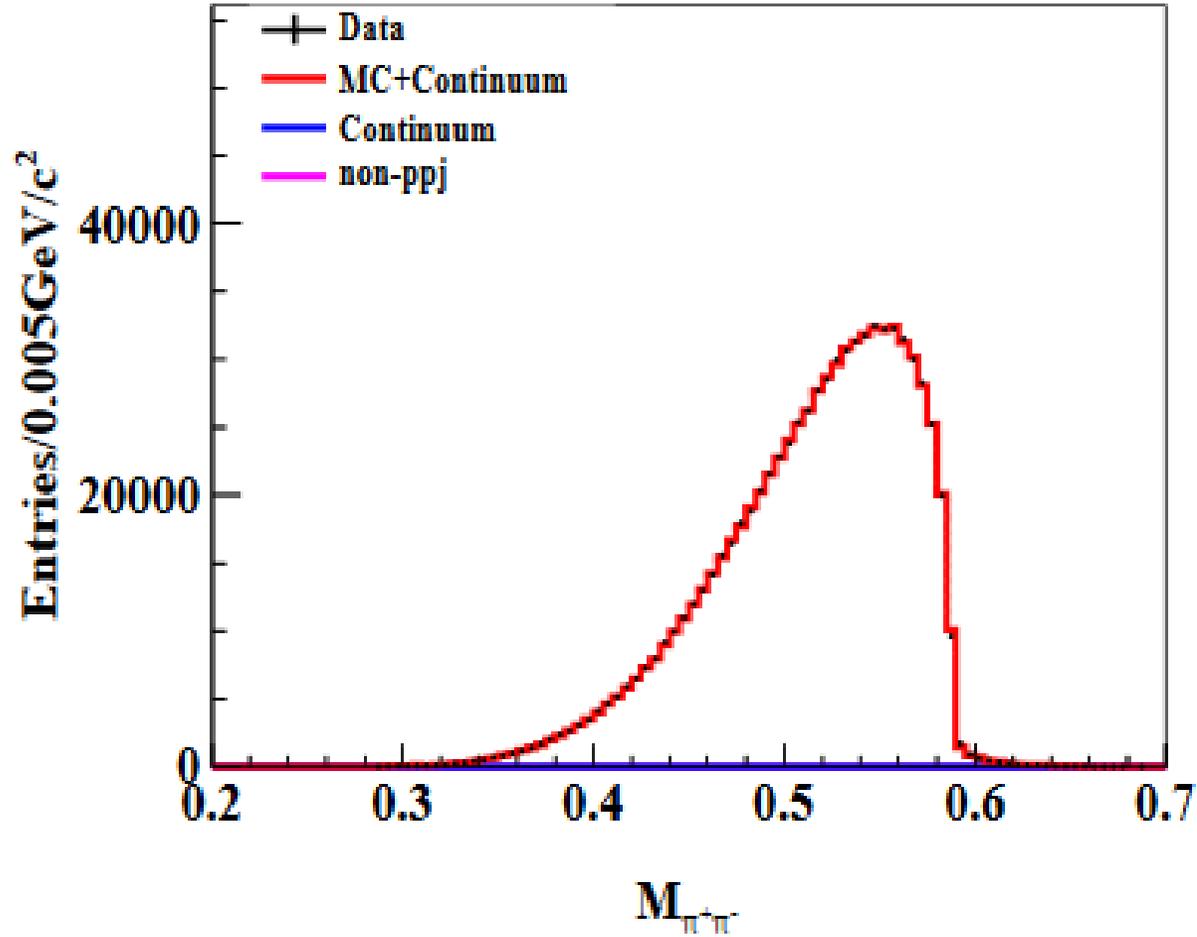
术语园地

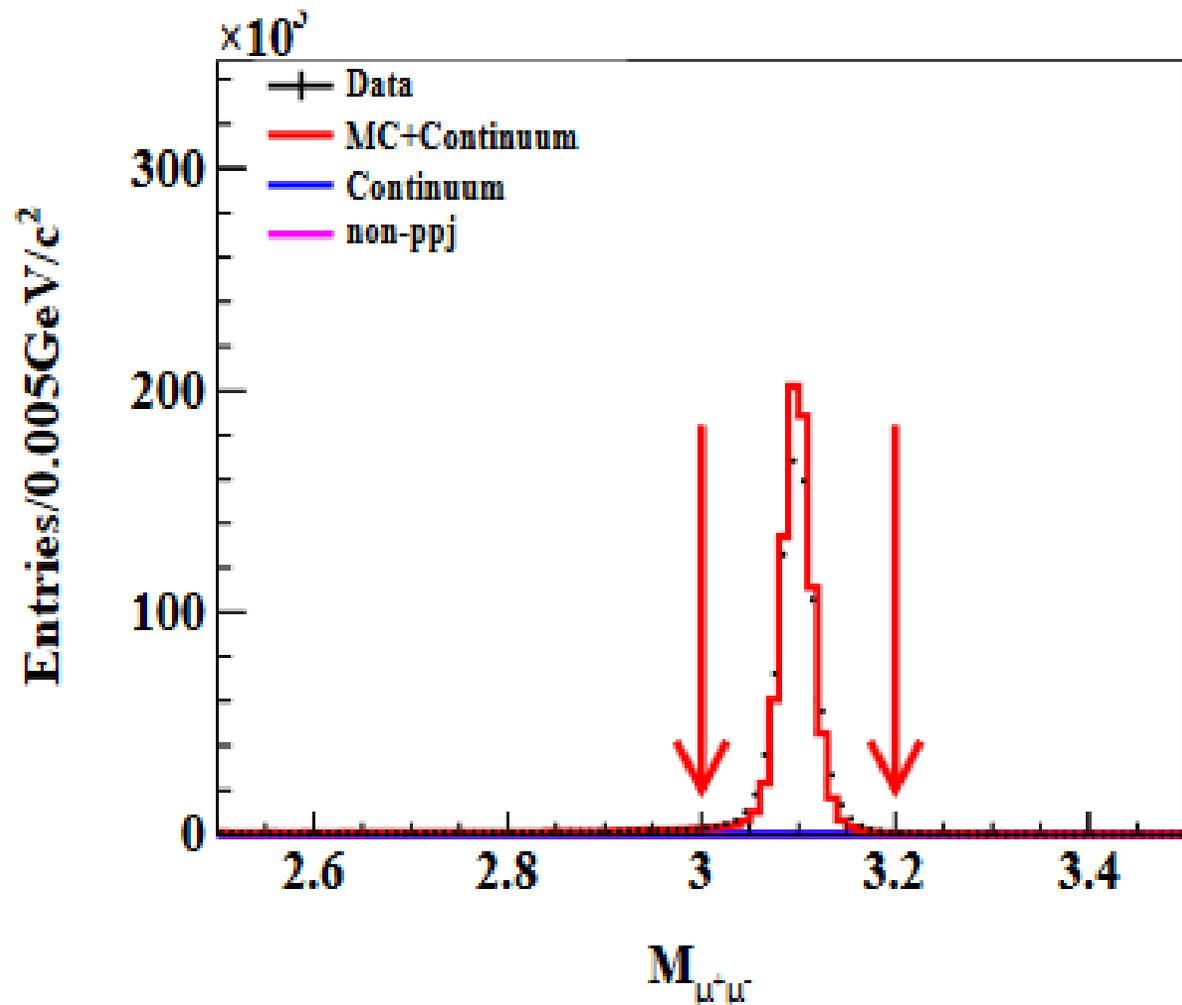
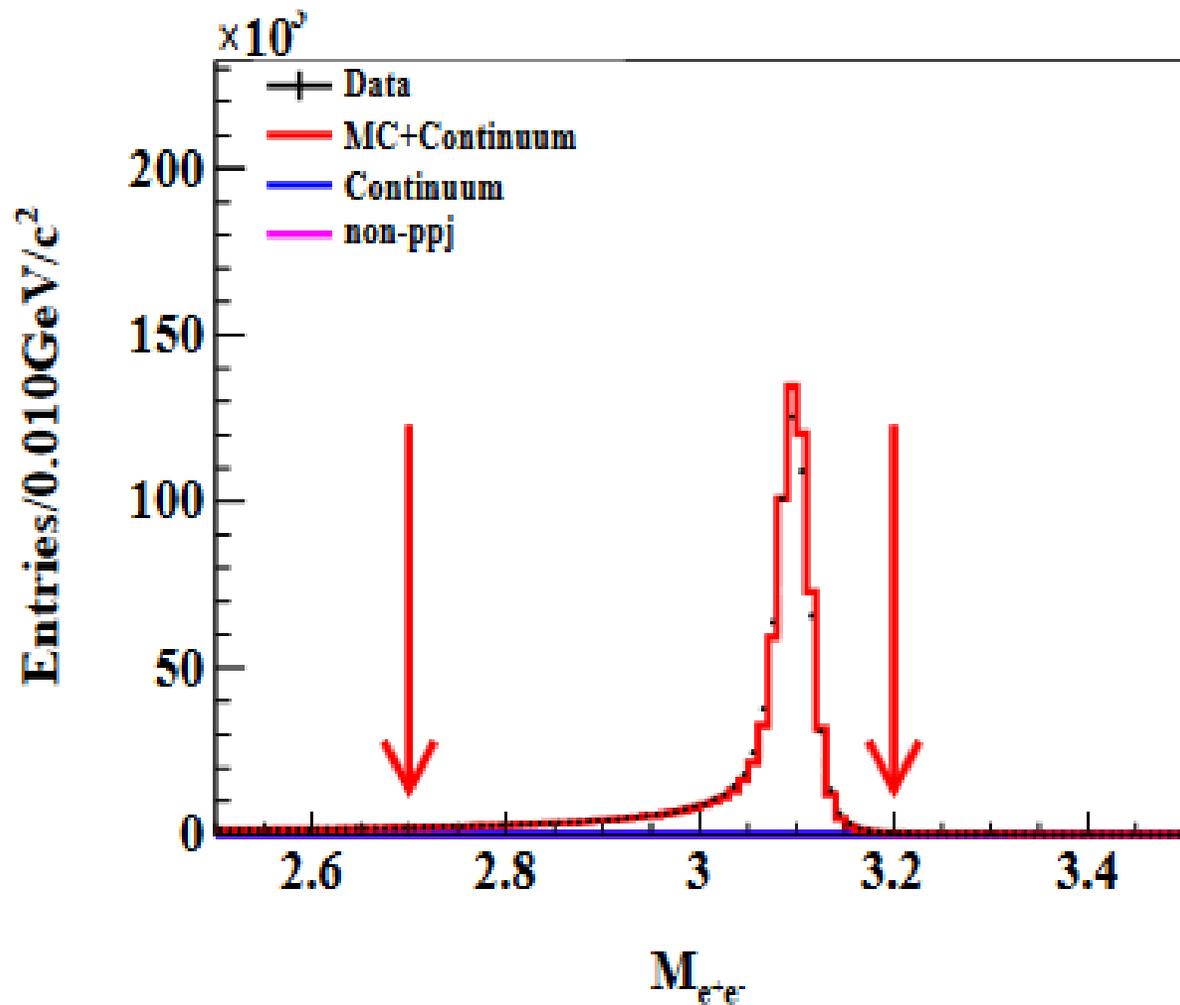
$dE/dx$  单位距离能损

TOF(time of flight) 粒子飞行时间

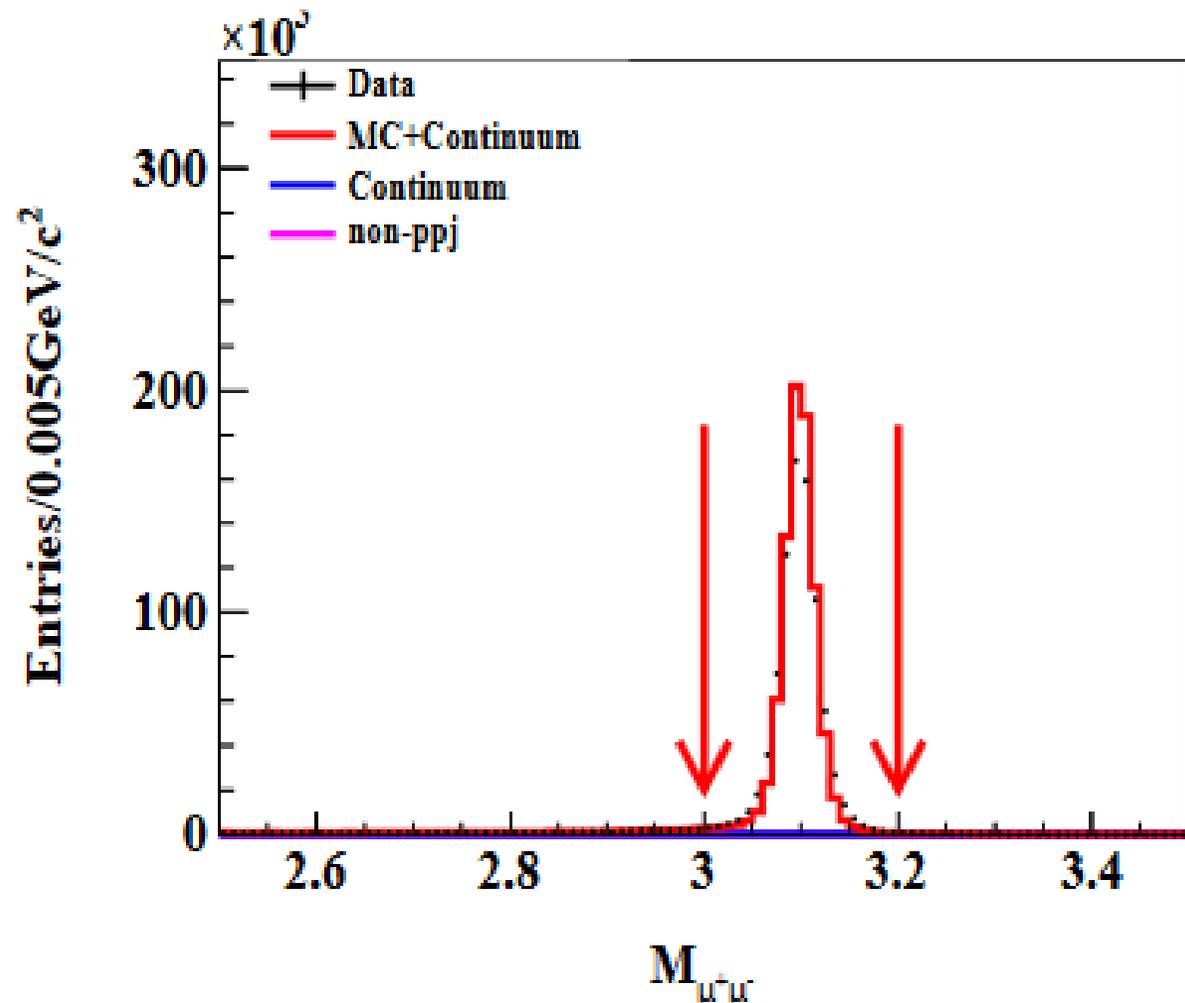
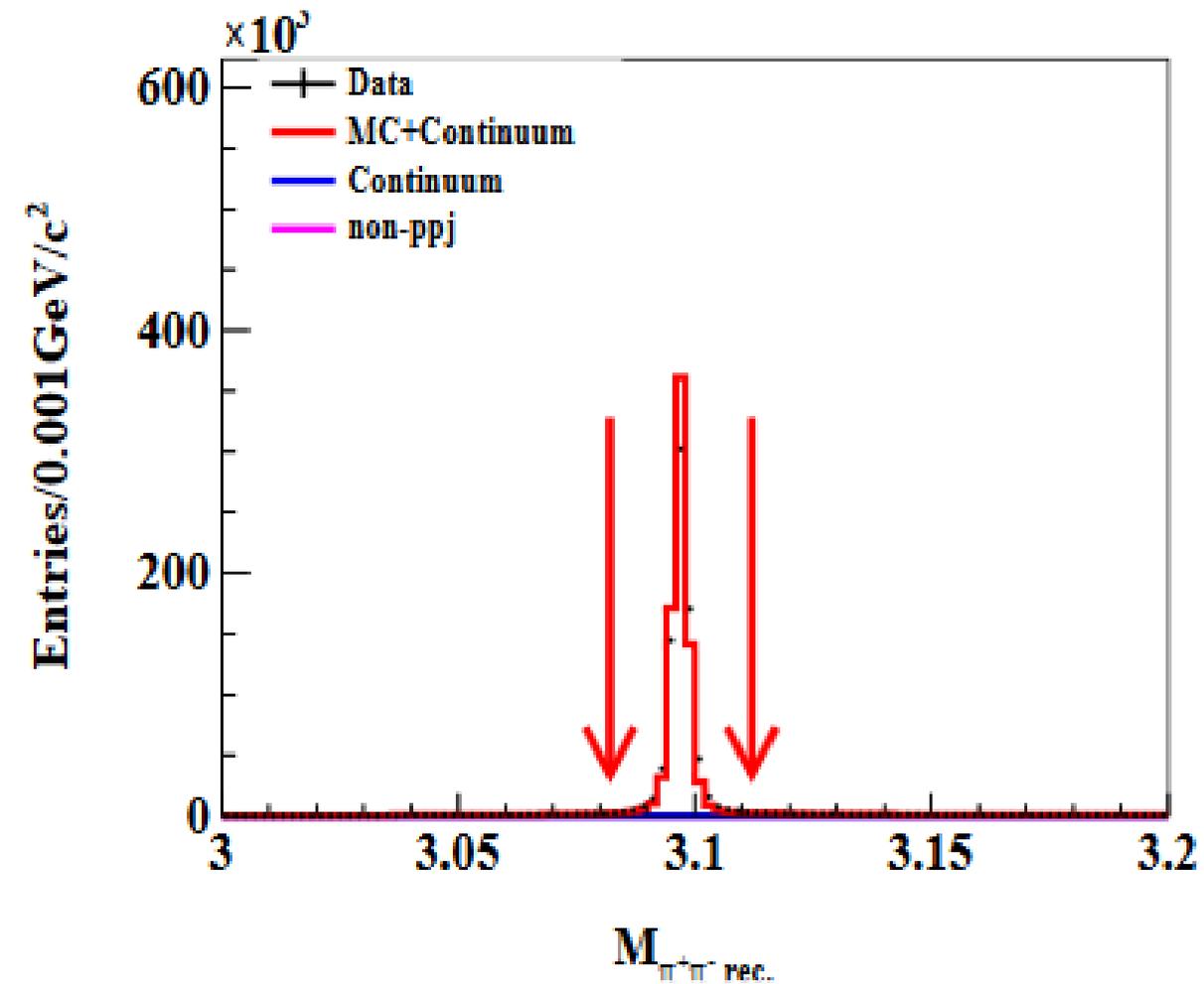
PID (particle identification) 粒子鉴别



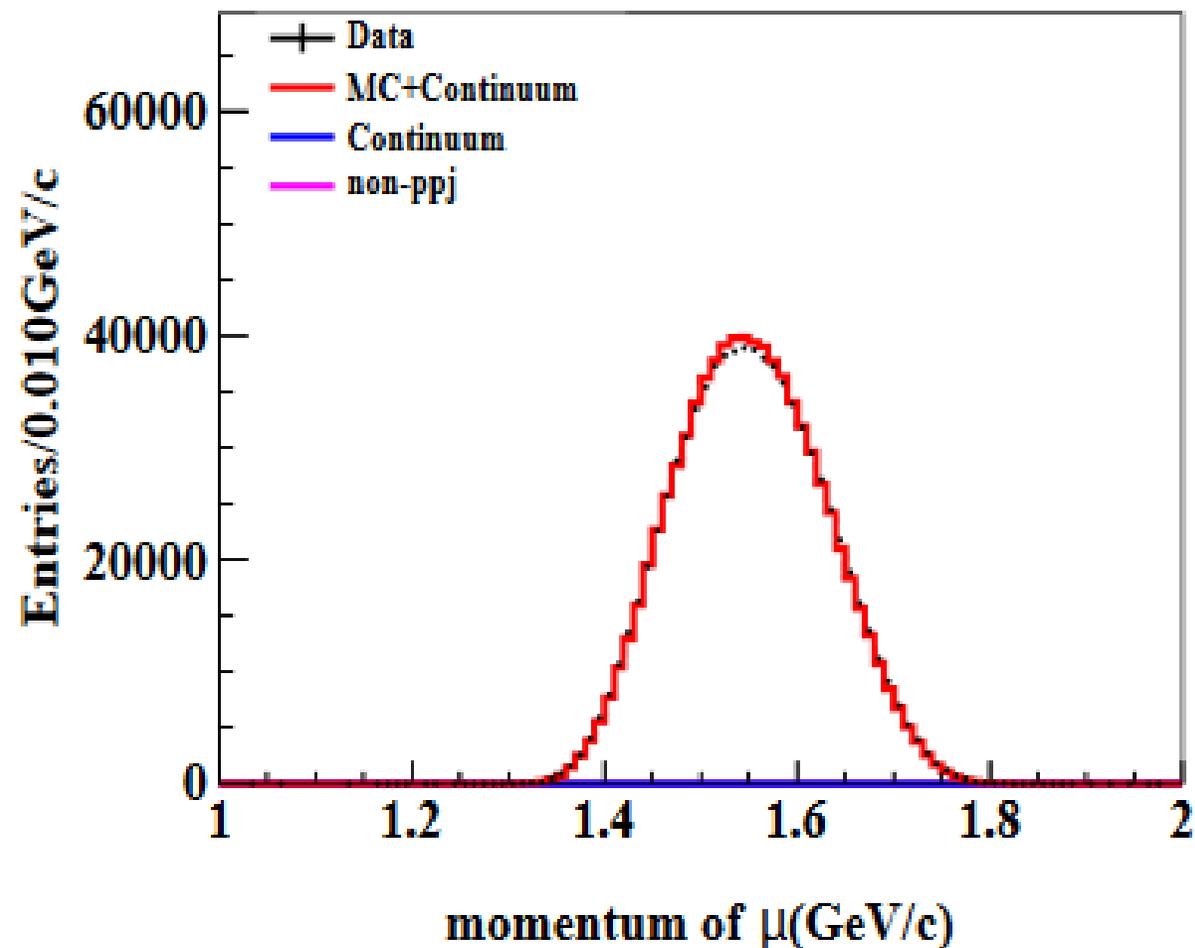
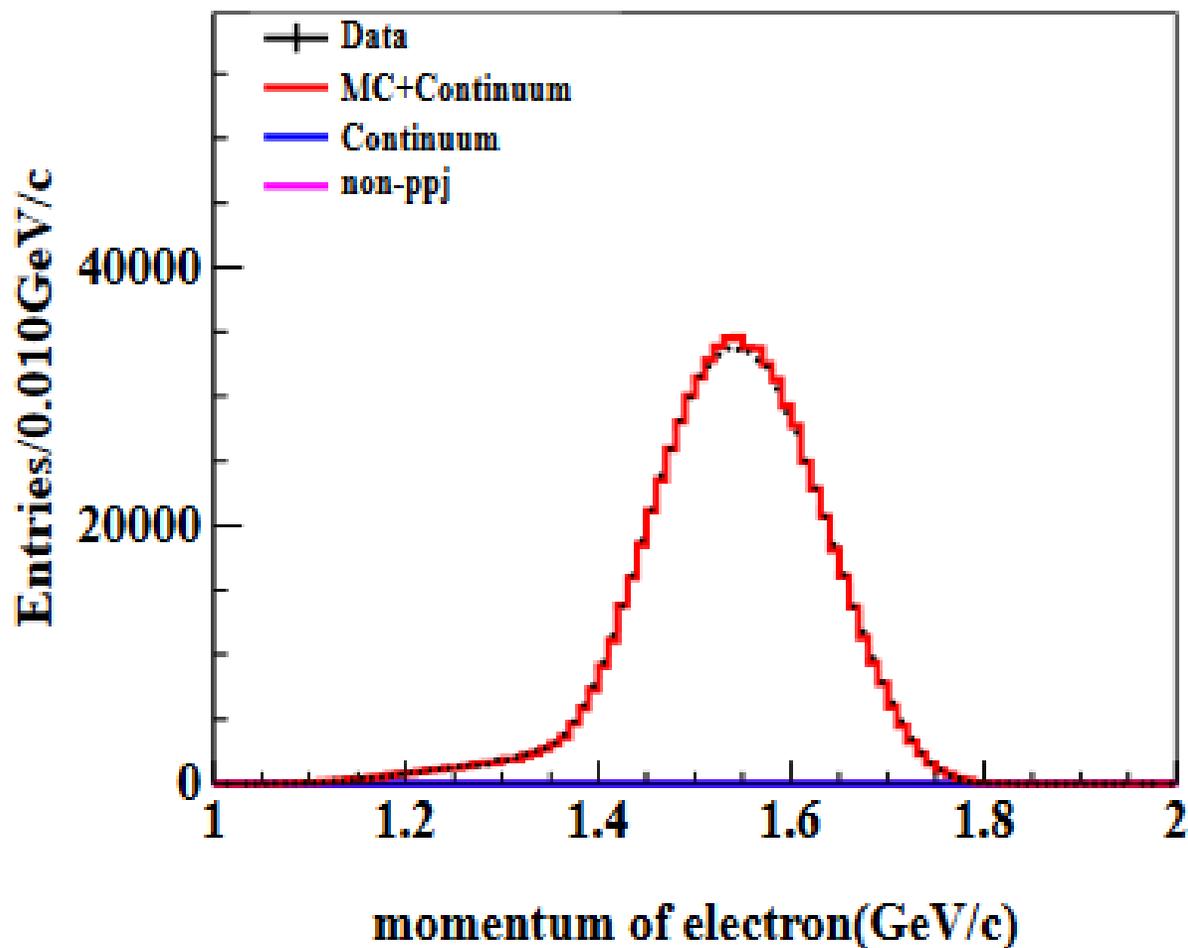


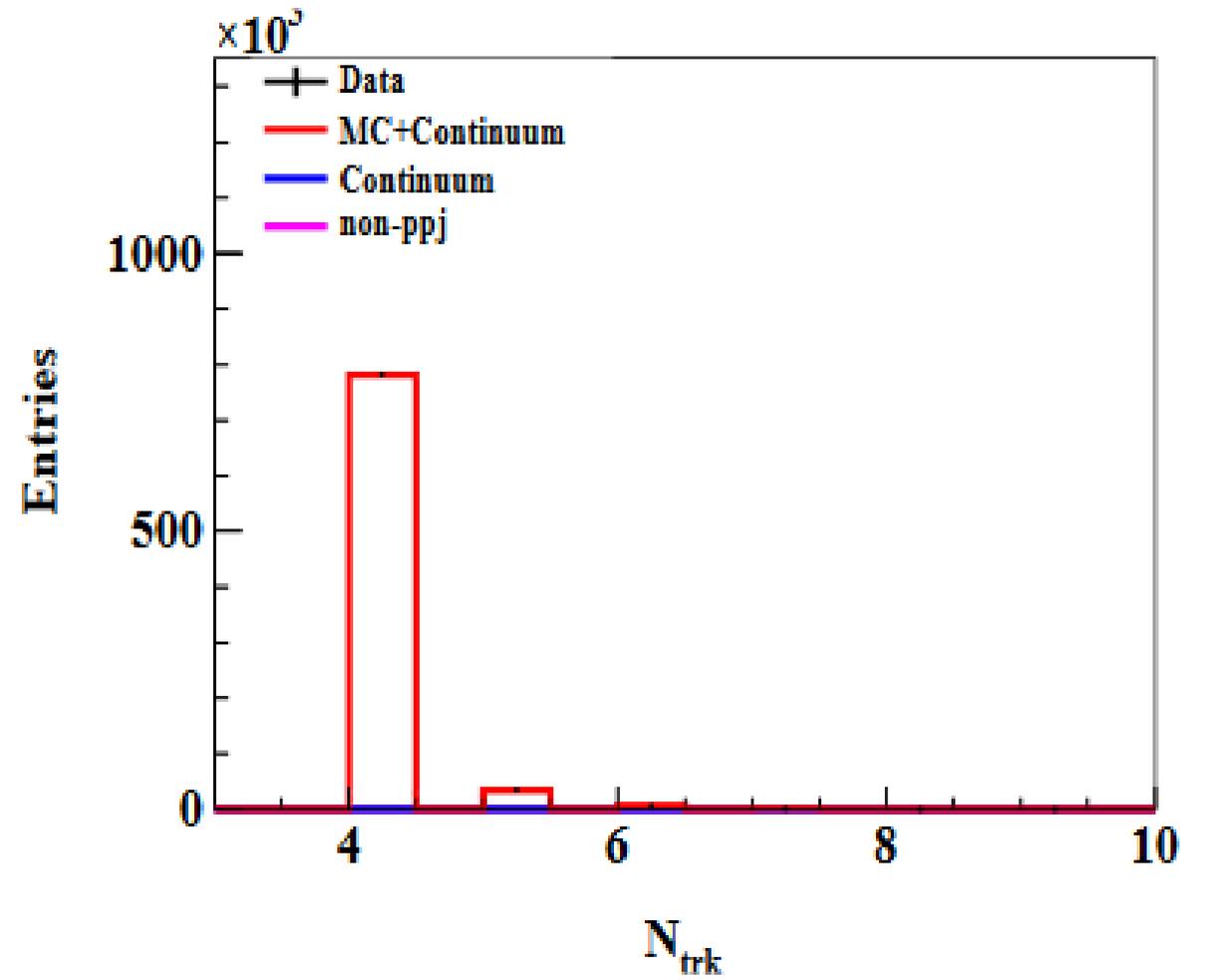
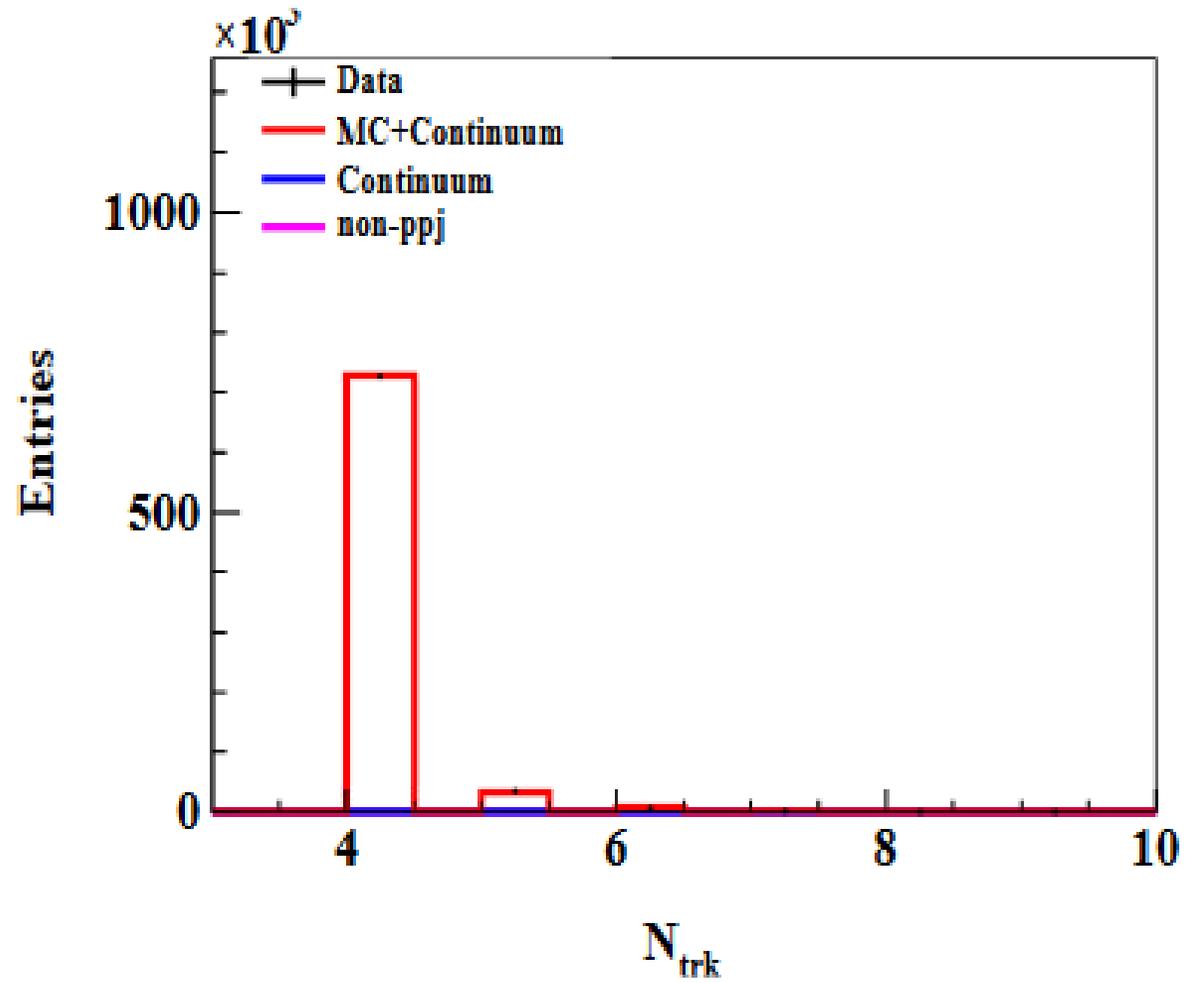


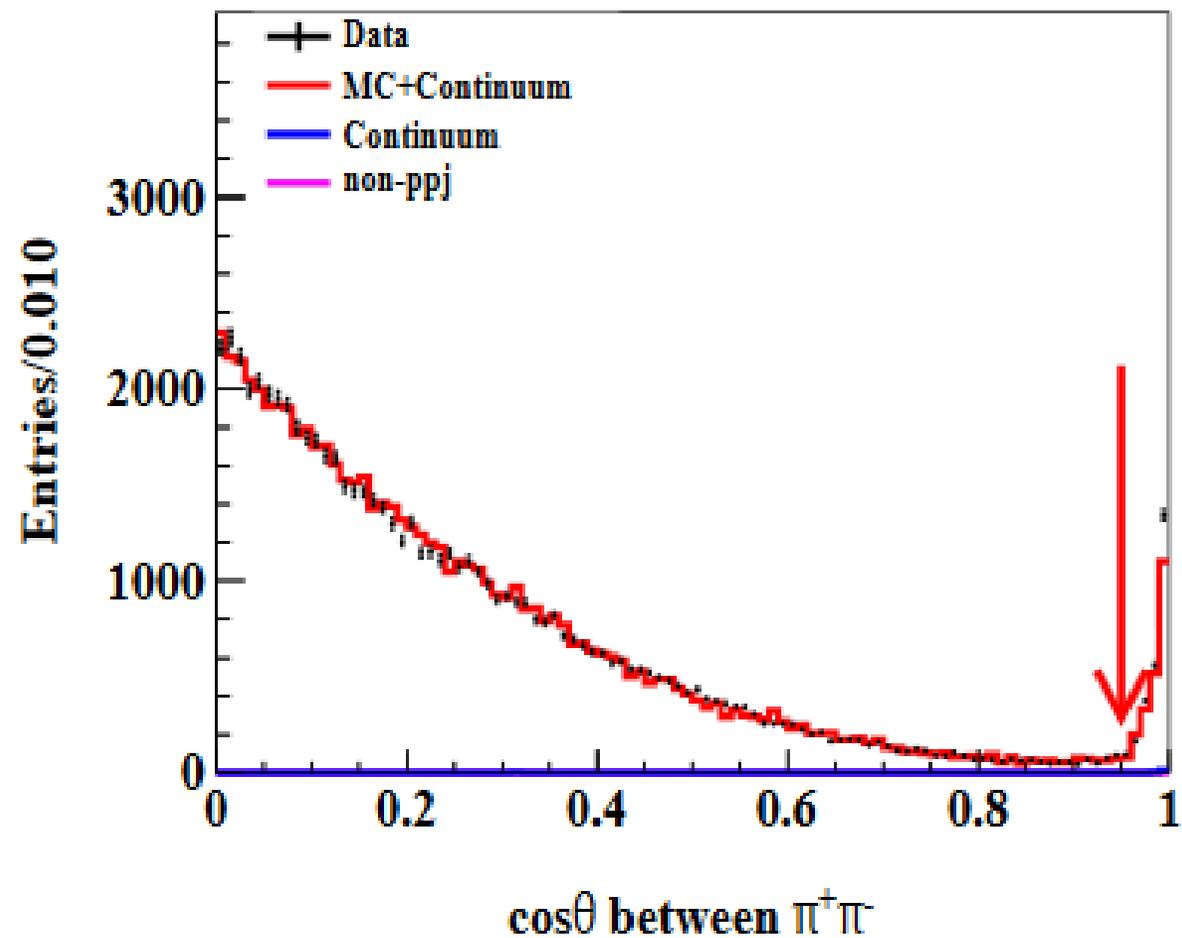
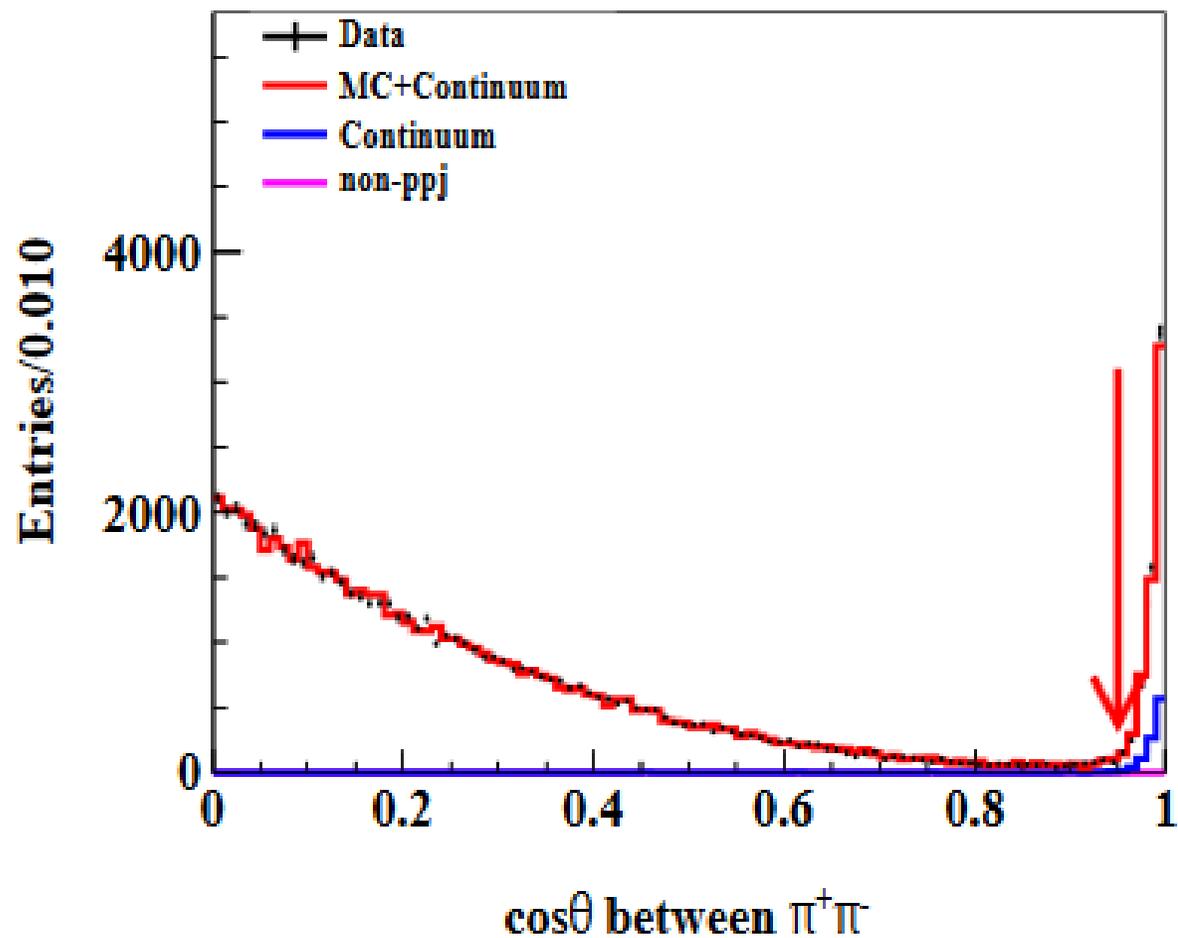
e 与  $\mu$  的不变质量分布有什么差别？为什么？

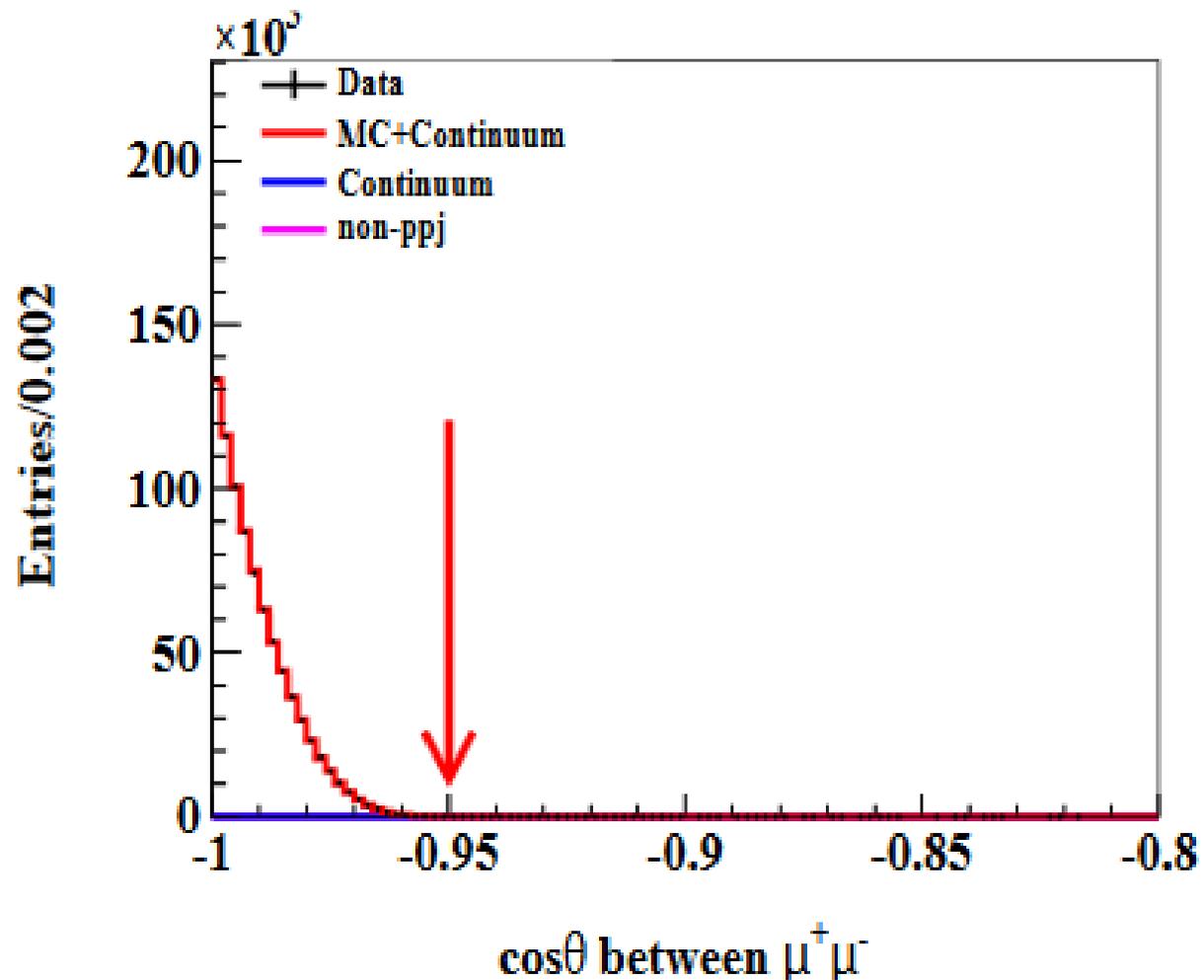
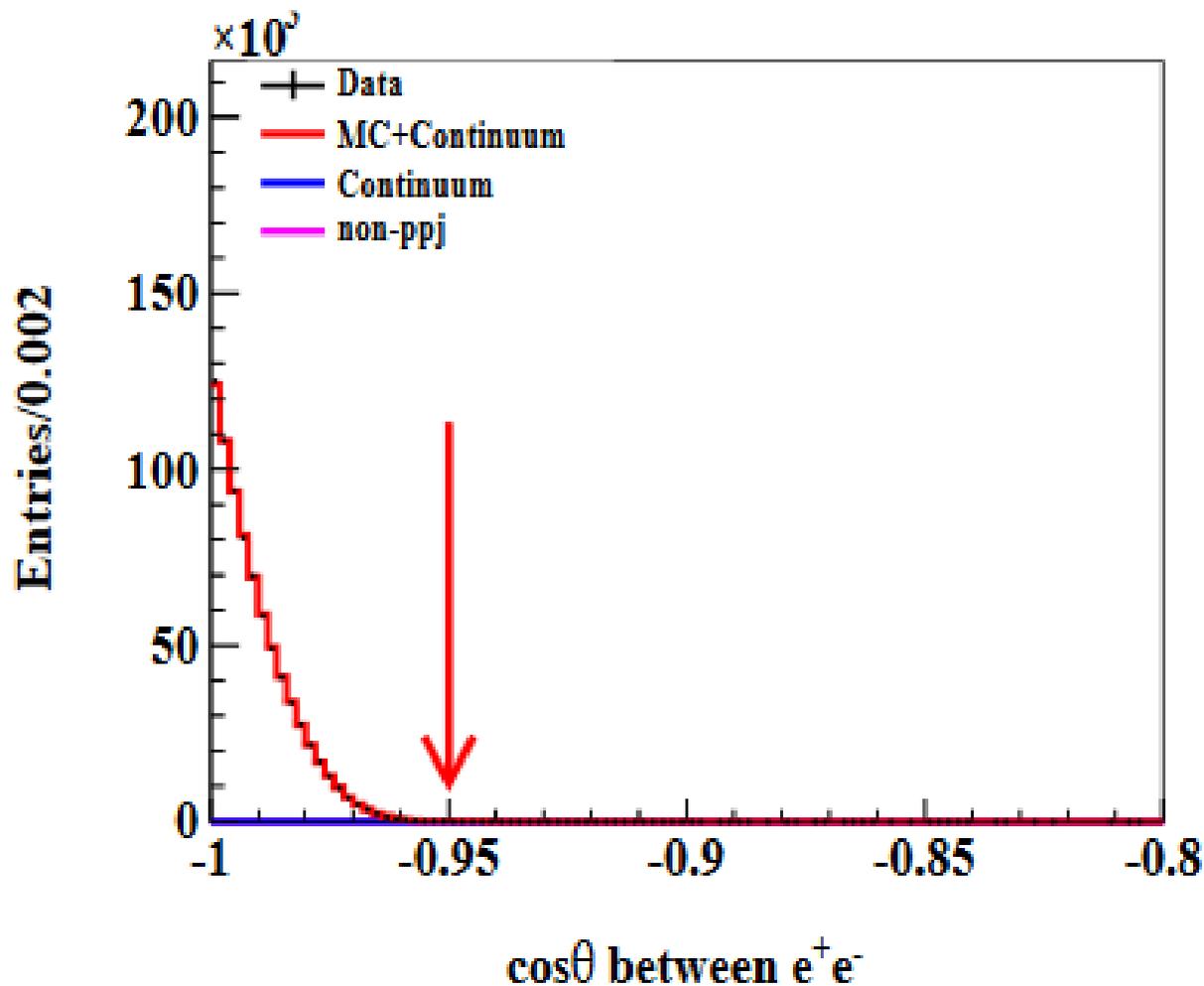


与  $\pi\pi$  反冲比较，轻子对的不变质量分布有什么不同？

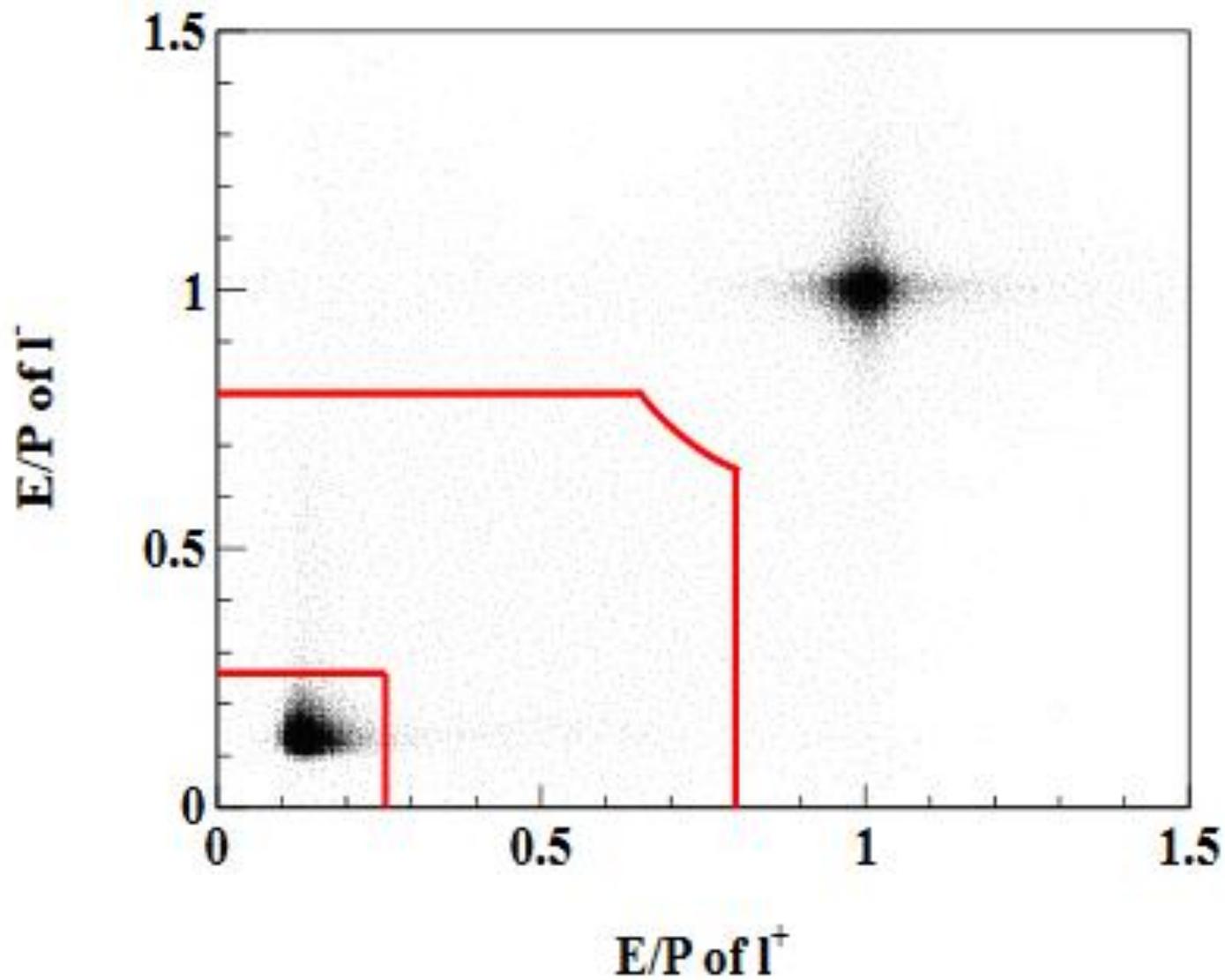








轻子对之间的夹角与 $\pi^+\pi^-$ 之间的夹角有什么明显不同？为什么？



术语园地  
EMC  
(ElectroMagnetic Calorimeter)  
电磁量能器

# 小结

- ☑ 事例选择的目的是：提高信噪比
- ☑ 三条原则：
  - ☑ 尽可能简单的事例选择
  - ☑ 尽可能在保证效率的同时压低本底
  - ☑ 尽可能的利用运动学特征
- ☑ 作为小白该如何入手？
  - ☑ 思考
  - ☑ 阅读备忘录（memo）与文章
  - ☑ 积极参加组会、研讨会、合作组会议
  - ☑ 有疑问时向老师与同学请教

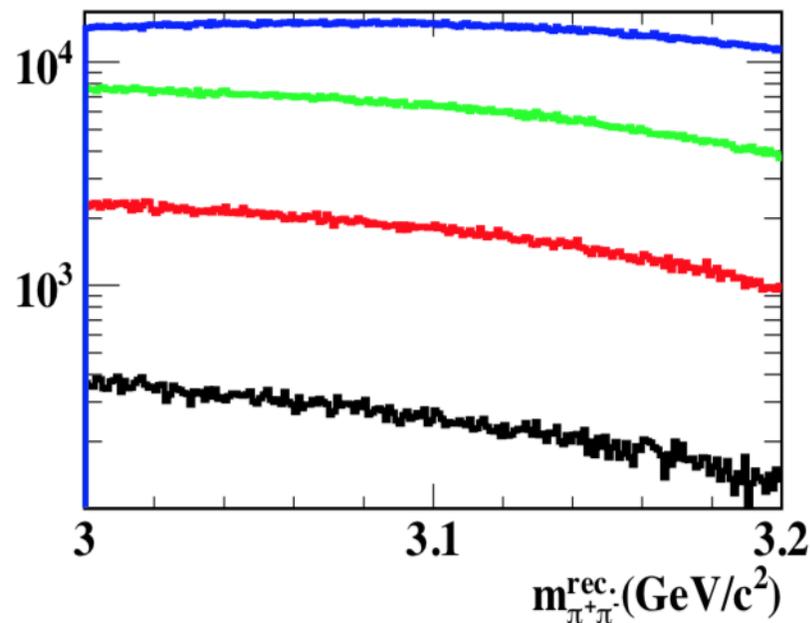
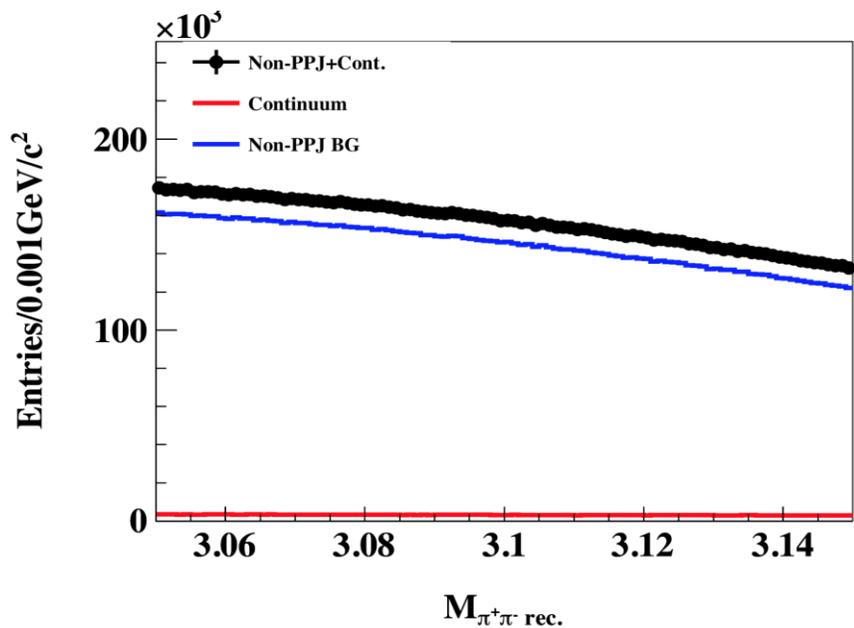
# 本底分析

$$B(X \rightarrow f) = \frac{N^{sig}}{\epsilon \cdot N^X} = \frac{N^{obs} - N^{bg}}{\epsilon \cdot N^X}$$

- 本底分析与事例选择常常是一个迭代的过程
  - 针对特定的本底，有时可以用简单有效的方法去除（veto）
- 本底须知：
  - 形状是否平滑？有没有类似信号的起伏（峰状本底）？
  - 本底数量大小？
- 确定本底的主要方法：
  - Inclusive MC: **topology**（a fantastic tool at BESIII）
  - 数据驱动（data driven）：其他数据、边带法（sideband）、检查分布
  - 猜测（经验依赖）

# $\pi^+\pi^-J/\psi$ 过程的本底

- 平滑，没有 peak
- 受益于事例选择中：一个事例（event）可以有 multiple 记录（entries）
  - 虽然错误组合更多了，但是避免了人为的偏差（bias）
- 进一步检查不同的  $J/\psi$  衰变的误组合，仍然平滑



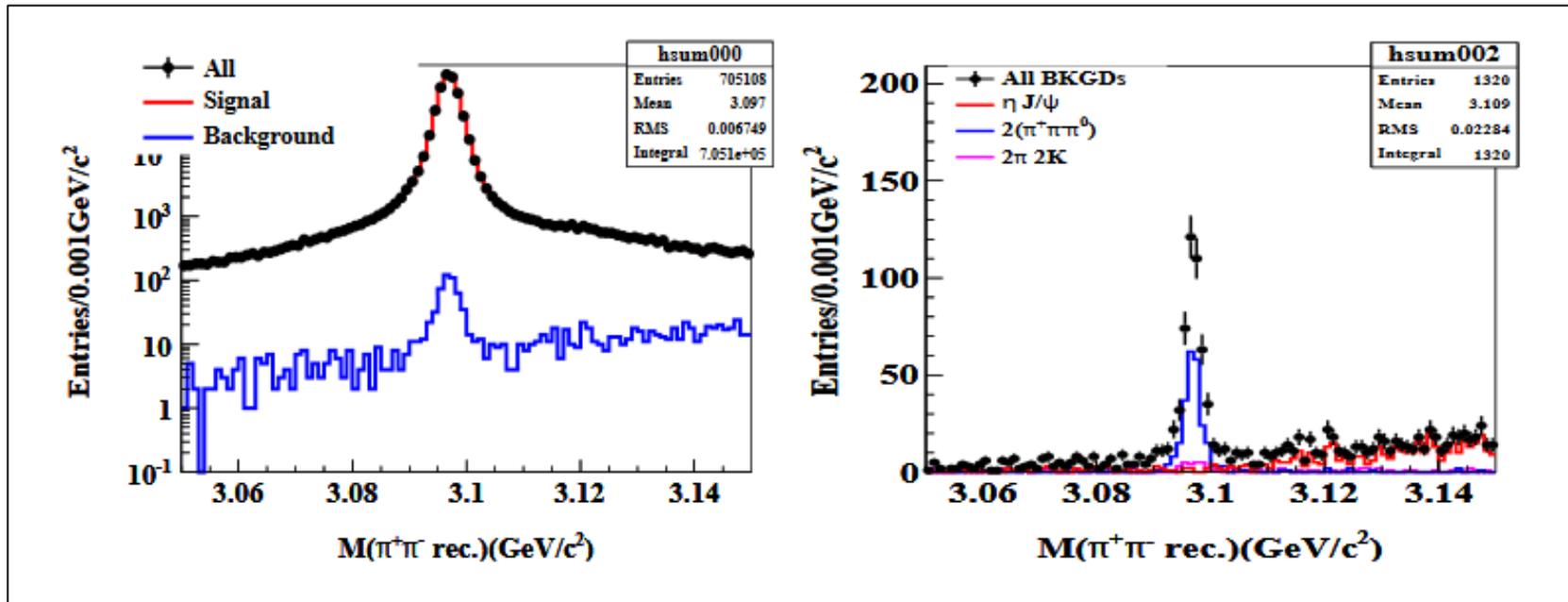
# $J/\psi \rightarrow e^+ e^-$ 测量的本底

☑ MC topology 分析工具（首创自杜书先，由李刚等改进）

No.	decay chain	iTopo	$N_{evt}$
	$e^- \pi^- e^+ \pi^+$ (final state)		
0	$\psi' \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi, J/\psi \rightarrow e^- e^+$	0	566983
1	$\psi' \rightarrow \pi^- J/\psi \pi^+, J/\psi \rightarrow e^+ \gamma_{FSR} e^-$	1	118425
2	$\psi' \rightarrow \pi^- J/\psi \pi^+, J/\psi \rightarrow \gamma_{FSR} e^- e^+ \gamma_{FSR}$	2	16079
3	$\psi' \rightarrow \pi^+ J/\psi \pi^- \gamma_{FSR}, J/\psi \rightarrow e^- e^+$	3	1802
4	$\psi' \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^- \gamma_{FSR}, J/\psi \rightarrow e^- e^+ \gamma_{FSR}$	9	447
11	$\psi' \rightarrow J/\psi \gamma_{FSR} \pi^- \pi^+, J/\psi \rightarrow e^- \gamma_{FSR} \gamma_{FSR} e^+$	12	51
90	$\psi' \rightarrow J/\psi \gamma_{FSR} \gamma_{FSR} \pi^+ \pi^-, J/\psi \rightarrow e^- e^+ \gamma_{FSR}$	90	1
703788 evts (7 modes )			

No.	decay chain	iTopo	$N_{evt}$
	$e^- \pi^- e^+ \pi^+ \gamma$ (final state)		
5	$\psi' \rightarrow \eta J/\psi, \eta \rightarrow \gamma \pi^+ \pi^-, J/\psi \rightarrow e^- e^+$	7	269
10	$\psi' \rightarrow J/\psi \eta, J/\psi \rightarrow e^- \gamma_{FSR} e^+, \eta \rightarrow \gamma \pi^+ \pi^-$	25	54
45	$\psi' \rightarrow J/\psi \eta, J/\psi \rightarrow \gamma_{FSR} e^+ \gamma_{FSR} e^-, \eta \rightarrow \pi^- \pi^+ \gamma$	192	3
326 evts (3 modes)			

**Peaking backgrounds!**  
 在本例中无需恐慌  
 本底水平很低：0.1%水平



# 以 $J/\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$ 作为对比看 FSR

比 ee 末态含有更少的末态辐射效应

No.	decay chain	iTopo	$N_{evt}$
	$\mu^- \pi^- \mu^+ \pi^+$ (final state)		
0	$\psi' \rightarrow \pi^- J/\psi \pi^+, J/\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$	0	717031
1	$\psi' \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-, J/\psi \rightarrow \gamma_{FSR} \mu^+ \mu^-$	1	33801
2	$\psi' \rightarrow \pi^- \gamma_{FSR} J/\psi \pi^+, J/\psi \rightarrow \mu^- \mu^+$	7	2458
4	$\psi' \rightarrow J/\psi \pi^+ \pi^-, J/\psi \rightarrow \mu^- \gamma_{FSR} \mu^+ \gamma_{FSR}$	6	569
7	$\psi' \rightarrow \gamma_{FSR} J/\psi \pi^+ \pi^-, J/\psi \rightarrow \mu^- \gamma_{FSR} \mu^+$	11	113
30	$\psi' \rightarrow \pi^+ J/\psi \pi^- \gamma_{FSR}, J/\psi \rightarrow \mu^+ \mu^- \gamma_{FSR} \gamma_{FSR}$	82	4
48	$\psi' \rightarrow \gamma_{FSR} \pi^- J/\psi \gamma_{FSR} \pi^+, J/\psi \rightarrow \mu^+ \mu^-$	42	2
753978 evts (7 modes )			

# 思考题

- 分析换成测量  $\psi(2S) \rightarrow \pi^0\pi^0 J/\psi$  的分支比
  1. 这个过程的末态是什么？
  2. 分支比的计算公式？
  3. 事例选择？

提示：一个  $\pi^0$  衰变成两个光子 ( $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ )

**Tea break**

# 提取信号数

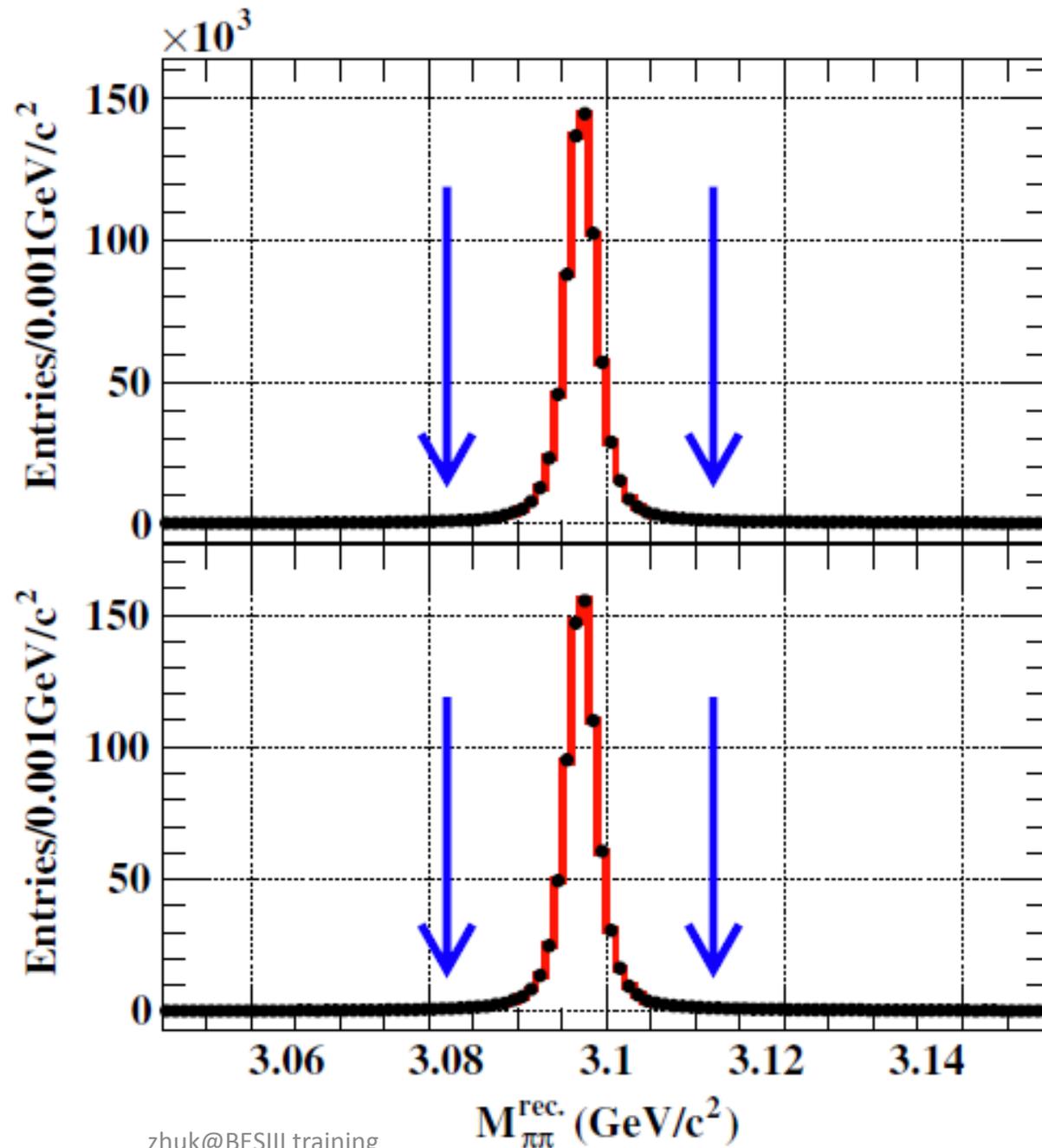
- 观测数减去本底数 ( $N_{sig} = N_{obs} - N_{bg}$ )
  - Inclusive MC
  - 边带法 (sideband)
- 拟合

# 利用Inclusive MC 提供的信息

No.	decay chain	iTopo	$N_{evt}$
	$e^- \pi^- e^+ \pi^+ \gamma$ (final state)		
5	$\psi' \rightarrow \eta J/\psi, \eta \rightarrow \gamma \pi^+ \pi^-, J/\psi \rightarrow e^- e^+$	7	269
10	$\psi' \rightarrow J/\psi \eta, J/\psi \rightarrow e^- \gamma_{FSR} e^+, \eta \rightarrow \gamma \pi^+ \pi^-$	25	54
45	$\psi' \rightarrow J/\psi \eta, J/\psi \rightarrow \gamma_{FSR} e^+ \gamma_{FSR} e^-, \eta \rightarrow \pi^- \pi^+ \gamma$	192	3
326 evts (3 modes )			

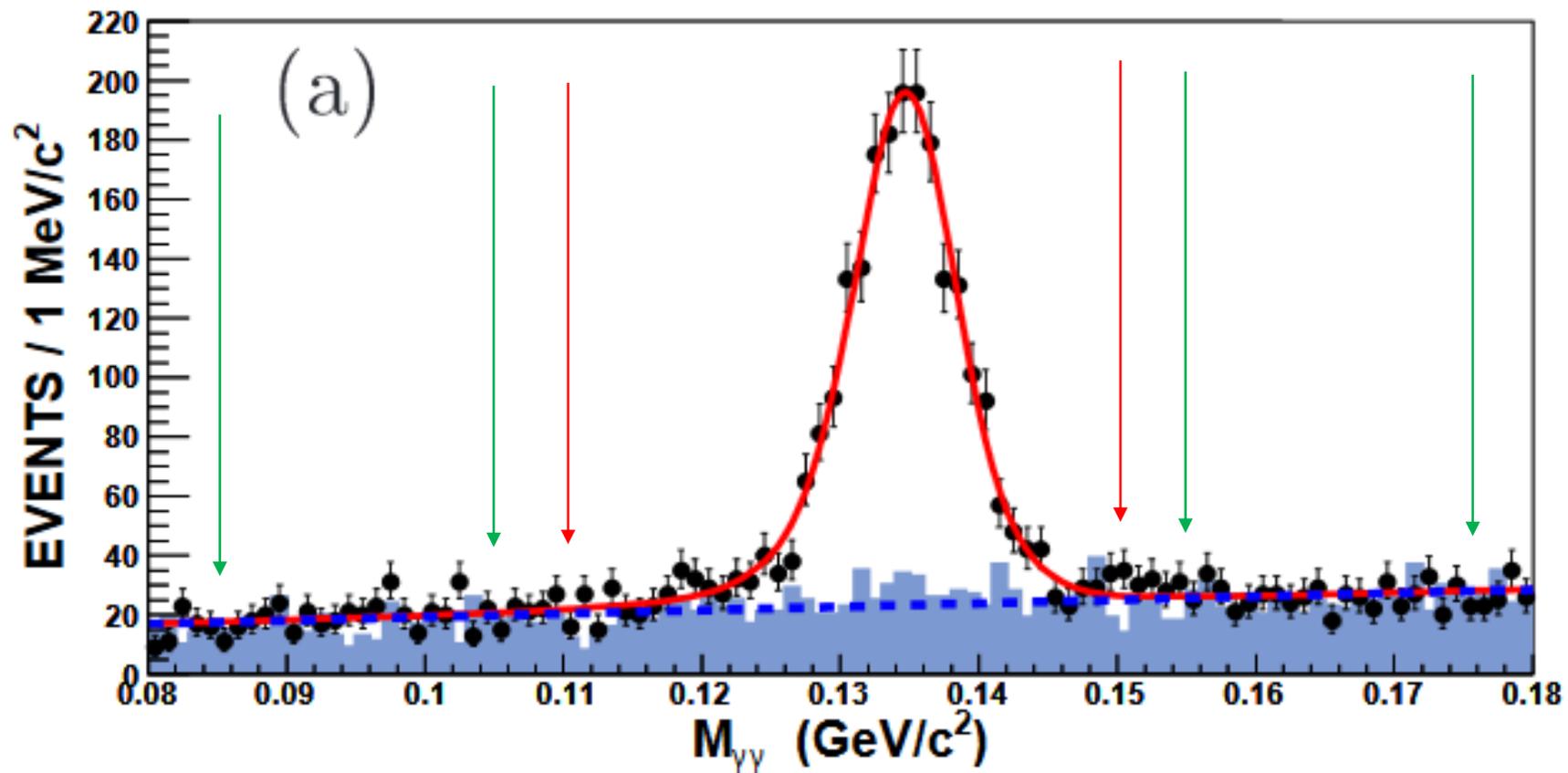
$$J/\psi \rightarrow l^+ l^-:$$

$$N_{obs} - N_{bg}$$

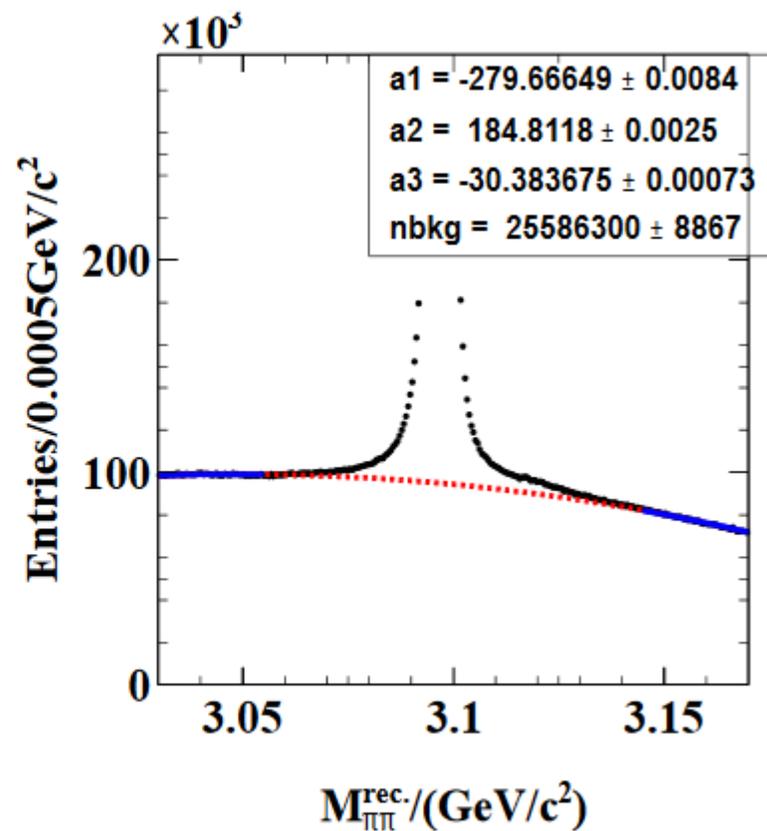
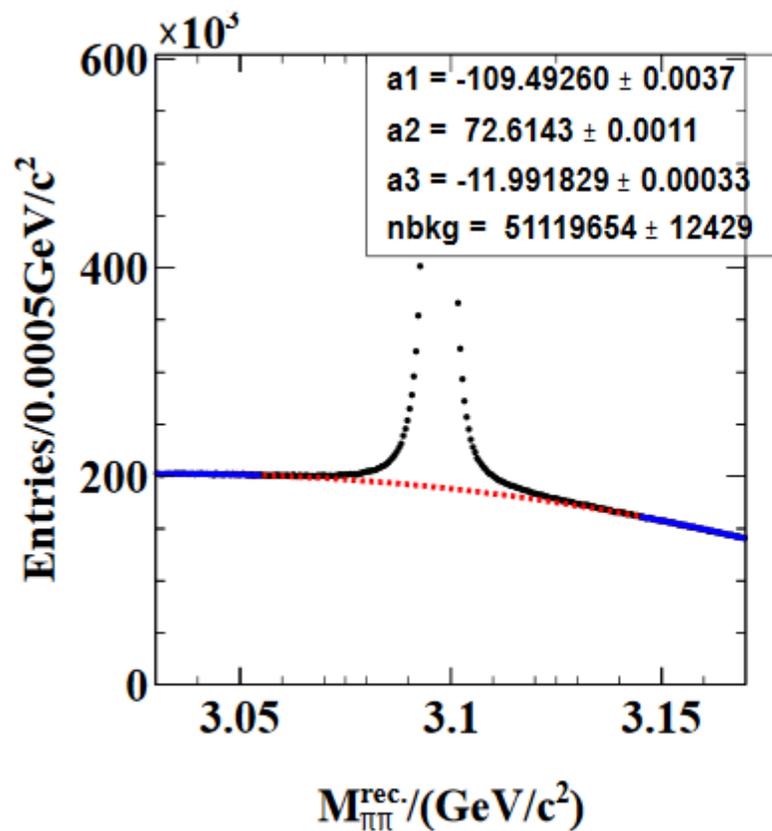


# 边带法 (sideband)

- 注意：  
仅适用于平滑本底



# 拟合边带（非典型） $\psi(2S) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$



# 二维边带

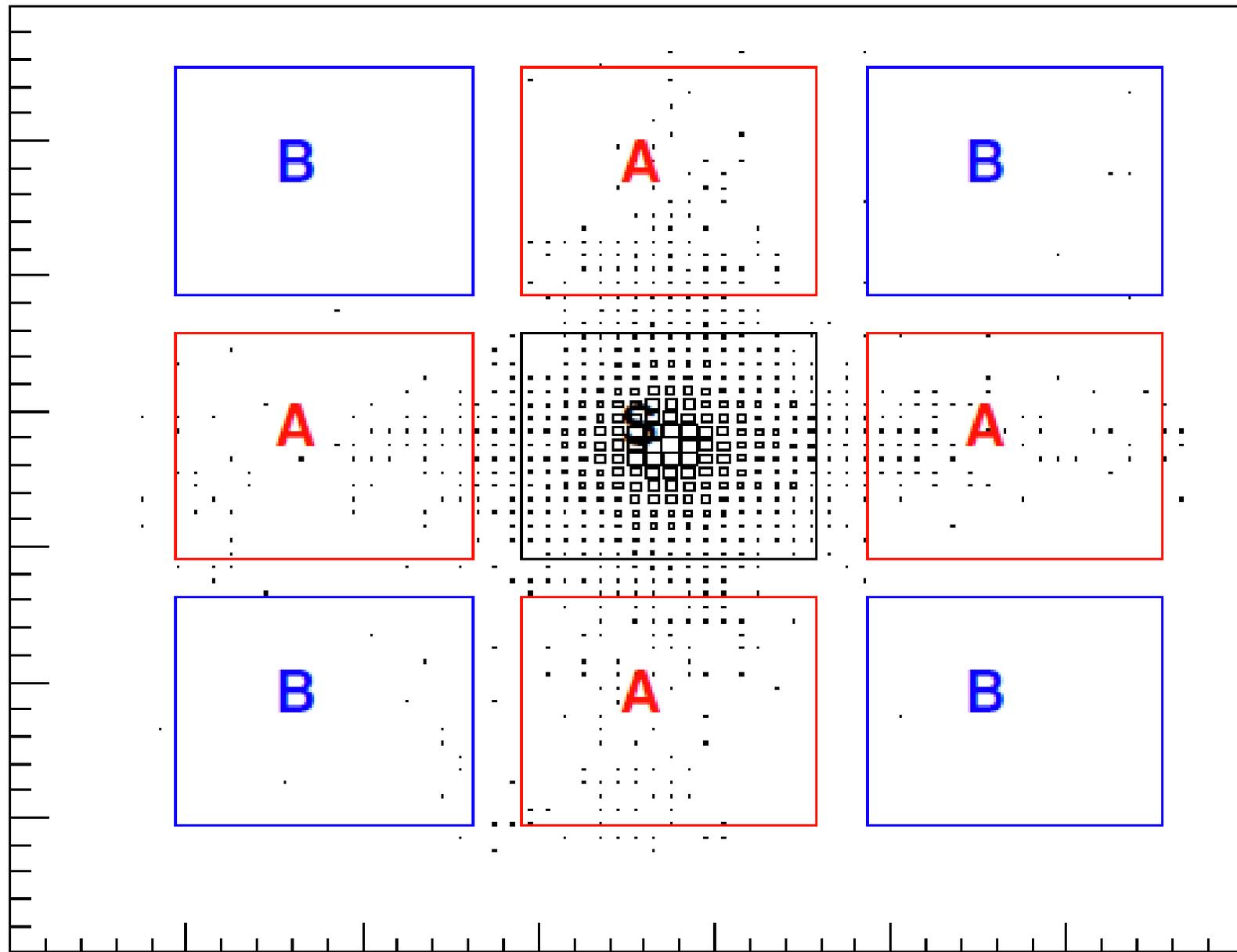
每一维对应一个共振态  
的不变质量谱分布

常用公式:

$$S = \frac{A}{2} + \frac{B}{4}$$

(S、A、B面积相等)

为什么是这个公式?



# 拟合法

$$M_E(x) = N_S \cdot S(x) + N_B \cdot B(x)$$

- RooFit 几乎能满足一切需求
- 主要工作:

确定描述信号与本底的函数

需要对物理与探测器有一定程度的了解

术语园地

PDF (probability density function)

对应于量子力学里的  $|A|^2$

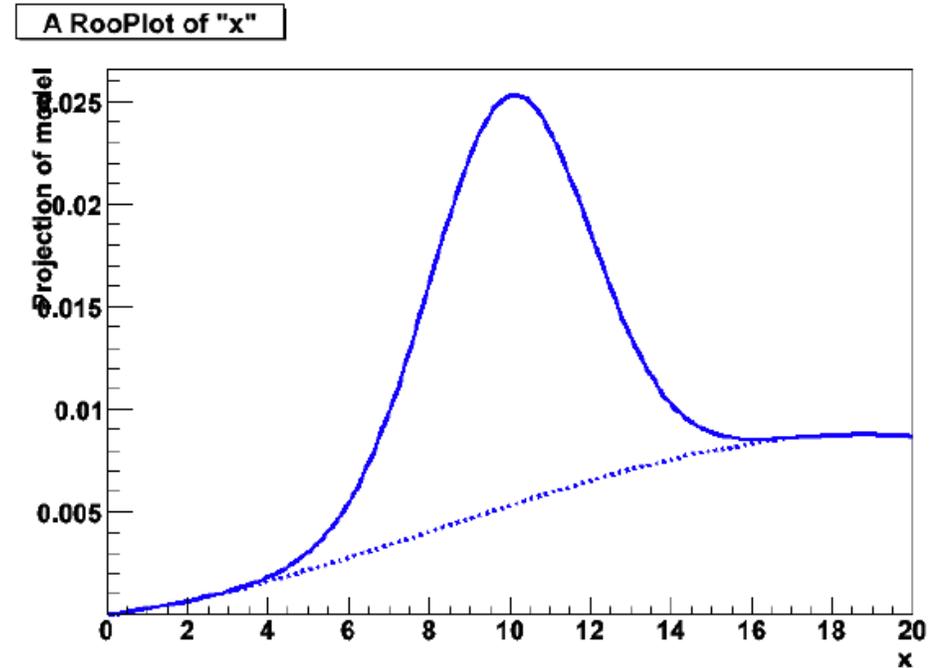
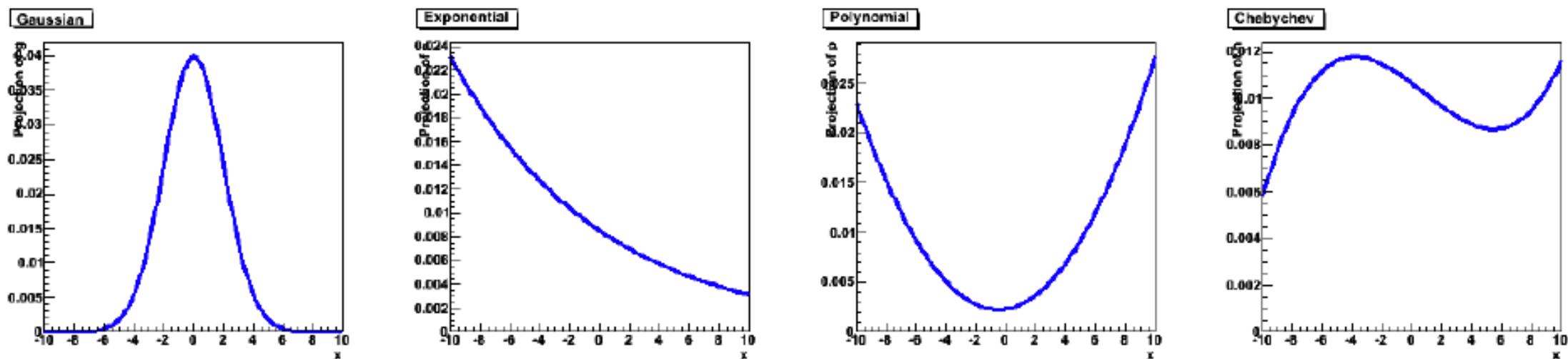


Figure 6 – Drawing of composite model and its components

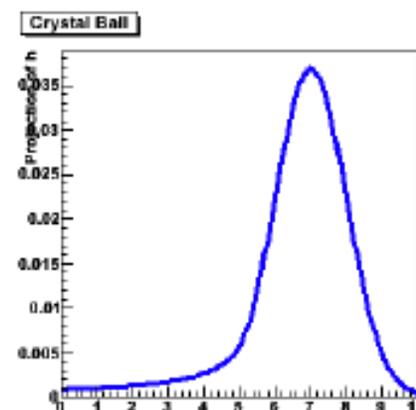
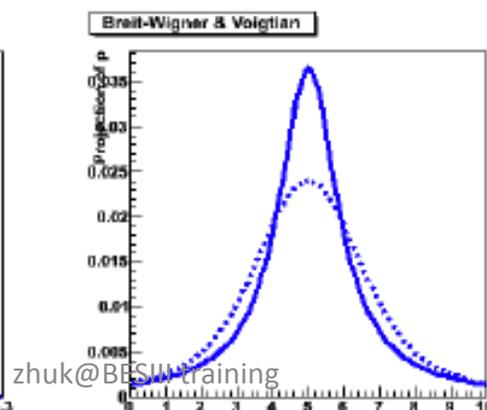
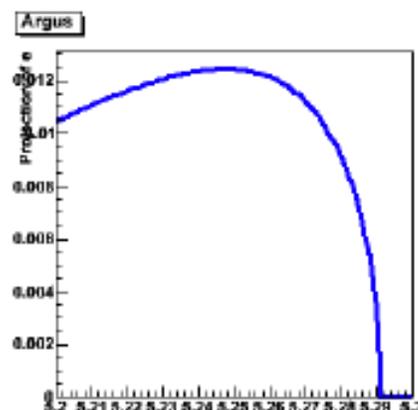
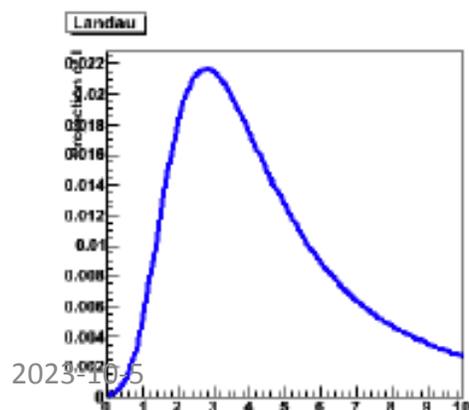
Name	Functional form	Class name
Gaussian	$\exp\left(-0.5\left(\frac{x-m}{s}\right)^2\right)$	RooGaussian(name,title,x,m,s)
Exponential	$\exp(a \cdot x)$	RooExponential(name,title,x,a)
Polynomial	$1 + \sum_{i=1,n} a_i x^i$	RooPolynomial(name,title,x,alist)
Chebyshev polynomial	$1 + \sum_{i=1,n} a_i T_i(x)$	RooChebychev(name,title,x,alist)

**Table 1 – Basic functions implemented in RooFit**



**Figure 7 – Basic p.d.f shapes: Gaussian, Exponential, Polynomial and Chebyshev polynomial**

Landau	$\text{TMath}::\text{Landau}(x, \text{mean}, \text{sigma})$	$\text{RooLandau}(\text{name}, \text{title}, x, \text{mean}, \text{sigma})$
Argus	$x \left(1 - \left(\frac{x}{m}\right)^2\right)^p \cdot \exp\left(c \left(1 - \left(\frac{x}{m}\right)^2\right)\right)$	$\text{RooArgusBG}(\text{name}, \text{title}, x, m, c, p)$
Breit-Wigner	$\frac{1}{(x - m)^2 + \frac{1}{4} g^2}$	$\text{RooBreitWigner}(\text{name}, \text{title}, x, m, g)$
Voigtian	$\frac{1}{(x - m)^2 + \frac{1}{4} g^2} \otimes \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x}{s}\right)^2\right)$	$\text{RooVoigtian}(\text{name}, \text{title}, x, m, g, s)$
Crystal Ball	$\frac{\left(\frac{n}{ a }\right)^n e^{-\frac{1}{2} a^2}}{\left(\frac{n}{ a } -  a  - x\right)^n} \Big _{x < - a }, \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{x - m}{s}\right)^2\right) \Big _{x > - a }$	$\text{RooCBSShape}(\text{name}, \text{title}, x, m, s, a, n)$
Decay	$\exp(- x  / \tau) \otimes R(x)$	$\text{RooDecay}(\text{name}, \text{title}, x, \text{tau}, R)$



# $\psi(2S) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ 的拟合

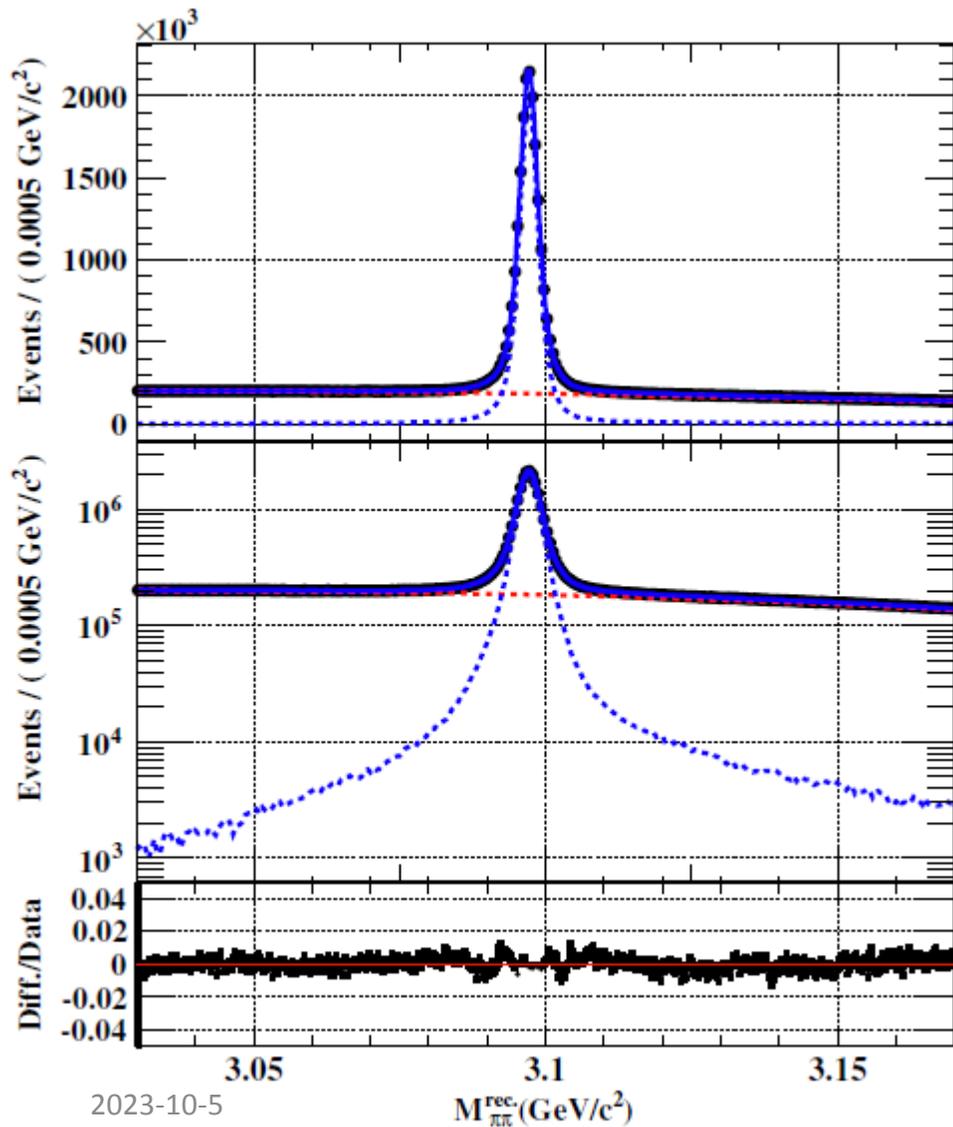


FIG. 3 (color online). The dipion recoil mass spectrum for  $\psi(3686) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ ,  $J/\psi \rightarrow$  anything. Top: Data points (black) overlaid with the fit result (solid blue curve) obtained using the signal shape from  $\psi(3686) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$ ,  $J/\psi \rightarrow e^+ e^-$  (blue dashed curve) and a second-order polynomial background shape (red dashed curve). Middle: The same plot as the top but with a log scale. Bottom: The fractional difference between the fit and the data.

信号形状采用的是无参数PDF

术语园地

$\chi^2$  与 likelihood 拟合

$$\chi^2: \sum_i \frac{(m_i - f_i)^2}{\sigma_i^2}, \quad \mathcal{L}: \prod_i P_i$$

# 检查拟合是否成功、结果是否合理

```
*****
** 13 **MIGRAD      1000      1
*****
FIRST CALL TO USER FUNCTION AT NEW START POINT, WITH IFLAG=4.
START MIGRAD MINIMIZATION. STRATEGY 1. CONVERGENCE WHEN EDM .LT. 1.00e-03
FCN=25139.4 FROM MIGRAD  STATUS=INITIATE      10 CALLS      11 TOTAL
EDM= unknown STRATEGY= 1 NO ERROR MATRIX
EXT PARAMETER      CURRENT GUESS      STEP      FIRST
NO.  NAME      VALUE      ERROR      SIZE      DERIVATIVE
 1  mean      -1.00000e+00  1.00000e+00  1.00000e+00  -6.53357e+01
 2  sigma      3.00000e+00  1.00000e+00  1.00000e+00  -3.60009e+01
ERR DEF= 0.5
MIGRAD MINIMIZATION HAS CONVERGED.
MIGRAD WILL VERIFY CONVERGENCE AND ERROR MATRIX.
COVARIANCE MATRIX CALCULATED SUCCESSFULLY
FCN=25137.2 FROM MIGRAD  STATUS=CONVERGED      33 CALLS      34 TOTAL
EDM=8.3048e-07 STRATEGY= 1 ERROR MATRIX ACCURATE
EXT PARAMETER      STEP      FIRST
NO.  NAME      VALUE      ERROR      SIZE      DERIVATIVE
 1  mean      -9.40910e-01  3.03997e-02  3.32893e-03  -2.95416e-02
 2  sigma      3.01575e+00  2.22446e-02  2.43807e-03  5.98751e-03
ERR DEF= 0.5
EXTERNAL ERROR MATRIX.  NDIM= 25  NPAR= 2  ERR DEF=0.5
 9.241e-04 -1.762e-05
-1.762e-05  4.948e-04
PARAMETER CORRELATION COEFFICIENTS
NO.  GLOBAL  1  2
 1  0.02606  1.000 -0.026
 2  0.02606 -0.026  1.000
*****
** 18 **HESSE      1000
*****
COVARIANCE MATRIX CALCULATED SUCCESSFULLY
FCN=25137.2 FROM HESSE  STATUS=OK      10 CALLS      44 TOTAL
EDM=8.30707e-07 STRATEGY= 1 ERROR MATRIX ACCURATE
EXT PARAMETER      INTERNAL      INTERNAL
NO.  NAME      VALUE      ERROR      STEP SIZE      VALUE
 1  mean      -9.40910e-01  3.04002e-02  6.65786e-04  -9.40910e-01
 2  sigma      3.01575e+00  2.22449e-02  9.75228e-05  3.01575e+00
ERR DEF= 0.5
EXTERNAL ERROR MATRIX.  NDIM= 25  NPAR= 2  ERR DEF=0.5
 9.242e-04 -1.807e-05
-1.807e-05  4.948e-04
PARAMETER CORRELATION COEFFICIENTS
NO.  GLOBAL  1  2
 1  0.02672  1.000 -0.027
 2  0.02672 -0.027  1.000
```

1. 检查输出信息
2. 估计统计误差
3. 检查拟合优度

## 术语园地

拟合优度 goodness of fit

对一个好的拟合有  $\chi^2/NDF \approx 1$

自由度: NDF (number of freedom)

$NDF = \text{No. of Bin} - \text{No. of paras}$

# 检查拟合是否成功、结果是否合理 II

MIGRAD MINIMIZATION HAS CONVERGED.

MIGRAD WILL VERIFY CONVERGENCE AND ERROR MATRIX.

COVARIANCE MATRIX CALCULATED SUCCESSFULLY

FCN=25137.2 FROM MIGRAD STATUS=CONVERGED 33 CALLS 34 TOTAL  
EDM=8.3048e-07 STRATEGY= 1 ERROR MATRIX ACCURATE

EXT	PARAMETER			STEP	FIRST
NO.	NAME	VALUE	ERROR	SIZE	DERIVATIVE
1	mean	-9.40910e-01	3.03997e-02	3.32893e-03	-2.95416e-02
2	sigma	3.01575e+00	2.22446e-02	2.43807e-03	5.98751e-03

ERR DEF= 0.5

EXTERNAL ERROR MATRIX. NDIM= 25 NPAR= 2 ERR DEF=0.5

9.241e-04 -1.762e-05  
-1.762e-05 4.948e-04

PARAMETER	CORRELATION COEFFICIENTS		
NO.	GLOBAL	1	2
1	0.02606	1.000	-0.026
2	0.02606	-0.026	1.000

# 拟合小结

- 拟合是对前期分析工作已获得信息的集大成，包含了分析者对
  - 信号形状的认识：物理模型、数据样本的大小、探测器分辨、效率曲线、测量的中心值是否有偏等
  - 本底的了解：来源与大小、是否有未知/不理解的本底
- 多关注如何构建模型，这是知识的汇总

术语园地

分波分析（PWA: partial wave analysis）  
带着复杂的物理模型、参数可多达上百的拟合

# 效率

$$B(X \rightarrow f) = \frac{N^{sig}}{\epsilon \cdot N^X}$$

# 什么是效率

$$B(X \rightarrow f) = \frac{N^{sig}}{\epsilon \cdot B_{int} \cdot N^X}$$

把中间态分支比单列出来的定义

- 分支比公式中的效率为事例的选择效率，包括探测器几何接收度、选择条件的效率、中间态的分支比等。
- 效率的估计一般用Monte Carlo模拟。基本的假设是Monte Carlo可以很好地模拟数据。
- 应当用实际数据检验Monte Carlo模拟的可靠性，必要时对Monte Carlo模拟效率进行修正。

术语园地

接收度 acceptance

效率 efficiency

探测效率 detection efficiency

# 什么是效率 (II)

- 一般地

$$\varepsilon_{DT} = \varepsilon_{DT}^{Geom} \cdot \varepsilon_{DT}^{Track} \cdot \varepsilon_{DT}^{Ptid} \cdot \varepsilon_{DT}^{\gamma ID} \dots$$

$$\varepsilon_{MC} = \varepsilon_{MC}^{Geom} \cdot \varepsilon_{MC}^{Track} \cdot \varepsilon_{MC}^{Ptid} \cdot \varepsilon_{MC}^{\gamma ID} \dots$$

$$\varepsilon_{DT}^i = \varepsilon_{MC}^i \cdot f^i$$

通过研究得到  $f^i$  即可对 MC 所得到的效率进行修正，使之与数据的真实效率更符合

# 一个 cut flow 的例子

估一估

- $\psi(2S) \rightarrow \pi^+ \pi^- J/\psi$
  - $J/\psi \rightarrow l^+ l^-$
- 的效率各是多少？

Criteria	$\psi(2s) \rightarrow \Sigma^0 \bar{\Lambda}$	$\psi(2s) \rightarrow \bar{\Sigma}^0 \Lambda$
Total Events	80000	80000
$N_{good} = 4, N_{charge} = 0$	44198	43983
$N_p = 1, N_{\bar{p}} = 1, N_{\pi^+} = 1, N_{\pi^-} = 1$	43856	43643
$1 \leq N_\gamma \leq 10$	38075	38146
$\theta(\gamma, \bar{p}) > 20^\circ$	36491	34538
$\Lambda, \bar{\Lambda}$ reconstruction	34354	32564
Pass 6C	25192	22390
$\chi_{6C}^2(\gamma) < \chi_{6C}^2(\gamma\gamma/0\gamma)$	24681	21850
$\chi_{6C}^2 < 25$	18368	15447
$L_\Lambda/\sigma > 2 (\bar{\Lambda})$	16084	13502
$M_{\Lambda\bar{\Lambda}} > 3.48 \text{ GeV}/c^2$	15891	13498
$M_{\gamma\bar{\Lambda}}(M_{\gamma\Lambda}) \geq 1.15 \text{ GeV}$	15870	13488
Efficiency ( $\epsilon\%$ )	19.84%	16.86%

Table 2: Cut flow of  $\psi(2S) \rightarrow \bar{\Sigma}^0 \Lambda + c.c.$

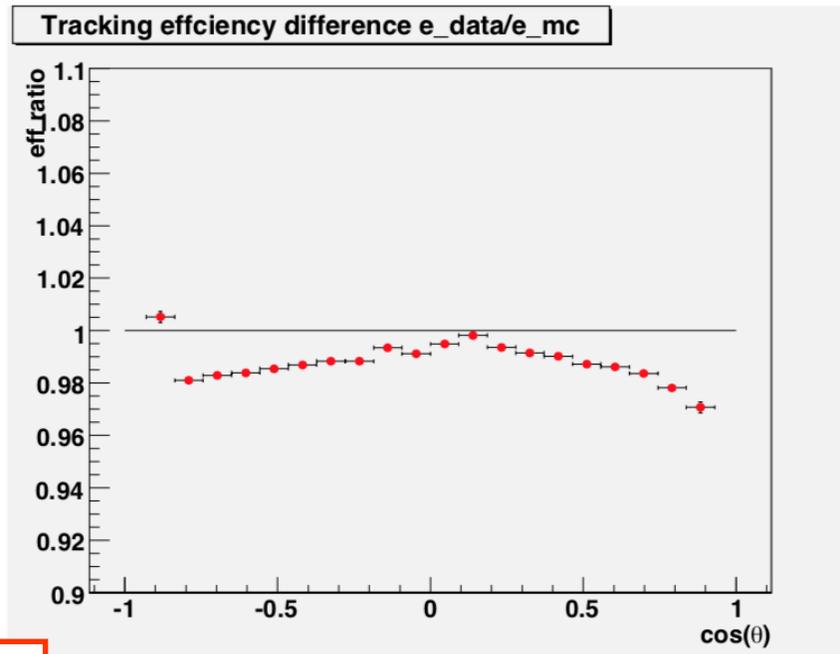
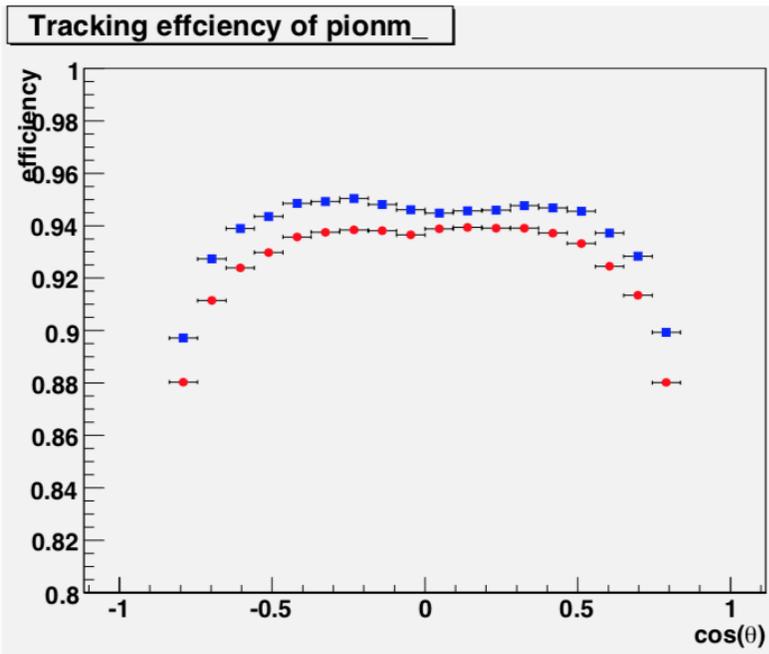
# 关于效率估计的说明

- 数据与 MC 的不一致永远存在，因此利用 MC 得到的效率永远需要修正，但对于不同的过程要求也不同
  - 对于小统计量情况，统计误差为主，数据与信号模拟的差别对结果影响很小，但对本底估计时需特别关注（稀有过程、新物理）
  - 对于大统计量情形，期望高精度结果，数据与信号模拟的差别不容忽视

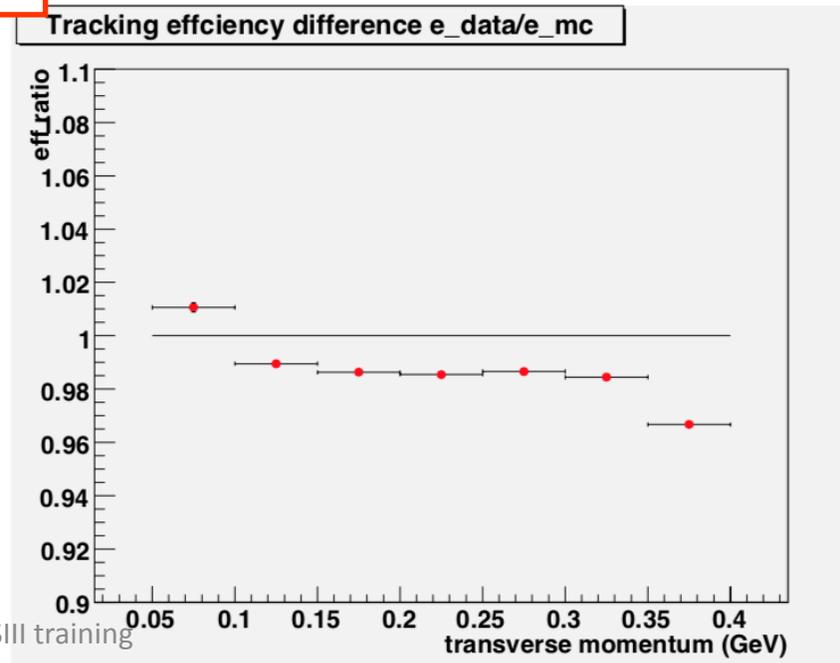
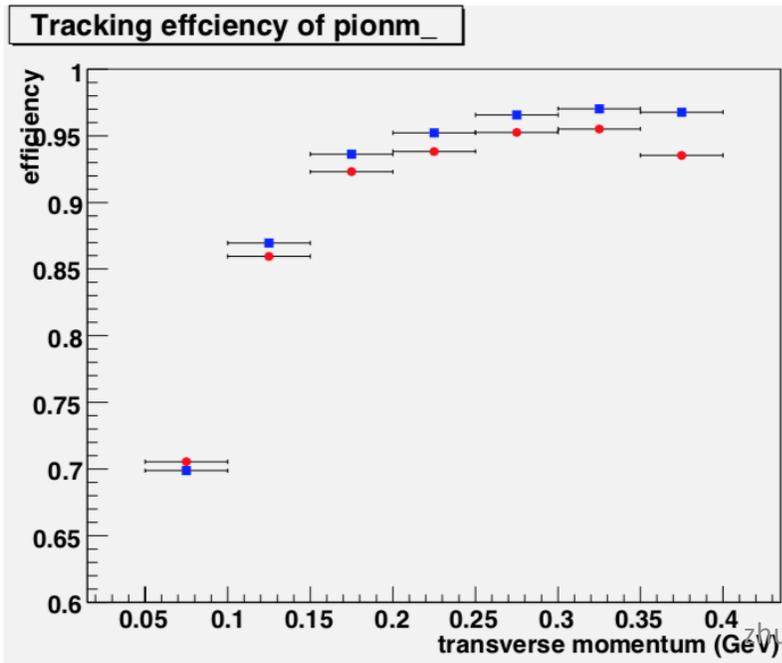
# 径迹效率修正

$$B_{\pi\pi J/\psi} = \frac{N_{\pi\pi J/\psi}}{\epsilon_{MC} N^{tot}} \quad \epsilon_{MC} = \epsilon_{\pi^+} \epsilon_{\pi^-} \epsilon_{m_{\pi\pi}} \dots$$

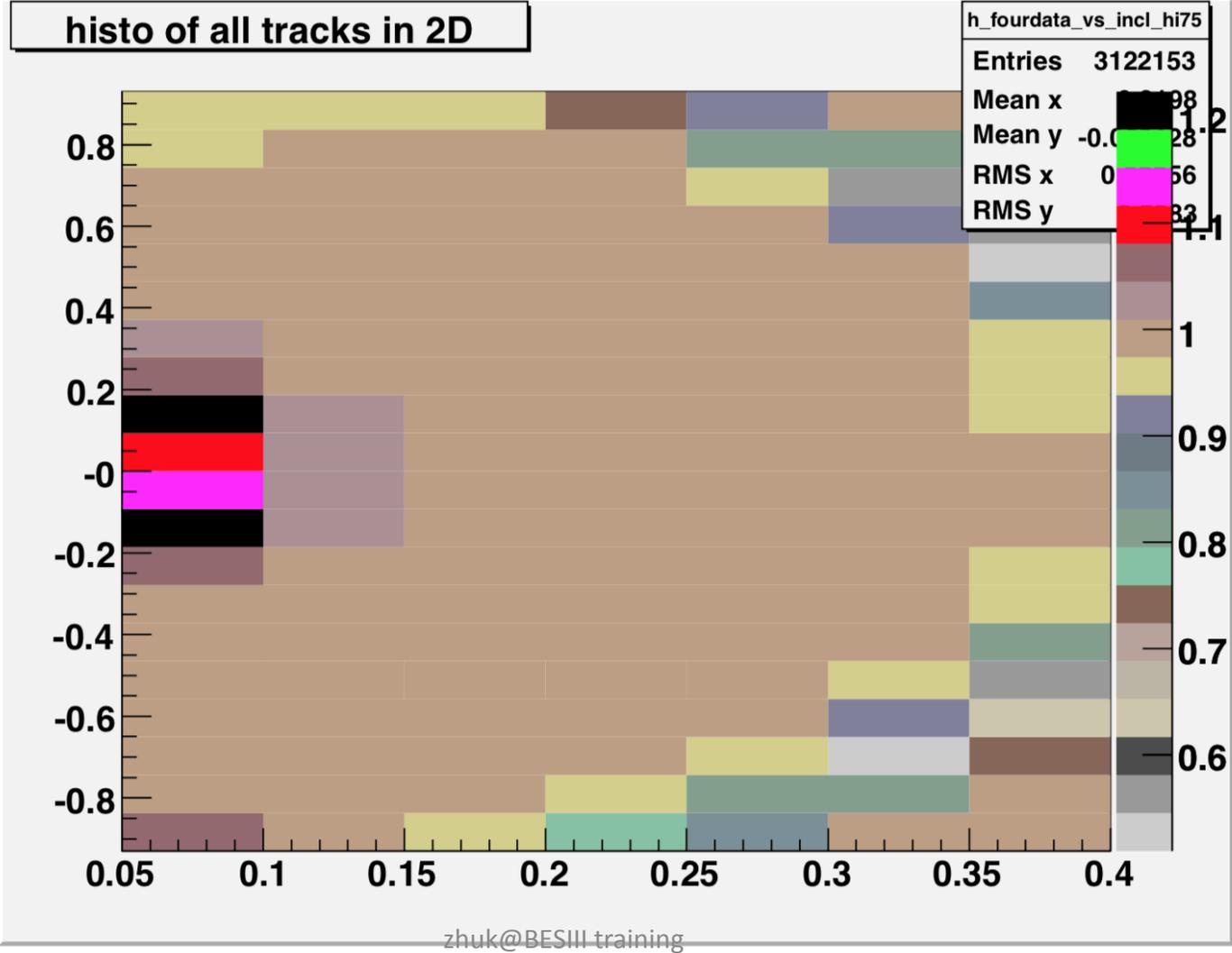
- ❑ 径迹效率研究
  - ❑ 给出数据与MC径迹效率关于动量与角度的二维分布
  - ❑ 在分析中用 data/MC 之比对 MC 做了 reweight (修正)
  - ❑ 精度控制在 **0.1%**



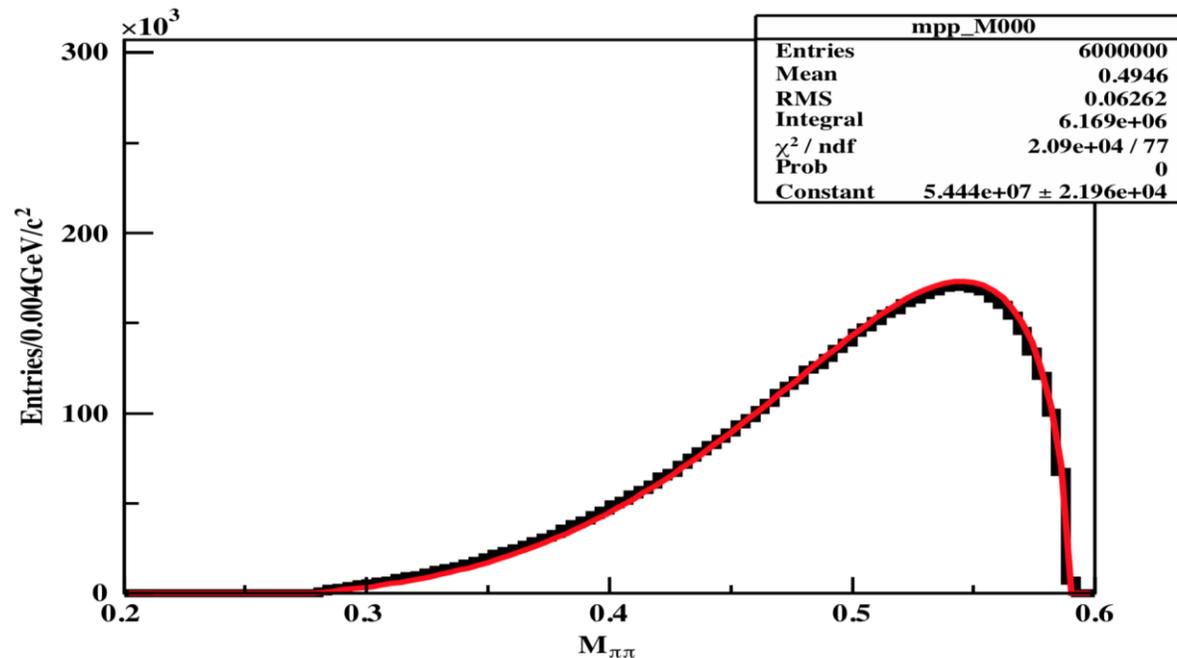
pi+



# 数据与MC二维径迹效率比 (reweight 的依据)



# 谱形分布的效率修正



- MC 采用了 JPIPI,  $g$  和  $g_1$  来自 BES1 的测量:

$$g(s - 2m_{\pi\pi}^2) + 2g_1 E_{\pi^+} E_{\pi^-} \epsilon_{\psi'}^*(M) \cdot \epsilon_{\psi}(\Lambda)$$

- 最终采用数据（轻子道的干净样本）来 reweight MC  $M_{\pi\pi}$  分布

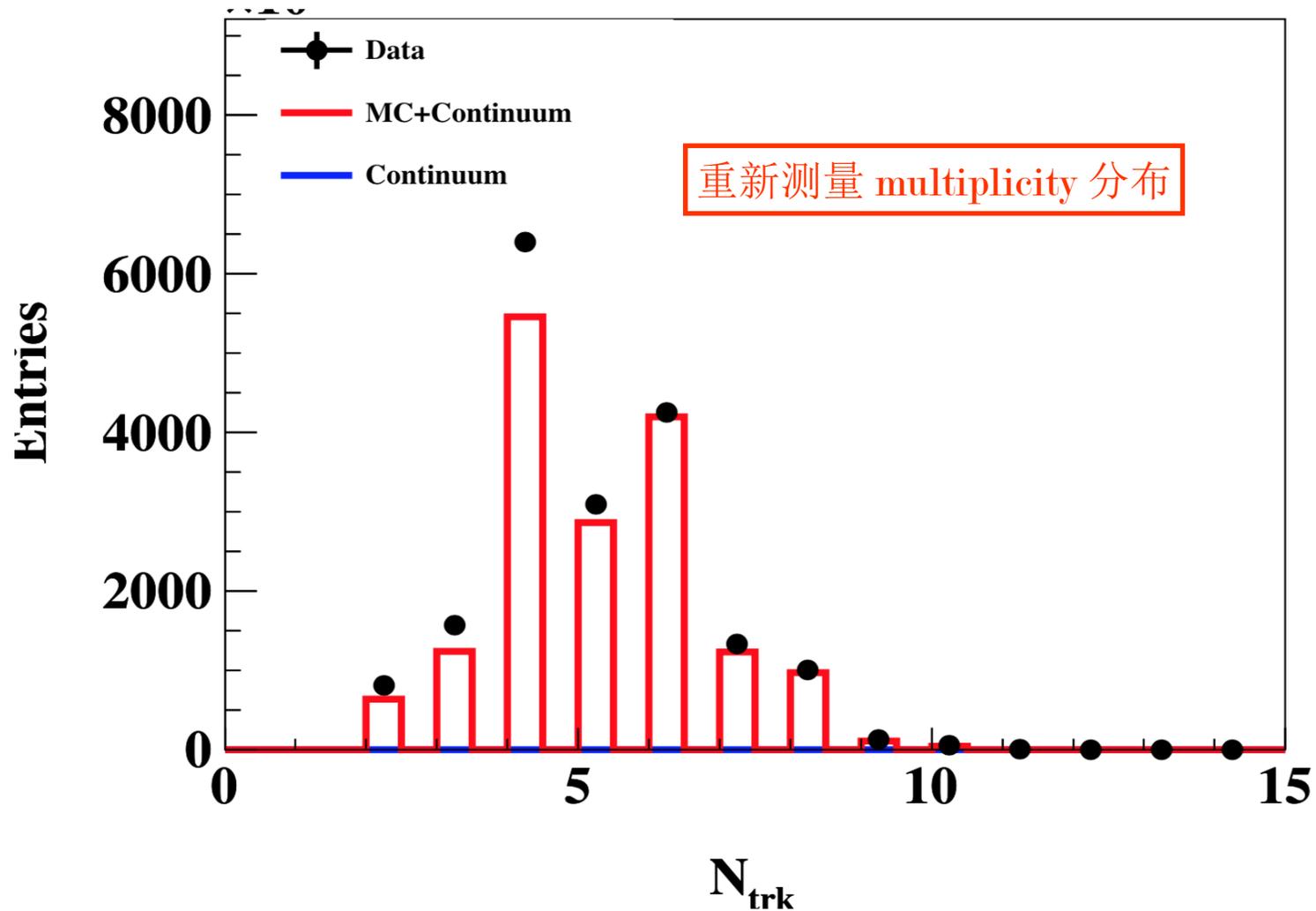
# 多重数分布的效率修正

- 高统计量的新问题:

探测器里出现 2 tracks、4tracks, 6tracks, ...时, 每种情形的每根 track 的重建效率并不同相同: track 越多, 效率越低, ...

prongs of $J/\psi$	0	2	4	6	8	10	Total
number of events( $n_i$ or $n$ )	607255	11885458	14889294	6462789	688523	11853	34549656 <sup>a</sup>
$w_k$ from EvtGen	0.0175	0.3440	0.4310	0.1871	0.0199	0.0003	53.505%
$w_k$ from Mehtod-I	0.0225	0.3899	0.4024	0.1667	0.0169	0.0015	53.549%
$w_k$ from Mehtod-II	0.0230	0.3960	0.4010	0.1624	0.0164	0.0013	53.574%
$\epsilon_k$ (MC)	55.98%	55.02%	53.20%	51.20%	48.61%	44.70%	

# 数据、MC 的多重数分布符合不佳



# 解方程

$$\begin{pmatrix} 884138.2 \\ 1691653.1 \\ 6947052.0 \\ 3295541.7 \\ 4557824.2 \\ 1395702.8 \\ 1059873.7 \\ 134480.3 \\ 55084.1 \\ 4179.1 \\ 835.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52.8927 & 2.8744 & 0.1369 & 0.0179 & 0.0022 & 0.0000 \\ 1.7753 & 9.5437 & 1.2390 & 0.1800 & 0.0247 & 0.0291 \\ 0.9905 & 41.1825 & 6.3557 & 1.0455 & 0.2037 & 0.0571 \\ 0.0434 & 0.9993 & 18.4289 & 4.1838 & 0.9895 & 0.5728 \\ 0.0104 & 0.3829 & 25.8516 & 11.2145 & 3.4419 & 1.8181 \\ 0.0006 & 0.0148 & 0.9357 & 18.6851 & 8.4610 & 4.7885 \\ 0.0003 & 0.0026 & 0.2430 & 15.2442 & 13.9761 & 9.5418 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0090 & 0.5556 & 14.2377 & 12.1279 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0010 & 0.0810 & 6.9984 & 10.1813 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0023 & 0.2583 & 4.4639 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0003 & 0.0230 & 1.0272 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_2 \\ w_4 \\ w_6 \\ w_8 \\ w_{10} \end{pmatrix}$$

# 测量 $B(J/\psi \rightarrow l^+ l^-)$ 时的相消法

- 常规方法:  $B = \frac{N^{obs}}{\epsilon N^{tot}}$
- 这里  $B_{ll} = \frac{N_{\pi\pi ll}}{\epsilon_{\pi\pi ll} N_{tot}} / \frac{N_{\pi\pi}}{\epsilon_{\pi\pi} N_{tot}} = \frac{N_{\pi\pi ll}}{N_{\pi\pi}} \frac{\epsilon_{\pi\pi}}{\epsilon_{\pi\pi ll}}$
- 因此
  - 总数  $N_{tot}$  可以消掉
  - 原则上  $\pi$  的径迹效率也可以相消,  $\epsilon_{\pi\pi ll} = \epsilon_{\pi\pi} \epsilon_{ll}$
  - 只剩下高动量的轻子需要仔细考虑, 而高动量的粒子效率高 (因此误差小)

Sources	$\pi^+\pi^- J/\psi$	$e^+e^-$	$\mu^+\mu^-$
Tracking	0.80	0.20	0.20
Multiplicity of $J/\psi$	0.20	0.20	0.20
$M_{\pi^+\pi^-}$ distribution	0.35	0.01	0.01
Background Shape	0.03	0.03	0.04
Fit/Count Range	0.06	0.14	0.14
Bin Size	0.06	0.06	0.06
$E/p$	—	0.18	0.09
$\cos \theta_{\pi^+\pi^-}$	0.13	0.07	0.07
$\cos \theta_{l^+l^-}$	—	0.04	0.05
FSR effect of $l^+l^-$	—	0.10	0.23
Fit Method	0.37	0.37	0.37
Trigger	0.10	0.30	0.30
Number of $\psi(3686)$	0.81	—	—
Sum in quadrature	1.28	0.62	0.63

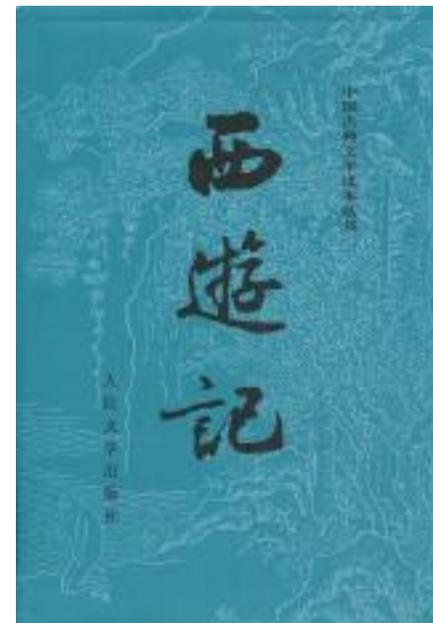
# 回顾

$$B(X \rightarrow f) = \frac{N^{sig}}{\epsilon \cdot N^X}$$

推荐阅读：李刚老师关于 $\pi^+\pi^-J/\psi$ 分析的 memo 与 draft  
在哪？上 HyperNews 或 Documentation 去找  
它们又在哪？[bes3.ihep.ac.cn](http://bes3.ihep.ac.cn) 主页右下角有链接

# 当分析工作遇到困难时

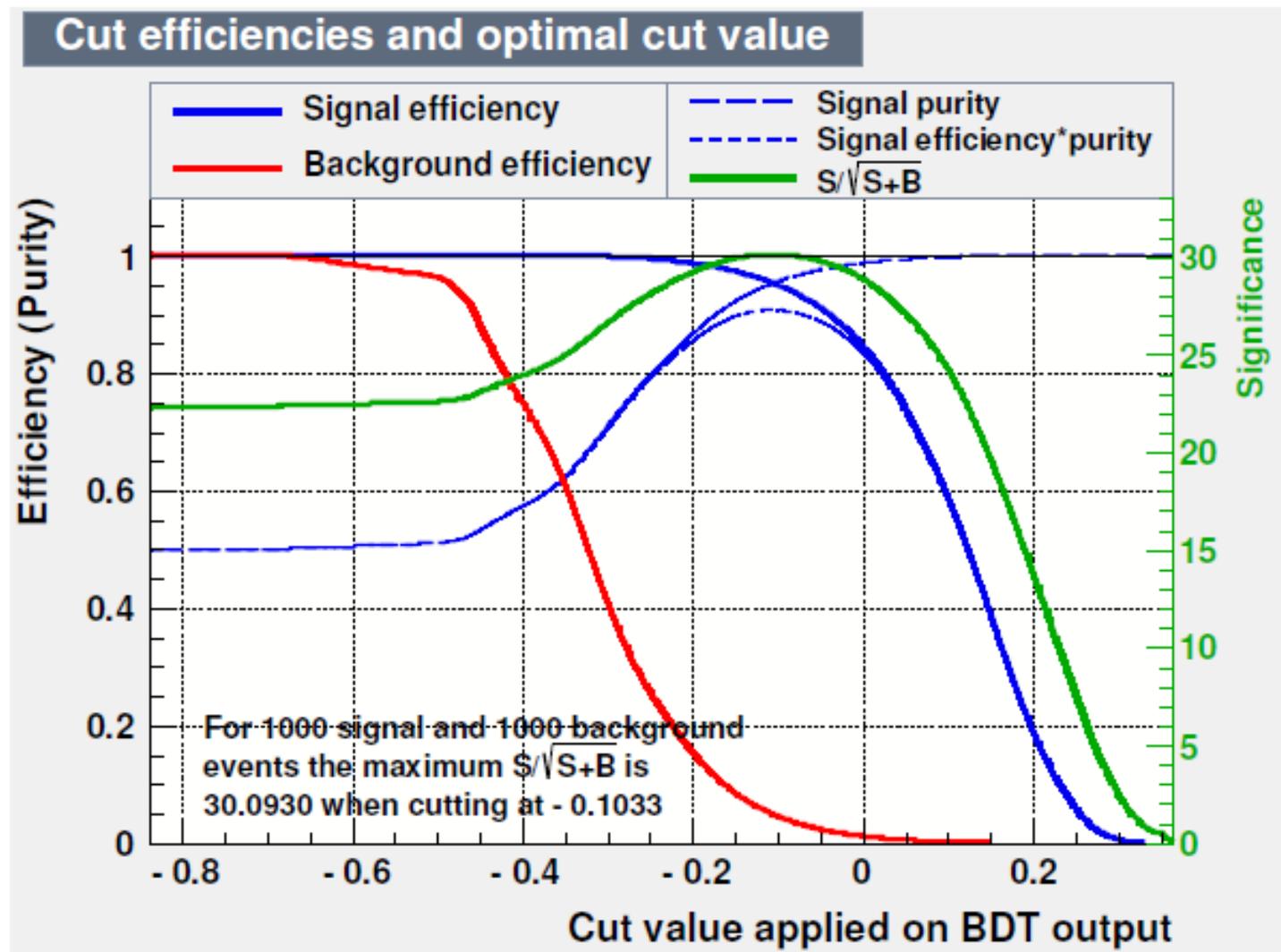
## 重读《西游记》



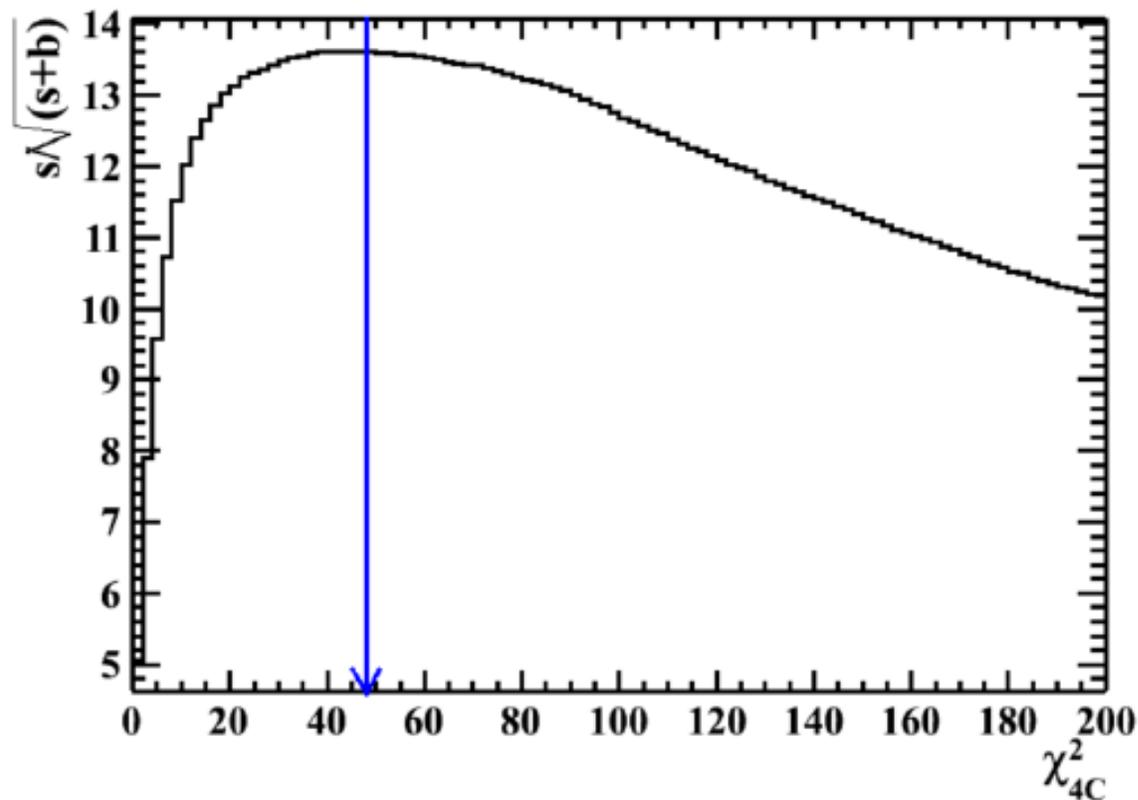
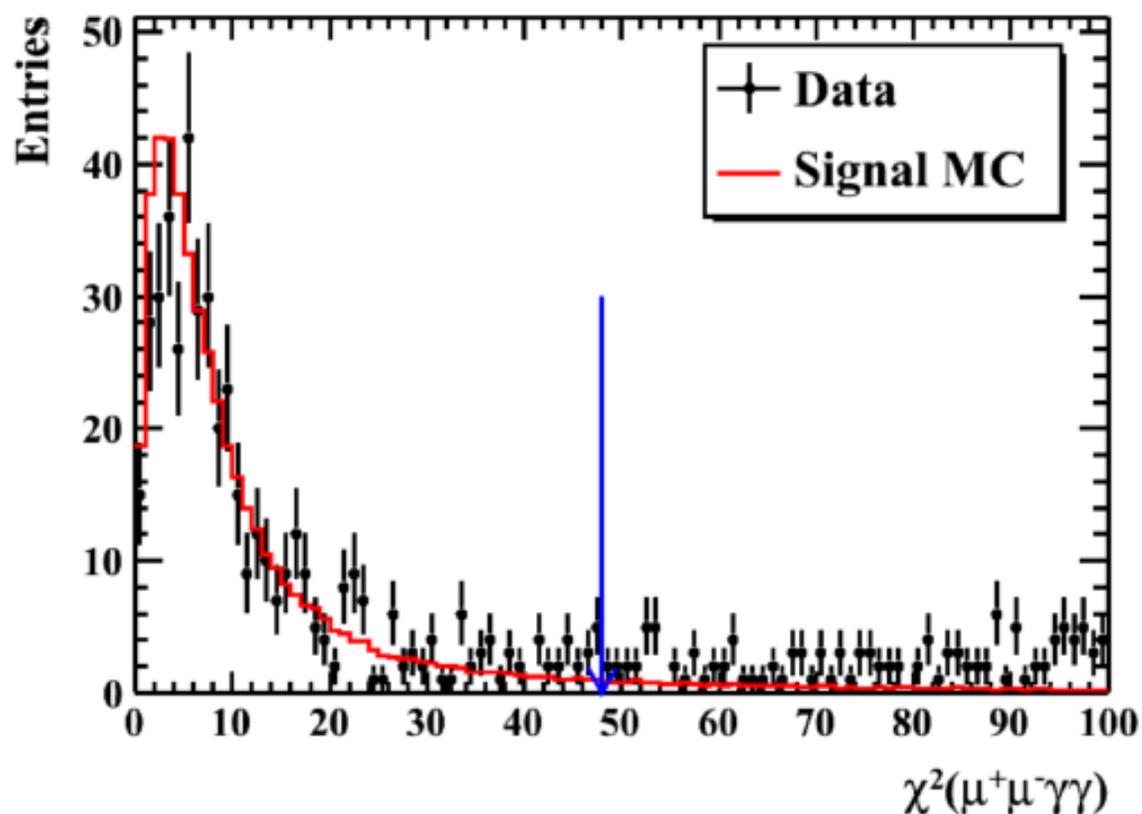


# 事例选择的优化 (专题)

- 尽可能在保证效率的同时压低本底
  - Why?  
提高信号的显著性【significance】  
即分析的灵敏度【sensitivity】
  - How?  
基于 FOM (figure-of-merit) 的优化  
$$FOM = \frac{S}{\sqrt{S+B}}$$



➤  $\chi_{4C}^2 < 48$  ( $J/\psi\eta \rightarrow \mu^+\mu^-\gamma\gamma$ )



• 注意事项:

1. 计算 FOM 时只针对信号区间的事例
2. 不要使用数据进行优化, 特别是小统计量的情况下, 以免造成偏差