



湖南师范大学
Hunan Normal University

强子弹性电磁形状因子的研究

杨宝仪

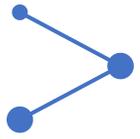
陈慕阳

湖南师范大学

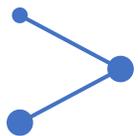
物理与电子科学学院

第五届粒子物理天问论坛

2023年11月12日



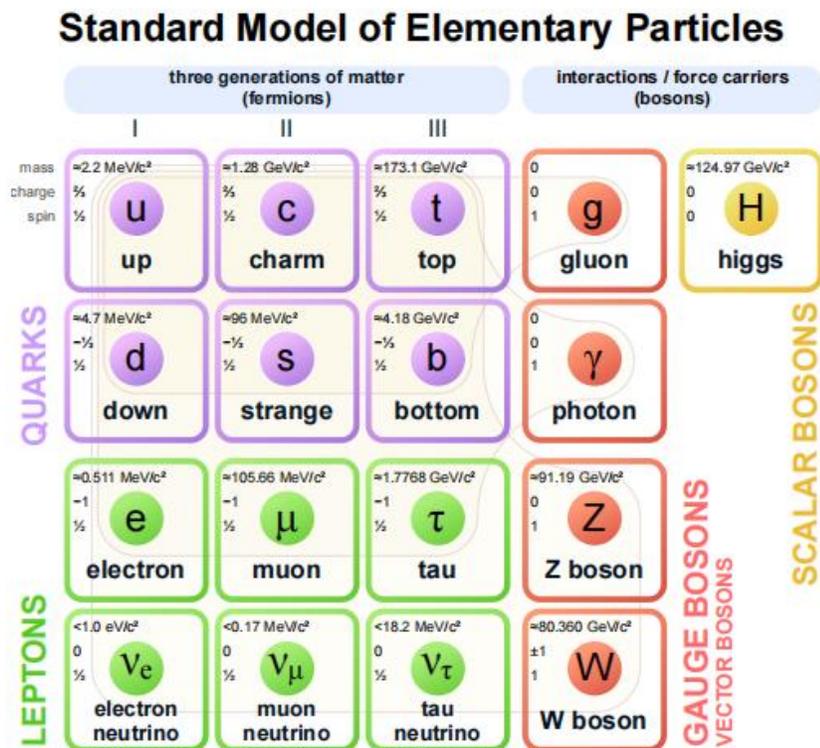
- 研究背景
- 理论基础
- 研究过程与结果
- 总结与展望

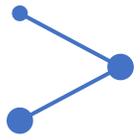


标准模型

基本粒子是组成物质的最小组分。目前，粒子物理标准模型认为物质由 61 种基本粒子组成。

粒子物理标准模型包含了三种基本相互作用，分别是强相互作用、电磁相互作用和弱相互作用。强子是夸克和胶子通过强相互作用形成的复合粒子，按其组成夸克的不同，强子还可以分为：介子和重子。

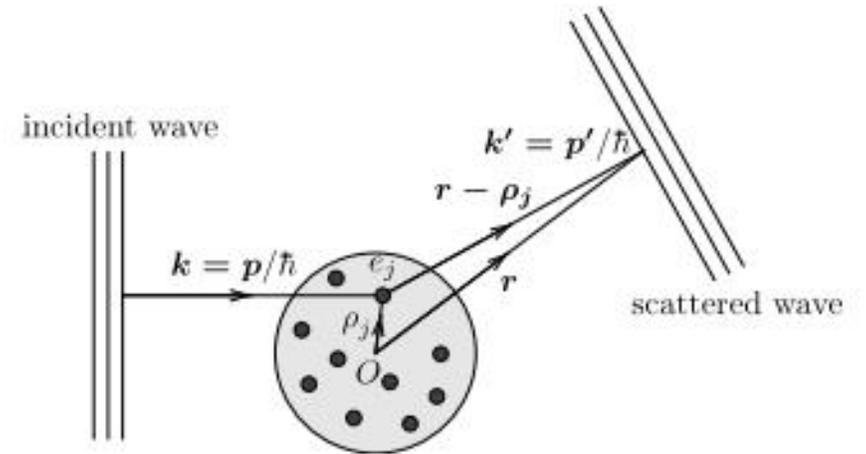




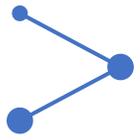
形状因子

强子的电磁形状因子提供了关于强子内部结构的重要信息。对于复合粒子，电磁形状因子可描述非点状粒子的内部结构，它们包含了强子内部的电荷和磁矩分布。

为了进一步了解强子内部结构信息，我们在夸克模型中探究介子与重子的弹性电磁形状因子性质。利用强子结构的代数方法，我们推导分析强子的弹性电磁形状因子，从而也可以得到在电和光产生中可测量的振幅。



电荷分布 $\{e_j\}$ 的复合粒子弹性散射示意图



以核子为例

图1显示了斯坦福大学一项开创性实验的结果[3]，通过质子和氘核的弹性电子散射，确定了质子和中子的两种形状因子与 Q^2 的关系。图表中数据点按比例缩放可使它们重合。

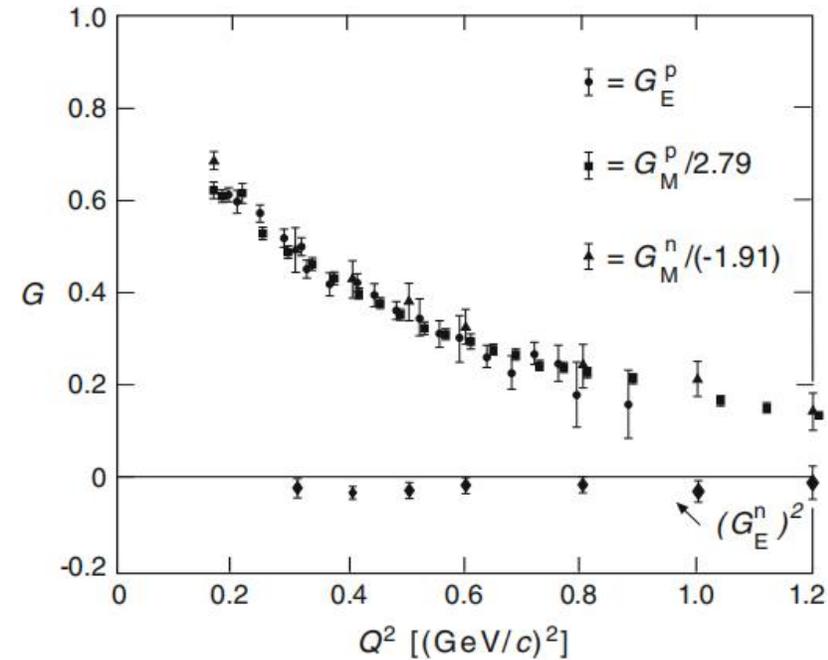
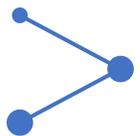
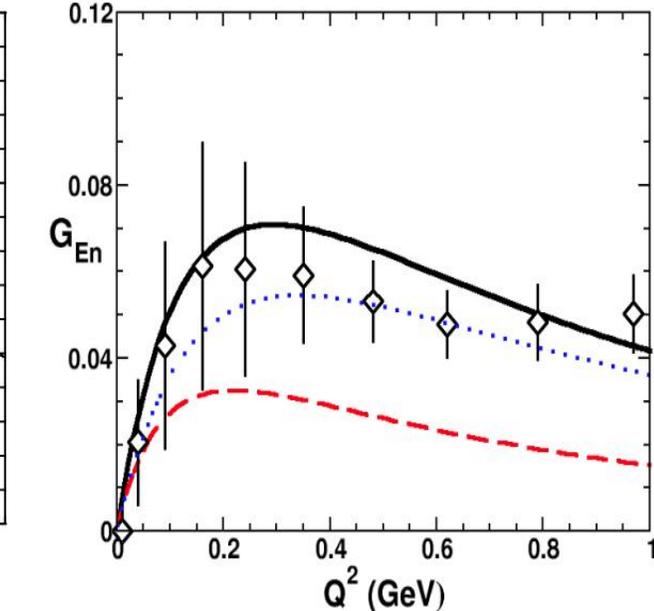
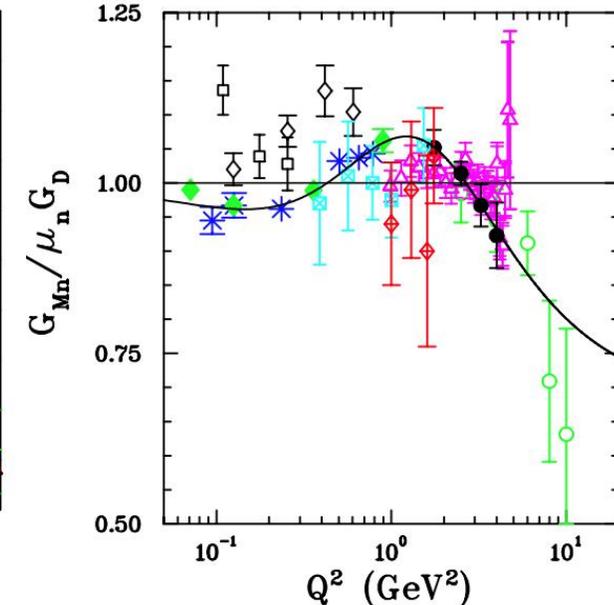
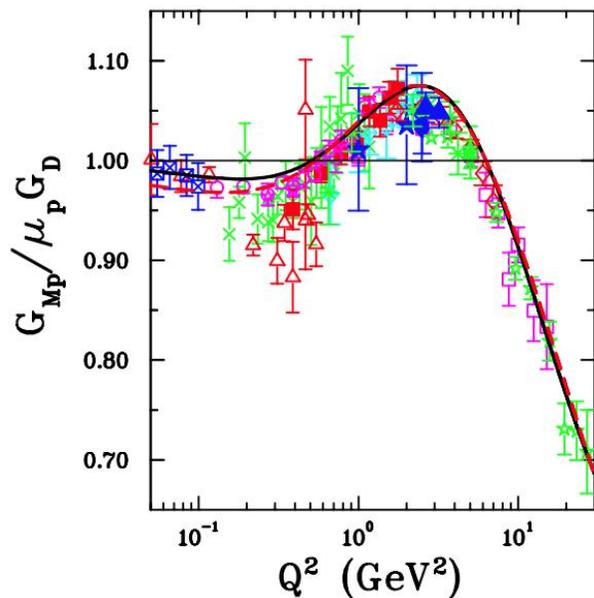
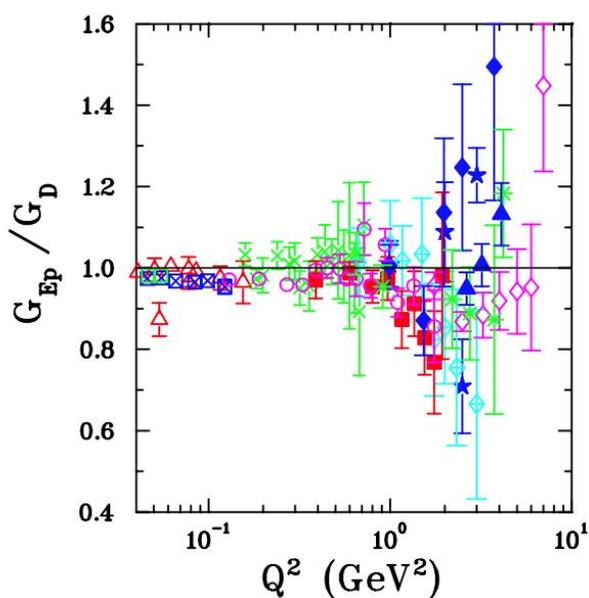


图1

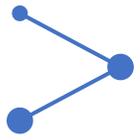
[3] E. B. Hughes, T. A. Griffiffy, M. R. Yearian, and R. Hofstadter. Phys. Rev., 139:B458 - B471(1965).



研究现状（以核子为例）



实验上，它们也可以通过测量微分截面和极化观测值来获得。结合实验与理论测量形状因子与 Q^2 的关系可以让我们了解到核子电荷和磁矩径向分布。



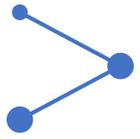
确定体系哈密顿量

在单胶子交换模型中，哈密顿量由动能、禁闭势和单胶子交换势三部分构成：

$$H = T + V_{conf} + V_{OGE}$$

单胶子交换势主要提供夸克之间的中短程相互作用，由库仑势、自旋-自旋耦合，轨道-自旋耦合以及张量项四部分构成：

$$V_{OGE} = \sum_{i < j} V_{ij}^{coul} + V_{ij}^{SS} + V_{ij}^{LS} + V_{ij}^T$$



确定体系哈密顿量

动能项: $T = \sum_i m_i + \sum_i T_i - T_{cm} = \sum_i m_i - \sum_{i=1}^3 \frac{\nabla_{r_i}^2}{2m_i} + \frac{\nabla_{R_{cm}}^2}{2M}$, 在球坐标下 $\nabla_r^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2}$

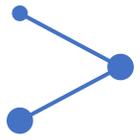
势能项: $V_{conf} = \sum_{i<j} -\frac{3}{16} (\lambda_i \cdot \lambda_j) \cdot [bf(r_{ij}) + c_{ij}]$, $V_{ij}^{coul}(r_{ij}) = \frac{\alpha}{4} (\lambda_i \cdot \lambda_j) \frac{1}{r_{ij}}$,

$$V_{ij}^{SS} = -\frac{\alpha}{4} (\lambda_i \cdot \lambda_j) \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sigma_{ij}^3 e^{-\sigma_{ij}^2 r_{ij}^2}}{\pi^{3/2}} \cdot \frac{16}{3m_i m_j} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j) \right\},$$

$$V_{ij}^{LS} = -\frac{3\alpha}{32} (\lambda_i \cdot \lambda_j) \cdot \left[\left(\frac{1}{2m_1^2} + \frac{1}{2m_2^2} \right) \left(\frac{4\alpha}{3r^3} - \frac{b}{r} \right) + \frac{8\alpha}{3m_1 m_2 r^3} \right] \cdot \{ \mathbf{L}_{ij} \cdot (\mathbf{S}_i + \mathbf{S}_j) \}$$

$$-\frac{3\alpha}{32} (\lambda_i \cdot \lambda_j) \cdot \left(\frac{1}{2m_1^2} - \frac{1}{2m_2^2} \right) \left(\frac{4\alpha}{3r^3} - \frac{b}{r} \right) \cdot \{ \mathbf{L}_{ij} \cdot (\mathbf{S}_i - \mathbf{S}_j) \}$$

$$V_{ij}^T = -\frac{\alpha}{4} (\lambda_i \cdot \lambda_j) \cdot \frac{1}{m_i m_j r_{ij}^3} \left\{ \frac{3(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{S}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^2} - \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \right\}.$$



多高斯展开算法

多高斯展开法为用n组基底展开空间波函数：
$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^{n_{max}} c_n |\phi_{nlm}\rangle, \quad \phi_{nlm}(\mathbf{r}) = \phi_{nl}(r)Y_{lm}(\mathbf{r})$$

列出薛定谔方程：
$$H|\psi_n\rangle = E|\psi_n\rangle$$

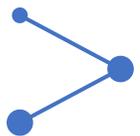
其中 $|\psi_n\rangle = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + c_3\psi_3 + \dots$

投影在基底则有 $\langle\psi_1|H|c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + c_3\psi_3 + \dots\rangle = \langle\psi_1|E|c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + c_3\psi_3 + \dots\rangle$

可得矩阵形式
$$\begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots \\ H_{21} & H_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} & \dots \\ N_{21} & N_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \end{pmatrix}$$

此时求解质量薛定谔方程就转化为求解广义本征值问题：

$$\sum_{i=1}^{n_{max}} \sum_{j=1}^{n_{max}} (H_{ij} - N_{ij}E)c_j = 0$$



叠加态

对于某一个态，可能为两个态的叠加，有：

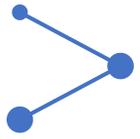
$$\begin{aligned}\hat{H}|\psi\rangle &= C_1\hat{H}|\psi_1\rangle + C_2\hat{H}|\psi_2\rangle \\ &= C_1E|\psi_1\rangle + C_2E|\psi_2\rangle\end{aligned}$$

构造 $1^2S_{\frac{1}{2}^+}$ 和 $2^2S_{\frac{1}{2}^+}$ 混合矩阵元：

$$\begin{pmatrix} \langle 1^2S_{\frac{1}{2}^+} | \hat{H} | 2^2S_{\frac{1}{2}^+} \rangle & \langle 1^2S_{\frac{1}{2}^+} | \hat{H} | 2^2S_{\frac{1}{2}^+} \rangle \\ \langle 1^2S_{\frac{1}{2}^+} | \hat{H} | 2^2S_{\frac{1}{2}^+} \rangle & \langle 1^2S_{\frac{1}{2}^+} | \hat{H} | 2^2S_{\frac{1}{2}^+} \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^2S_{\frac{1}{2}^+} \\ 2^2S_{\frac{1}{2}^+} \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1^2S_{\frac{1}{2}^+} \\ 2^2S_{\frac{1}{2}^+} \end{pmatrix}$$

得到混合后的态的关系：

$$\begin{pmatrix} nL_J \\ nL'_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^2S_{\frac{1}{2}^+} \\ 2^2S_{\frac{1}{2}^+} \end{pmatrix}$$



理论基础：介子弹性能磁形状因子



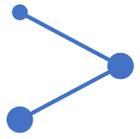
$$\text{介子矩阵元: } \langle P_f(p_f) | j^\mu(0) | P_i(p_i) \rangle = f(Q^2) \left((p_f + p_i)^\mu - \frac{M_f^2 - M_i^2}{q^2} (p_f - p_i)^\mu \right)$$

$$j^\mu(0) = \bar{\psi}(0) \gamma^\mu \psi(0) \quad Q^2 = -(P_f - P_i)^\mu (P_f - P_i)_\mu$$

$$\text{介子态: } |\mathbf{P}(P)\rangle = \sqrt{\frac{2E_P}{N_c}} \chi_{s\bar{s}}^{SM_s} \int \frac{d^3k d^3\bar{k}}{(2\pi)^3} \Phi\left(\frac{m_{\bar{q}}\vec{k} - m_q\vec{\bar{k}}}{m_{\bar{q}} + m_q}\right) \times \delta^{(3)}(\vec{k} + \vec{\bar{k}} - \vec{P}) b_{ks}^+ d_{\bar{k}\bar{s}}^+ |0\rangle$$

$$\text{介子能量: } E_p = \sqrt{M^2 + \vec{p}^2}$$

$$\text{令 } p^\mu = (E_p, \vec{p}) \quad \vec{p} = (0, 0, p)$$



理论基础：重子弹性电磁形状因子



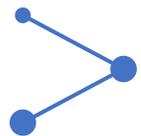
散射波振幅：
$$A_j = f e_i e^{ik \cdot \rho_i} e^{ik' \cdot (r - \rho_i)} = f e^{ik' \cdot r} e_j e^{iQ \cdot \rho_i}$$

电荷分布上的总散射振幅：
$$A = \sum_j A_j = f e^{ik' \cdot r} \sum_j e_j e^{iQ \cdot r_j / \hbar}$$

电形状因子矩阵元：
$$G_E(Q^2) = \frac{1}{Z_b e} \langle i | \sum_j e_j e^{iQ \cdot r_j / \hbar} | i \rangle$$

磁形状因子矩阵元：
$$G_M(Q^2) = \frac{1}{Z_b \mu_N} \langle i | \sum_j \mu_j e^{iQ \cdot r_j / \hbar} | i \rangle$$

核磁子：
$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2M_p} = 3.1525 \cdot 10^{-14} \text{ MeVT}^{-1}.$$



研究过程与结果：N、 Δ 重子质量谱的研究



$m_u(\text{GeV})$	$b(\text{GeV}^2)$	α	$\sigma_{ss}(\text{GeV})$	$r_c(\text{fm})$	$C_0(\text{GeV})$
0.21	0.10	0.88	0.94	0.37	-0.461

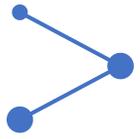
表 B.1 夸克模型参数

$n^{2S+1}L_{JP} N_6, {}^{2S+1}N_3, N, L, J^P\rangle$	Mass	Exp.	Δ	Star	
$1^2P_{1/2}^- 70, {}^2 10, 1, 1, \frac{1}{2}^- \rangle$	$\Delta(1620)$	1618	1590-1610	18	****
$1^2P_{3/2}^- 70, {}^2 10, 1, 1, \frac{3}{2}^- \rangle$	$\Delta(1700)$	1618	1690-1730	92	****
$2^2S_{1/2}^+ 70, {}^2 10, 2, 0, \frac{1}{2}^+ \rangle$	$\Delta(1750)$	1911	1748	163	*
$1^4D_{1/2}^+ 56, {}^2 10, 2, 2, \frac{1}{2}^+ \rangle$	$\Delta(1910)$	2014	1800-1900	164	****
$1^4S_{3/2}^+ 56, {}^2 10, 0, 0, \frac{3}{2}^+ \rangle$	$\Delta(1232)$	1293	1209-1211	83	****
$2^4S_{3/2}^+ 56, {}^2 10, 2, 0, \frac{3}{2}^+ \rangle$	$\Delta(1600)$	1856	1470-1590	326	****
$1^2D_{3/2}^+ 70, {}^2 10, 2, 2, \frac{3}{2}^+ \rangle$	$\Delta(1920)$	1971	1850-1950	71	***
$1^4D_{3/2}^+ 70, {}^2 10, 2, 2, \frac{3}{2}^+ \rangle$		2002			
$1^2D_{5/2}^+ 56, {}^2 10, 2, 2, \frac{5}{2}^+ \rangle$	$\Delta(2000)$	1907	1998	91	**
$1^4D_{5/2}^+ 56, {}^2 10, 2, 2, \frac{5}{2}^+ \rangle$	$\Delta(1905)$	1950	1991-2039	65	****
$1^4D_{7/2}^+ 56, {}^2 10, 2, 2, \frac{7}{2}^+ \rangle$	$\Delta(1950)$	1836	1915-1950	97	****

表 B.3 Δ Baryons 质量谱

$n^{2S+1}L_{JP} N_6, {}^{2S+1}N_3, N, L, J^P\rangle$	Mass	Exp.	Δ	Star	
$1^4P_{1/2}^- 70, {}^4 8, 1, 1, \frac{1}{2}^- \rangle$	N(1650)	1510	1650-1680	155	****
$1^2P_{3/2}^- 70, {}^2 8, 1, 1, \frac{1}{2}^- \rangle$	N(1535)	1473	1500-1520	37	****
$1^4P_{3/2}^- 70, {}^4 8, 1, 1, \frac{3}{2}^- \rangle$	N(1700)	1654	1650-1750	46	***
$1^2P_{3/2}^- 70, {}^2 8, 1, 1, \frac{3}{2}^- \rangle$	N(1520)	1524	1505-1515	14	***
$1^4P_{5/2}^- 70, {}^4 8, 1, 1, \frac{5}{2}^- \rangle$	N(1675)	1617	1650-1660	38	****
$1^2S_{1/2}^+ 56, {}^2 8, 0, 0, \frac{1}{2}^+ \rangle$	N(938)	945	938	7	****
$2^2S_{1/2}^+ 56, {}^2 8, 2, 0, \frac{1}{2}^+ \rangle$	N(1440)	1567	1360-1380	197	****
$2^2S_{3/2}^+ 70, {}^2 8, 2, 0, \frac{1}{2}^+ \rangle$	N(1710)	1809	1650-1750	109	***
$1^4D_{1/2}^+ 70, {}^4 8, 2, 2, \frac{1}{2}^+ \rangle$	N(1880)	1894	1820-1900	34	***
$1^2P_{1/2}^+ 20, {}^2 8, 2, 1, \frac{1}{2}^+ \rangle$	N(2100)	1941	2050-2150	159	***
$2^4S_{3/2}^+ 70, {}^4 8, 2, 0, \frac{3}{2}^+ \rangle$	N(1720)	1917	1660-1710	232	****
$1^4D_{3/2}^+ 70, {}^4 8, 2, 2, \frac{3}{2}^+ \rangle$	N(1900)	1966	1900-1940	46	****
$1^2D_{3/2}^+ 70, {}^2 8, 2, 2, \frac{3}{2}^+ \rangle$		1902			
$1^2P_{3/2}^+ 20, {}^2 8, 2, 1, \frac{3}{2}^+ \rangle$	N(2040)	1948	2040	92	*
$1^2D_{5/2}^+ 56, {}^2 8, 2, 2, \frac{3}{2}^+ \rangle$		1869			
$1^2D_{5/2}^+ 56, {}^2 8, 2, 2, \frac{5}{2}^+ \rangle$	N(1680)	1814	1660-1680	144	****
$1^2D_{7/2}^+ 70, {}^2 8, 2, 2, \frac{5}{2}^+ \rangle$	N(1860)	1882	1907-1949	46	**
$1^4D_{7/2}^+ 70, {}^4 8, 2, 2, \frac{5}{2}^+ \rangle$	N(2000)	1971	1949-2090	49	**
$1^4D_{7/2}^+ 70, {}^4 8, 2, 2, \frac{7}{2}^+ \rangle$	N(1990)	1881	1900	19	**

表 B.4 N Baryons 质量谱



研究过程与结果：赝标量介子形状因子的研究



初态介子静止系 $(\vec{p}_i = 0, \vec{p}_f = \vec{q})$ $(P_f + P_i)^\mu = (M_P + E_P, 0, 0, q)$

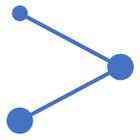
$$q^2 = \frac{Q^4 + 2Q^2(M_f^2 + M_i^2) + (M_f^2 - M_i^2)}{4M_f^2} \quad E_f = \sqrt{M^2 + \vec{q}^2}$$

耦合到正夸克时间分量 $\mu = 0$

$$f_1(Q^2) = \frac{\sqrt{ME_f}}{M_P + E_f} \sqrt{1 + \frac{m_Q}{E_{\vec{k}+\vec{q}}}} \sqrt{1 + \frac{m_Q}{E_{\vec{k}}}} \int d\vec{k} \psi^* \left(\vec{k} + \vec{q} \frac{m_{\bar{q}}}{m_Q + m_{\bar{q}}} \right) \psi(\vec{k}) \left(1 + \frac{(\vec{k} + \vec{q}) \cdot \vec{k}}{(E_{\vec{k}+\vec{q}} + m_Q)(E_{\vec{k}} + m_Q)} \right)$$

耦合到反夸克时间分量 $\mu = 0$

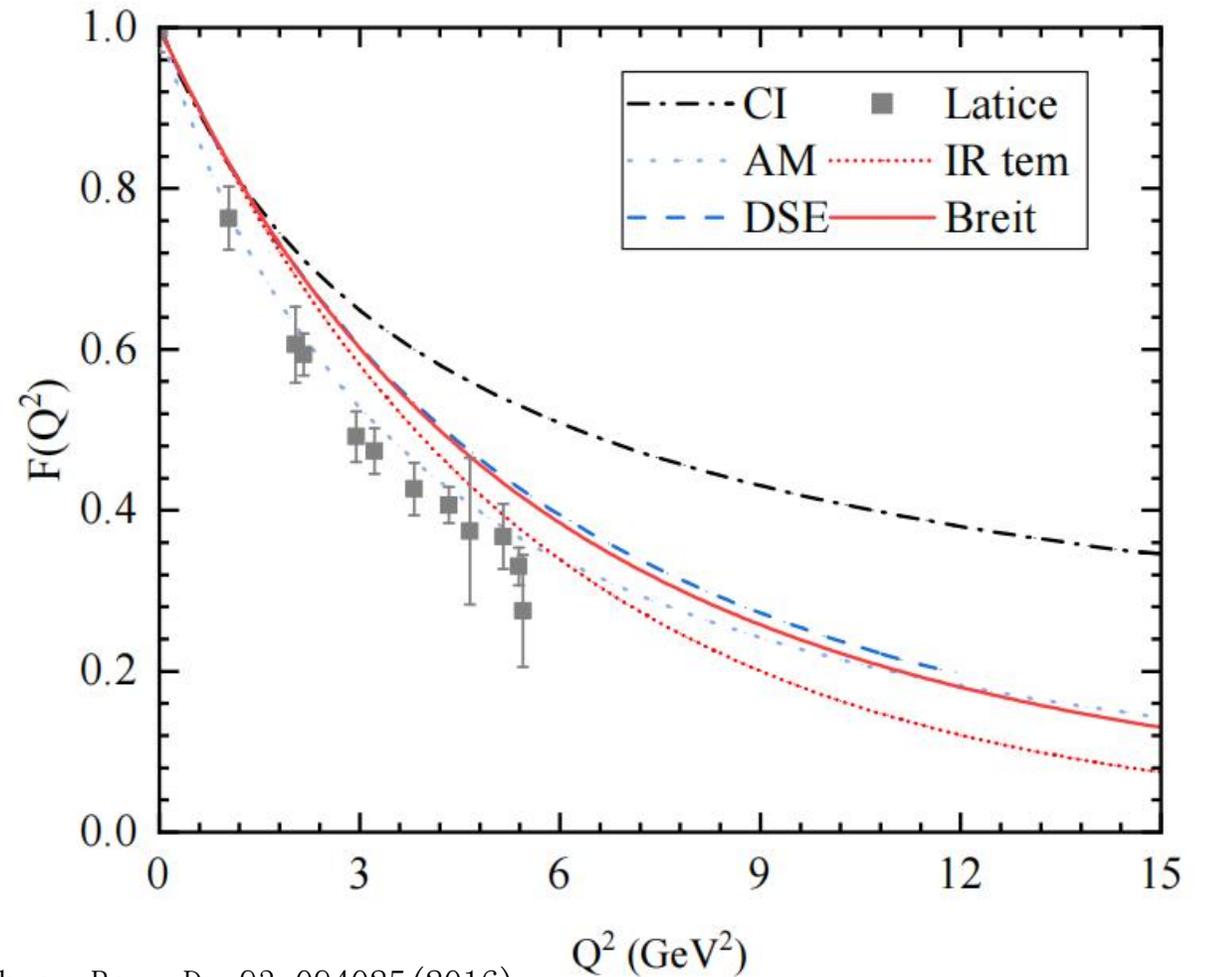
$$f_2(Q^2) = \frac{\sqrt{ME_f}}{M_P + E_f} \sqrt{1 + \frac{m_{\bar{q}}}{E_{-\vec{k}+\vec{q}}}} \sqrt{1 + \frac{m_{\bar{q}}}{E_{-\vec{k}}}} \int d\vec{k} \psi^* \left(\vec{k} - \vec{q} \frac{m_Q}{m_Q + m_{\bar{q}}} \right) \psi(\vec{k}) \left(1 + \frac{-\vec{k} \cdot (-\vec{k} + \vec{q})}{(E_{-\vec{k}} + m_{\bar{q}})(E_{-\vec{k}+\vec{q}} + m_{\bar{q}})} \right)$$



研究过程与结果：赝标量介子形状因子的研究



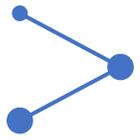
$\eta_c(1S)$ 的电磁形状因子与其它文献对比。
图中的点划“CI”线和点线“AM”是文献[6]的结果，方块误差线“Lattice”是格点QCD理论的结果[7]，图划线“DSE”是DS方程方法的结果[8]，在图中，实线“Berit”和短点线“IR tem”分别是使用夸克模型在Berit系中的结果和在初态介子静止系中时间分量的结果。



[6] M. A. Bedolla, K. Raya, J. J. Cobos-Martínez, et al. Phys. Rev. D, 93:094025(2016).

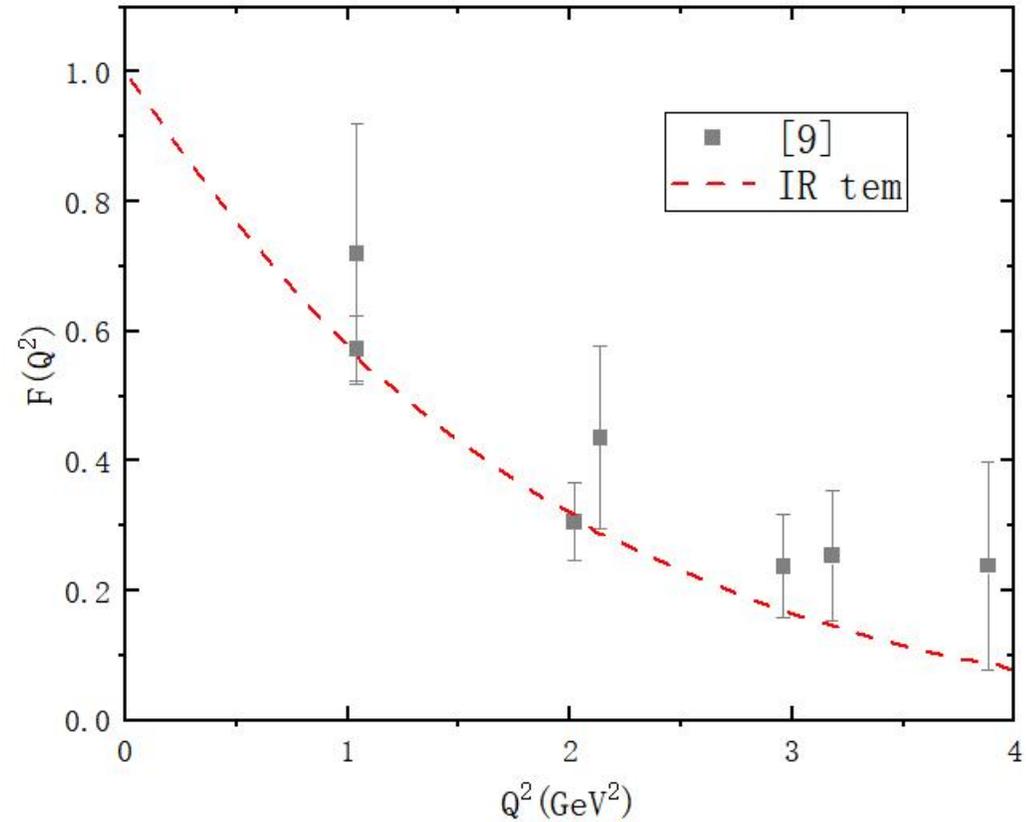
[7] J. J. Dudek, R. G. Edwards, D. G. Richards. Phys. Rev. D, 73: 074507(2006).

[8] P. Maris. Hadron Physics and the Dyson-Schwinger Equations of QCD[J]. AIP Conf. Proc(2007).

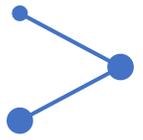


得到标量函数 $F(Q^2)$:

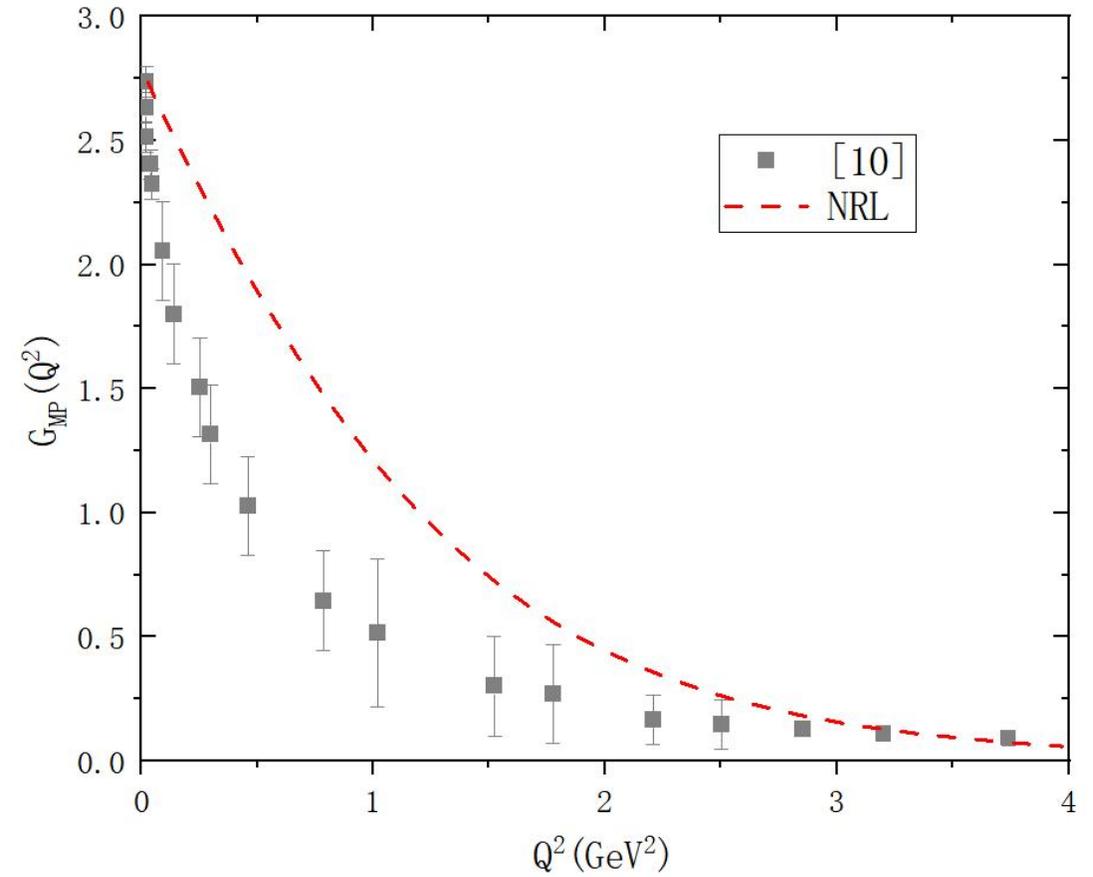
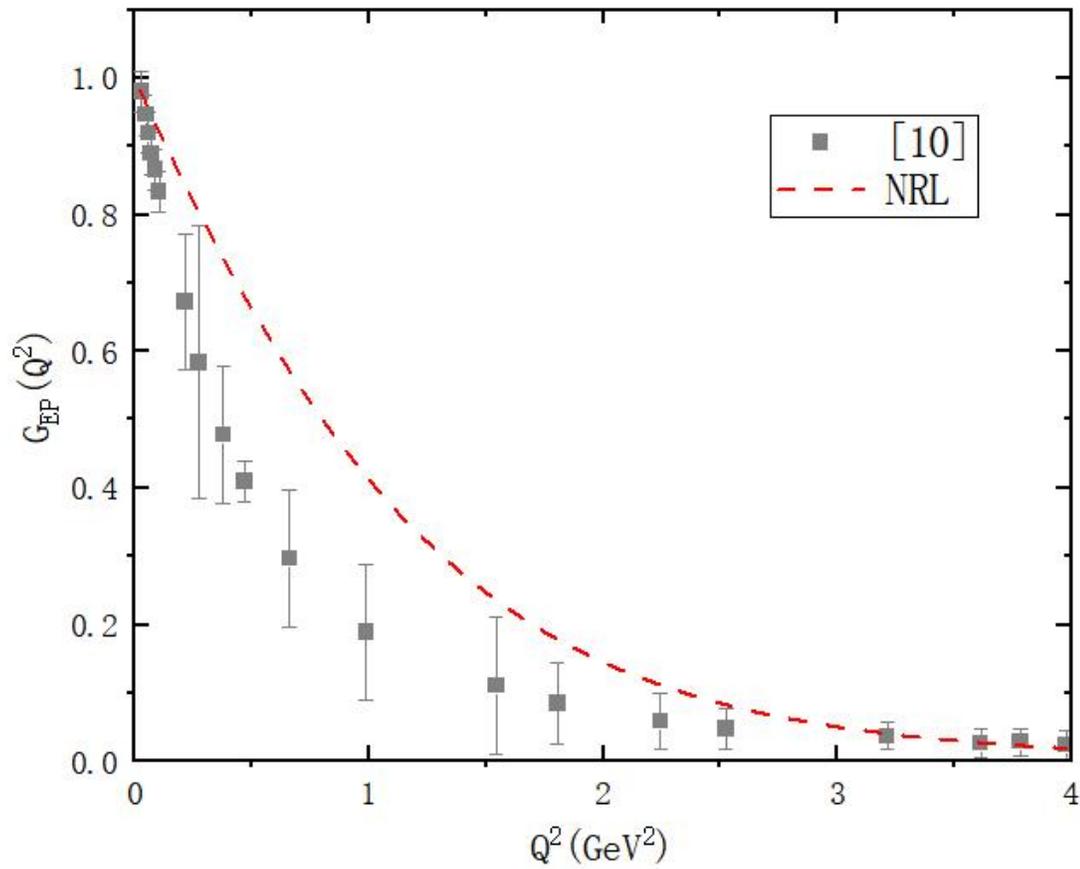
$\chi_{c0}(1P)$ 的电磁形状因子与其它文献对比。图中的点是文献 [9] 的结果，虚线“IR tem”是使用夸克模型在初态介子静止系中时间分量的结果。

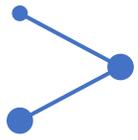


[9] Olga Lakhina and Eric S. Swanson, Phys. Rev. D 74, 014012(2006).

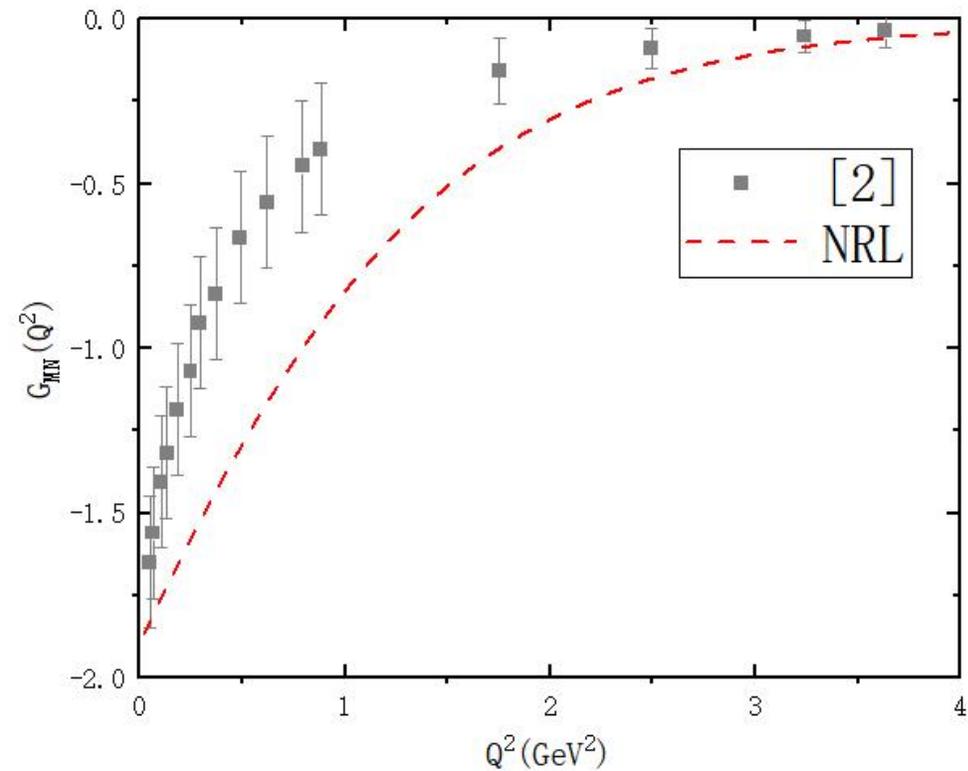
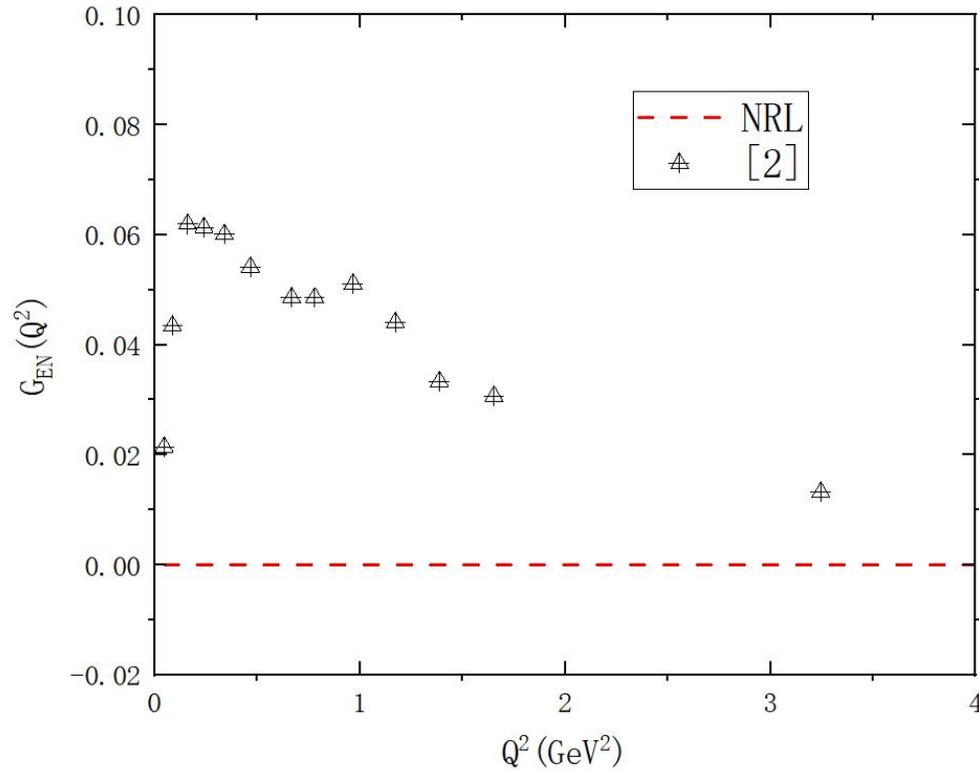


研究过程与结果：质子电磁形状因子的研究

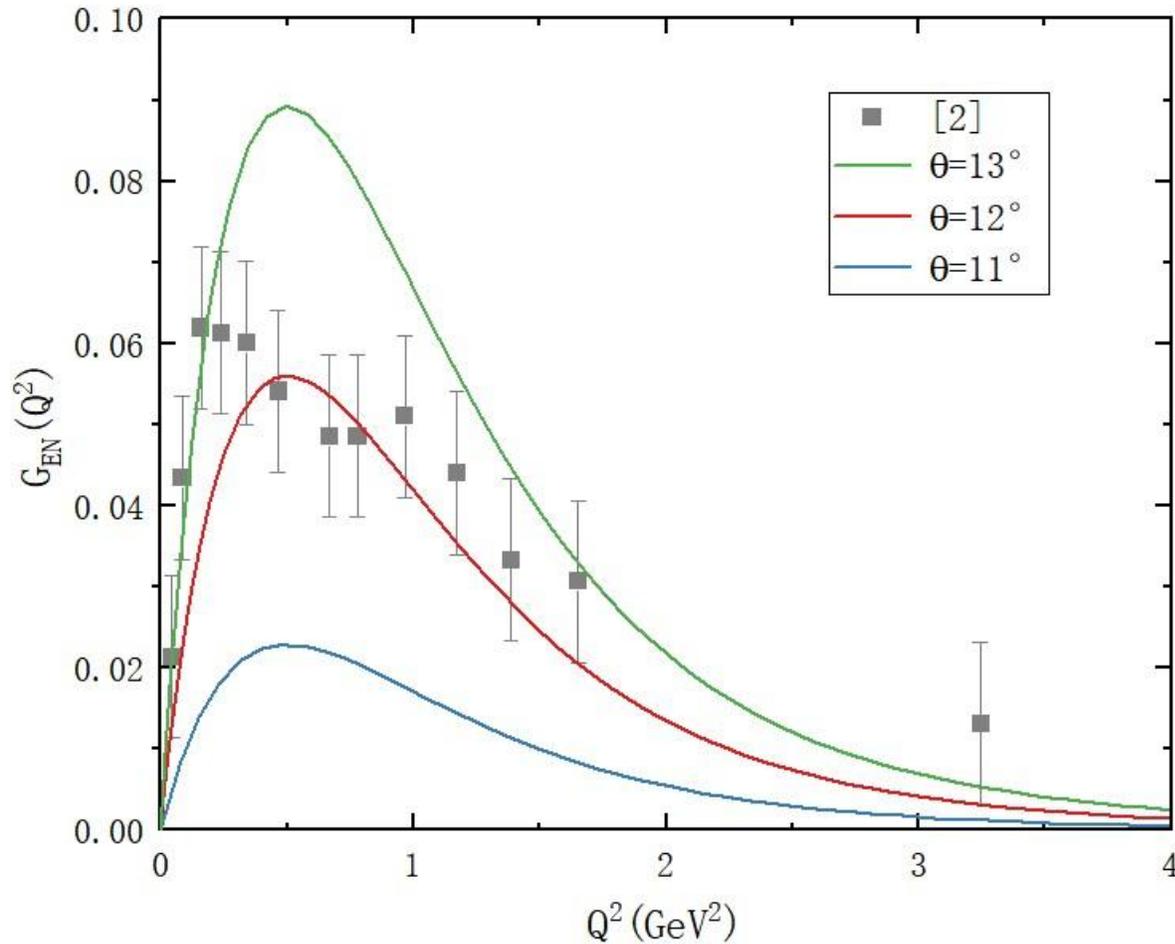
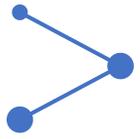




研究过程与结果：中子电磁形状因子的研究



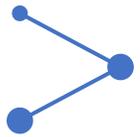
中子电形状因子为零的原因：构造的空间波函数是对称的，且夸克指标具有轮换对称性。



$$|p\rangle = \cos\theta |N^2S_S\rangle + \sin\theta |N^2S_M\rangle$$

新基态电形状因子:

$$\begin{aligned} G_E^N(Q^2) &= \left\langle p \left| \sum_i e_i e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}_i} \right| p \right\rangle \\ &= a^2 \langle \psi^{1S} | e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}_i} | \psi^{1S} \rangle + b^2 \langle \psi^{2S} | e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}_i} | \psi^{2S} \rangle \\ &\quad + ab \langle \psi^{1S} | e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}_i} | \psi^{2S} \rangle + ab \langle \psi^{2S} | e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{r}_i} | \psi^{1S} \rangle \end{aligned}$$



(1) 计算了初态介子静止系中粲夸克偶素基态和低激发态的电磁形状因子，其中粲夸克偶素电磁形状因子的结果和 DS 方程方法 [7] 的结果符合很好。

(2) 用夸克模型研究质量谱、电磁形状因子的方法还可以应用于重轻夸克以及重味重子系统。



湖南师范大学
Hunan Normal University

谢谢!
欢迎批评指正!

第五届粒子物理天问论坛
2023年11月12日