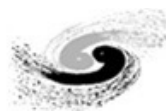




中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY



中国科学院高能物理研究所
Institute of High Energy Physics Chinese Academy of Sciences



深圳综合粒子设施研究院
Institute of Advanced Science Facilities, Shenzhen

粒子加速器原理

~数学物理基本知识回顾~

刘星光
liuxg@ihep.ac.cn

中国科学院高能物理研究所 东莞研究部
2023



目录

01

线性代数

02

偏微分方程

03

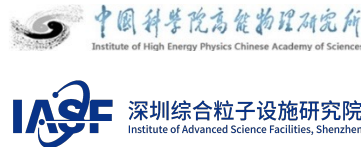
带电粒子与电磁场

04

作业



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY



01

线性代数基本概念回顾

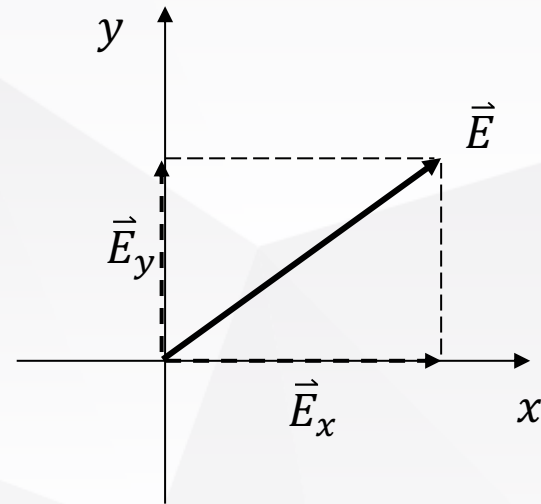
标量与矢量 Scalars and Vectors

只具有大小的量成为**标量**，如质量、温度和时间等，

一般记为 m, T 和 t 。

同时具有大小和方向的量称为**矢量**，如物体的速度、作用在物体上的力和电场磁场等，

一般记为 a, F 和 E, M 等，一般用粗体表示，但为了区分（尤其是手写），常用带箭头的量表示，上述可记为 $\vec{a}, \vec{F}$ 和 $\vec{E}, \vec{B}$ 。

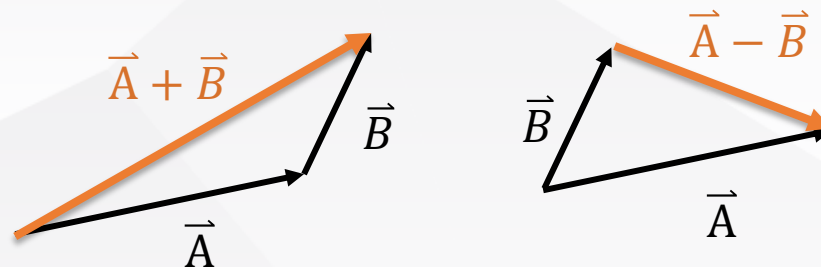


矢量的计算

矢量的加法：等于各自坐标的相加。

交换律： $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

结合律： $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$



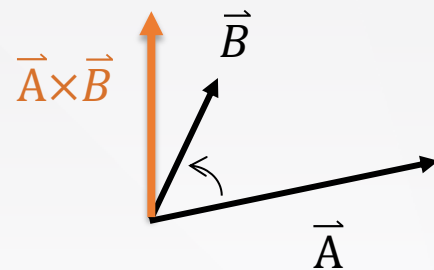
矢量的乘法：

点乘（dot product）或内积(inner product): 结果为标量，

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta = A_x B_x + A_y B_y + \dots$$

向量乘积（vector product）：结果为矢量，方向与二者构成的平面垂直且满足右手定则，

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$



➤ 向量乘积的坐标计算

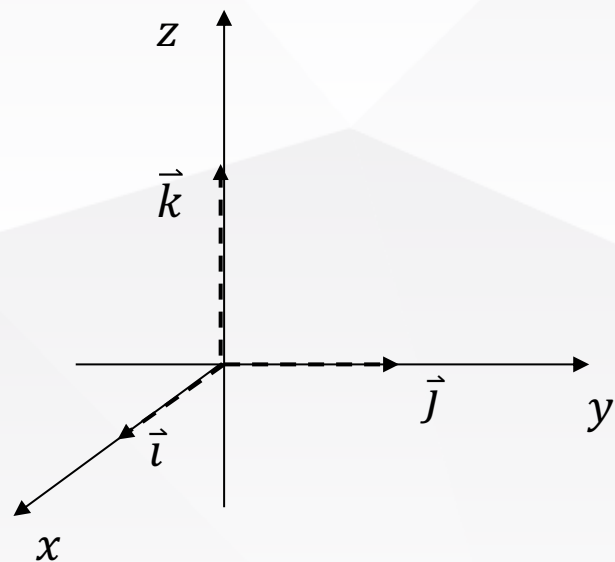
$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

注：为便于书写，三个坐标向量我们简单记为 i, j, k



如何用坐标法计算向量乘积。

$\vec{A} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{B} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, 计算 $\vec{A} \times \vec{B}$



➤ 线性方程式与矩阵 Linear equations and matrices

如何解如下线性方程组？

$$\begin{aligned}x - z &= 5 \\ -2x + 3y &= 1 \\ x - 3y + 2z &= -10\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad k = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad Mr = k$$

如果 $a b = c$, 那么 $b = \frac{c}{a} = c a^{-1}$. 上面这个问题里, 我们有 $r = M^{-1}k$ 吗?

➤ 逆矩阵与矩阵的特征值

如果 $AB = BA = I$, I 为单位矩阵, 则记 $B = A^{-1}$, 为 A 的逆矩阵, 且,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中 $C_{ij} = m_{ij}$ 对应余矩阵的值乘以 $(-1)^{i+j}$.



计算上页 M 的逆矩阵 M^{-1} 并给出 r 的值。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

坐标变换

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

记 $\vec{R} = \lambda \vec{r}$, 则有

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -2 \\ -2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

称为矩阵M的特征方程。上式可解得其特征向量 (λ_1, λ_2) .
则矩阵M可以找到一个C使得:

$$C^{-1}MC = D$$

D为仅包含特征值的对角矩阵, 该过程称为对角化。



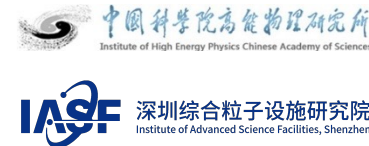
求 λ



求C。用途。



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY



中国科学院高能物理研究所
Institute of High Energy Physics Chinese Academy of Sciences
IASF 深圳综合粒子设施研究院
Institute of Advanced Science Facilities, Shenzhen

02

偏微分方程简要回顾

►► 梯度、散度和旋度 Gradient, Divergence & Curl

梯度

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

散度

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

旋度

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$\nabla^2 \phi = 0$ 拉普拉斯公式

$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ 波动方程

$\nabla^2 \phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \phi}{\partial t}$ 扩散方程, 热传导和薛定谔方程

$$\nabla^2 \phi = \nabla \cdot \nabla \phi = \text{div grad } \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$



高斯积分原理

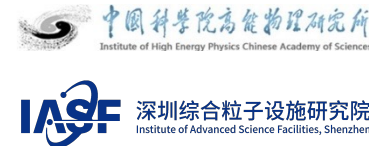
$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

斯托克斯原理

$$\oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{n} dS$$



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY



中国科学院高能物理研究所
Institute of High Energy Physics Chinese Academy of Sciences
IASF 深圳综合粒子设施研究院
Institute of Advanced Science Facilities, Shenzhen

03

带电粒子与电磁场

麦克斯韦方程组 Maxwell' s Equations

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

库仑定律

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

法拉第电磁感应定律

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \vec{B} \right) = \mu_0 j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon \vec{E}$$

安培定则

在国际单位制中 , $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \frac{C}{V m} = 8.8541878 \times 10^{-12} \frac{C}{V m}$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{V s}{A m} = 1.2566371 \times 10^{-6} \frac{V s}{A m}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$$

➤ 麦克斯韦方程组的积分形式（作业）



电磁场以及运动方程

由于 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ ，定义一个向量 $\vec{A}$ 使得，
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

则法拉第定律：

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) \quad \text{即} \quad \nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}) = 0$$

可解为 $\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}$ ，可理解为磁场变化产生的电场。

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - \nabla \phi$$

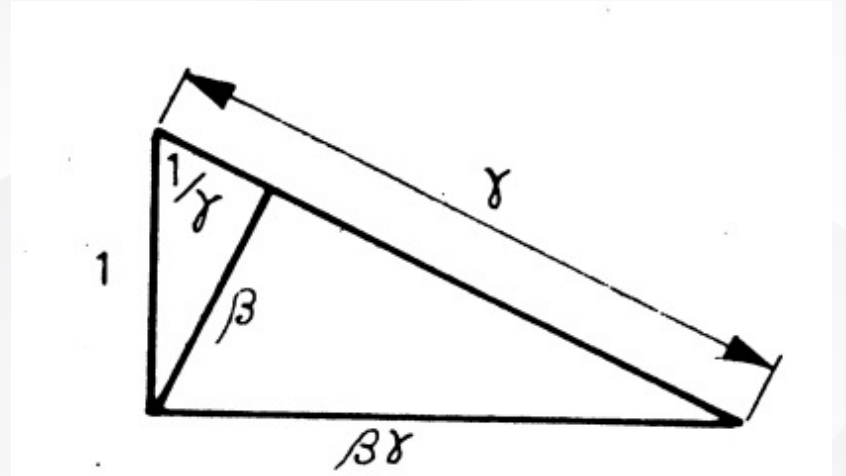
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

➤ 狭义相对论中的简单公式

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

能量 $E = \gamma mc^2 = p^2 c^2 + (mc^2)^2$





中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY

中国科学院高能物理研究所
Institute of High Energy Physics Chinese Academy of Sciences

IAEF 深圳综合粒子设施研究院
Institute of Advanced Science Facilities, Shenzhen

04

作业

>> 作业：

Q1: 由麦克斯韦微分形式推导其积分形式

Q2: 完成下述表格

	β	cp	T (动能)	E (总能量)	γ
β	β				
cp		cp			
T (动能)			T		
E (总能量)				E	
γ	$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$				γ

Q3: 以 β, γ 及其微分表示 $d(\beta\gamma)$