



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY



中国科学院高能物理研究所
Institute of High Energy Physics Chinese Academy of Sciences



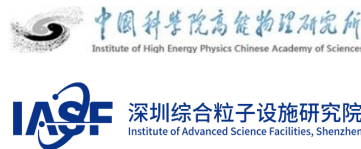
深圳综合粒子设施研究院
Institute of Advanced Science Facilities, Shenzhen

粒子加速器原理

刘星光、苑尧硕、邵佳航



中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY



02

橫向束流动力学

苑尧硕

回顾：横向运动

➤ 哈密顿量在自然坐标系下的表示

- 以 (x, y, s) 作为坐标，通过正则变化，哈密顿量变为

旧：直角坐标系 $(\vec{r}, \vec{P})$

$$H_2 = e\Phi + c \left\{ m^2 c^2 + \frac{(p_s - e\vec{A}_s)^2}{(1 + x/\rho)^2} + (p_x - eA_x)^2 + (p_y - eA_y)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

新：自然坐标系
 $(x, p_x; y, p_y; s, p_s)$

- 变化为以 s 为自变量

$$H_3 = -\left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \left[\frac{(H - e\Phi)^2}{c^2} - m^2 c^2 - (p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - eA_s$$

新：自然坐标系

$$H_3 \approx -p \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) + \frac{1 + x/\rho}{2p} \left[(p_x - eA_x)^2 - (p_y - eA_y)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - eA_s$$

$(x, p_x; y, p_y; t, -H_2)$

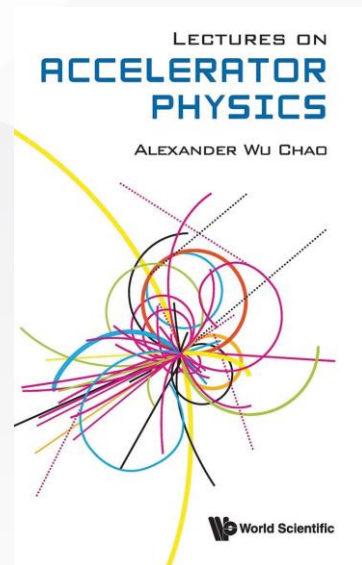
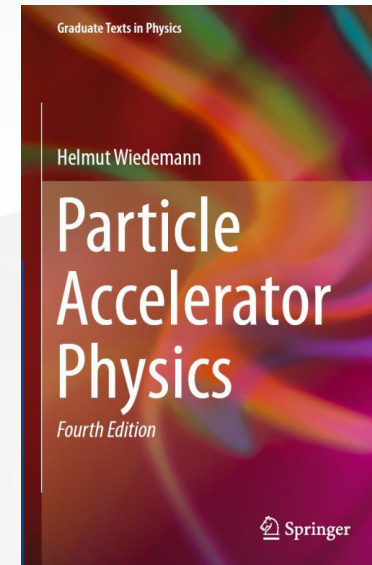
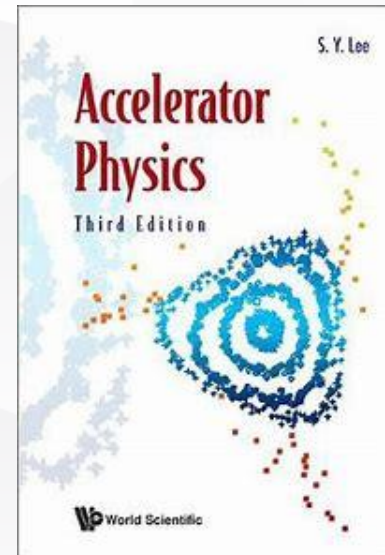
➤ 本节内容

➤ Betatron运动方程

➤ Hill方程

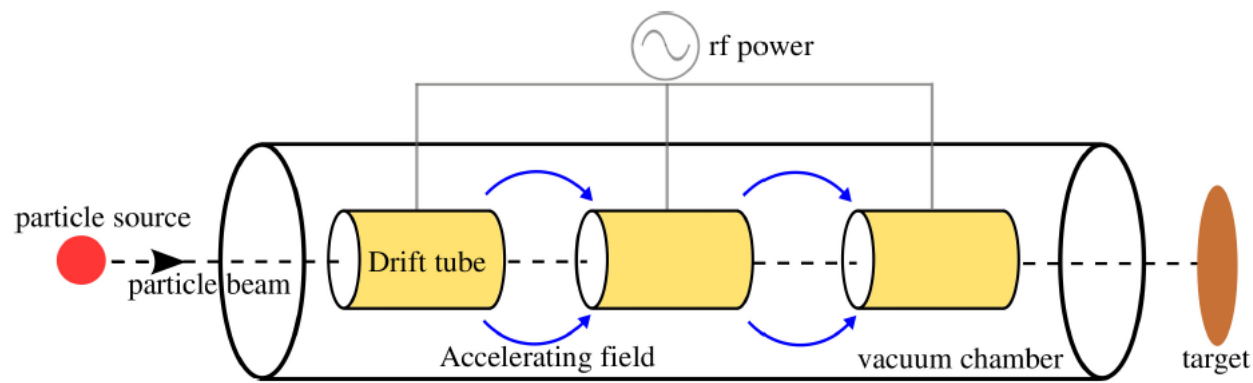
➤ 传输矩阵

- 束流动力学讲义下周发给大家
- 推荐参考书

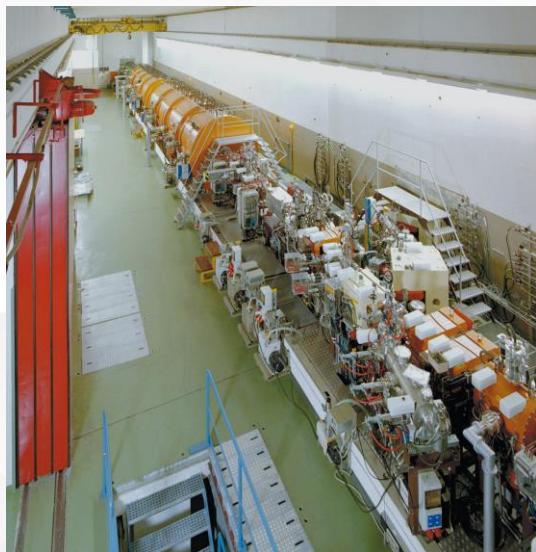


直线加速器和环形加速器

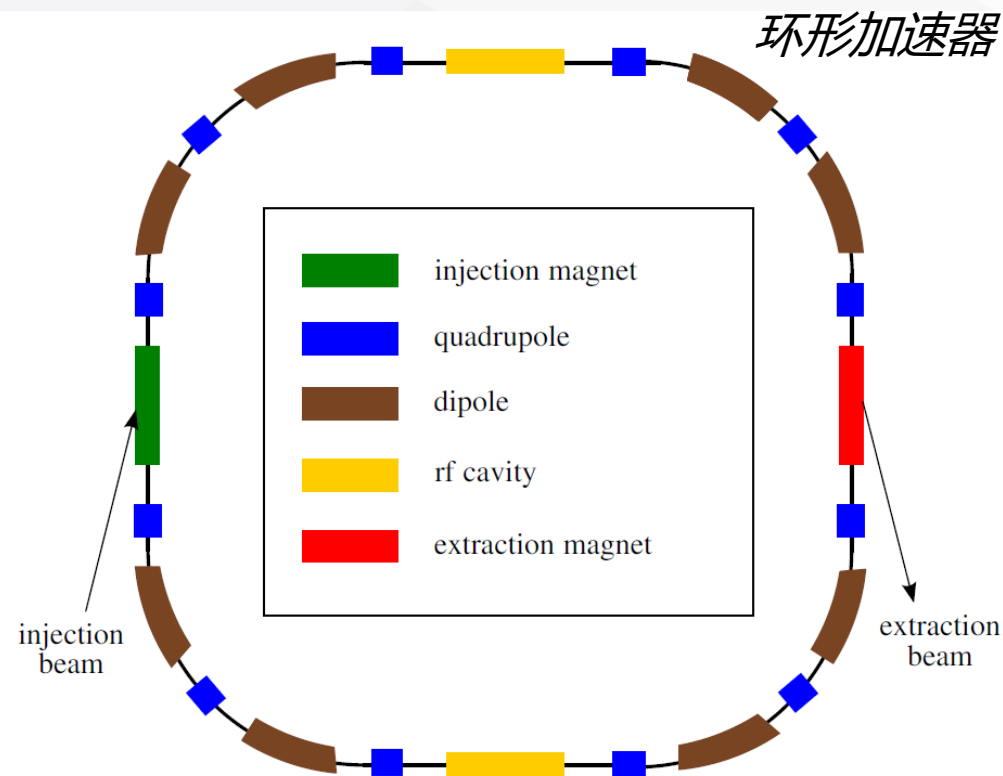
➤ 环形加速器中磁铁的主要类型



DTL(Drift-tube linac)型直线加速器



德国重离子研究中心 (GSI) 的 unilac 直线加速器



中国散裂中子源快循环同步环

➤ 环形加速器磁铁的主要类型

- 二极磁铁（偏转磁铁）：提供偏转力
 - 四极磁铁：提供横向聚焦力
 - 六极磁铁、八级磁铁：用于控制束流的稳定性
- 线性元件
- 非线性元件



二极磁铁

六极磁铁

四极磁铁

➤ Betatron 运动方程

➤定义：变聚焦加速结构中的横向运动方程

➤电势 $\phi = 0$; 磁场 $B_s = 0$

➤外界电磁场可表示为 $\vec{B} = B_x(x, y)\vec{e}_x + B_y(x, y)\vec{e}_y$

➤通过哈密顿量 H_3 , 可得Betatron运动方程为

➤磁刚度

描述环形加速器的物理量

$$B\rho = \frac{p_0}{e}$$

其中 p_0 为理想粒子动量

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho + x}{\rho^2} = \pm \frac{B_y}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \mp \frac{B_x}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

➤ 环形加速器中的磁场

► 由麦克斯韦方程

$$\nabla \times \vec{B} = 0 \quad \text{并且} \quad B_s = 0$$

$$\text{可得} \quad \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0$$

- 结论：在x和y两个方向上同时提供回复力是不可能的。

➤当粒子与设计轨道间有一个小的位移 (x,y) , 受到的磁场为

$$\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y = \left(B_x(0,0) + \frac{\partial B_x}{\partial y} y + \frac{\partial B_x}{\partial x} x \right) \vec{e}_x + \left(B_y(0,0) + \frac{\partial B_y}{\partial x} x + \frac{\partial B_y}{\partial y} y \right) \vec{e}_y$$

➤ 二极磁铁和四极磁铁

- 二极磁铁中磁场及粒子受力

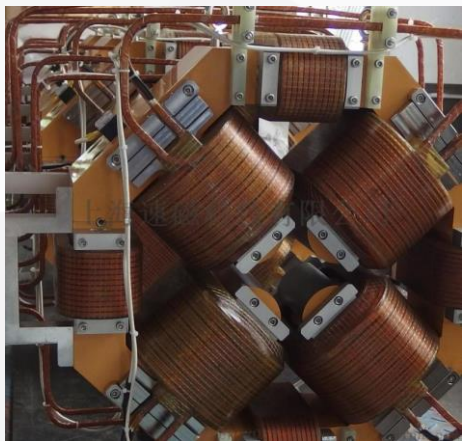
$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$B_x = B_s = 0; B_y = B_0$$

- 二极磁铁的磁场为常数 B_0



➤ 二极磁铁和四极磁铁

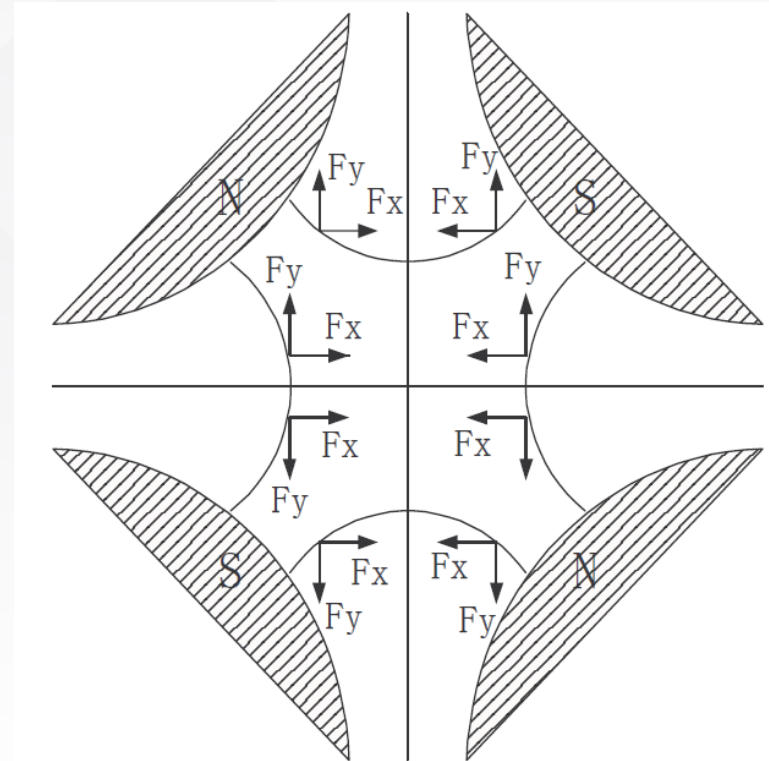
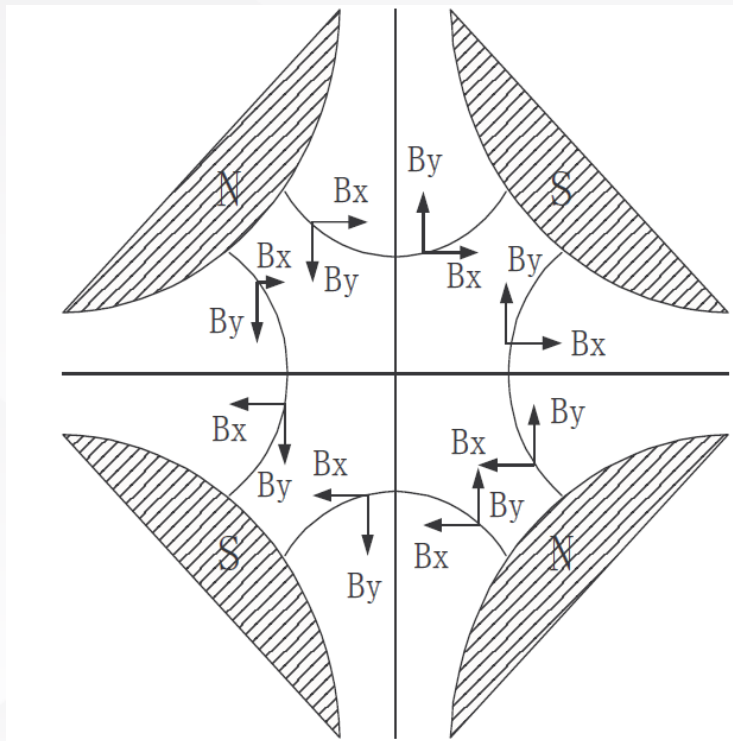


➤ 四极磁铁中磁场及粒子受力

- 处于磁铁中心：不受力
- 处于位置 (x, y) ：受力情况为

$$B_x = B_1 y \quad B_y = B_1 x$$

➤ 四极磁铁磁场梯度为常数 B_1



带负电荷的粒子垂直于纸面向里运动。**x方向：聚焦；y方向：散焦**

➤ Hill equation (希尔方程)

- 在只有二极磁铁和四极磁铁的情况下，Betatron方程可以简化为Hill方程
- 简化条件：1.只有二极磁铁和四极磁铁，2. 动量 $p=p_0$ (无能散)

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho+x}{\rho^2} = \pm \frac{B_y}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \mp \frac{B_x}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

- (水平) 二极磁铁情形 $B_y=B_0$ $B_x=0$

$$\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{x}{\rho^2} = 0$$

- 其中 $\frac{1}{\rho}$ 量纲为 m^{-2} ，表现为水平方向上的弱聚焦力

➤ Hill equation (希尔方程)

➤ 四极磁铁情形 $B_y = B_1 x$ $B_x = B_1 y$ $\rho = \infty$

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{\rho + x}{\rho^2} = \pm \frac{B_y}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$



$$\frac{d^2 x}{ds^2} \mp \frac{B_1 x}{B\rho} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \mp \frac{B_x}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$



$$\frac{d^2 y}{ds^2} \pm \frac{B_1 y}{B\rho} = 0$$

$$x'' + K_x(s)x = 0 \quad K_x = \mp \frac{B_1}{B\rho}$$

$$y'' + K_y(s)y = 0 \quad K_y = \pm \frac{B_1}{B\rho}$$

➤ 可以看出，水平和垂直两个方向上的聚焦系数 $K_x = -K_y$

一个方向为聚焦力，另外一个方向必为散焦力

➤ Hill equation (希尔方程)

- 粒子在二极磁铁和四极磁铁的运动可总结为

水平方向

$$x'' + K_x(s)x = 0$$

其中

$$K_x(s) = \frac{1}{\rho^2} + K_1(s)$$

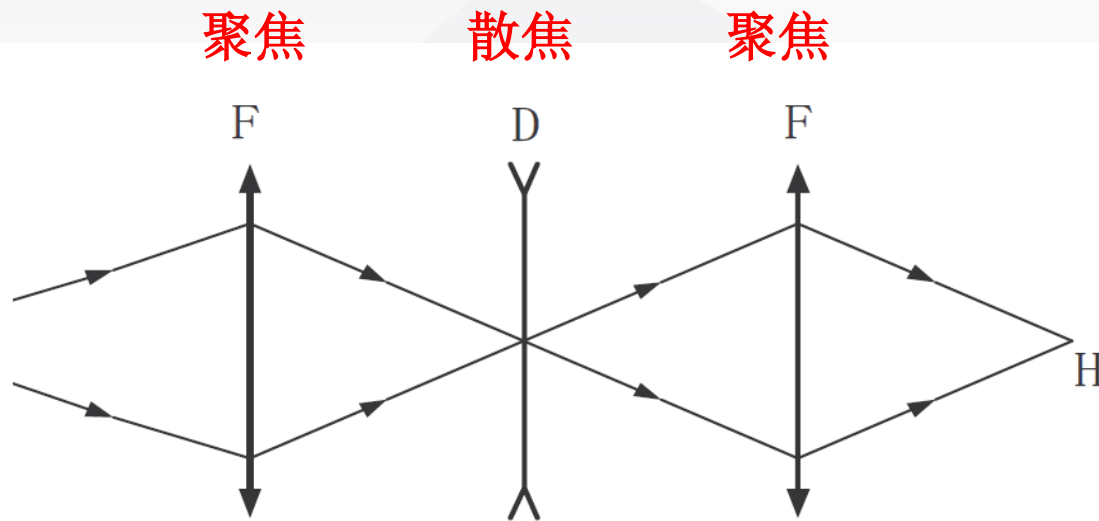
$$K_1(s) = \mp \frac{B_1(s)}{B\rho}$$

垂直方向

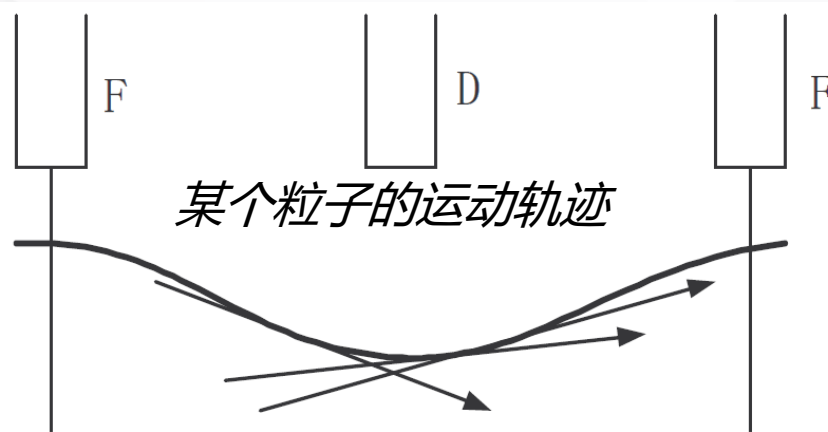
$$y'' + K_y(s)y = 0$$

$$K_y(s) = -K_1(s)$$

- 利用交变梯度排列四极铁来进行聚焦的加速器叫**强聚焦加速器**，是现代高能加速器的基础。
- 强聚焦原理将导致束团尺寸与磁铁强度及间距相关，而**不依赖于加速器的大小**。



加速器中常见的四极磁铁排列--FODO结构



某个粒子的运动轨迹