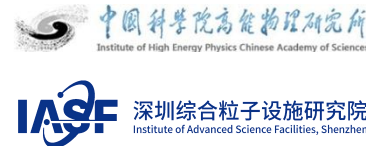




中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY



横向束流动力学

苑尧硕

➤ Betatron方程（横向振荡方程）电场为零 & 横向磁场

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{\rho + x}{\rho^2} = \pm \frac{B_y}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \mp \frac{B_x}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

➤ 希尔方程 无能散，线性元件（二极或四极磁铁）

水平方向

$$x'' + K_x(s)x = 0$$

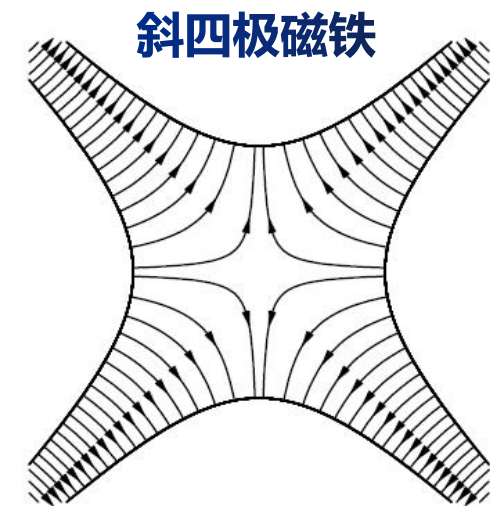
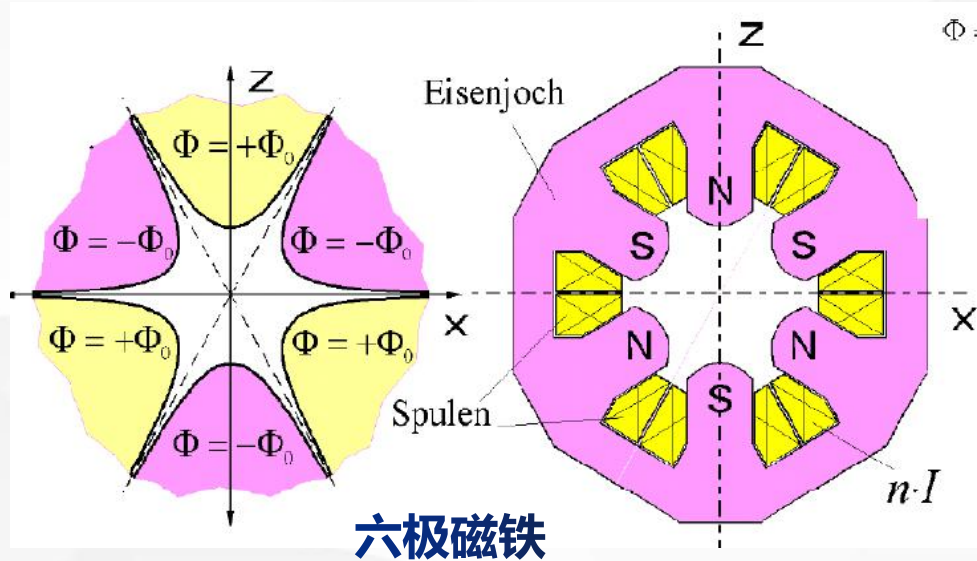
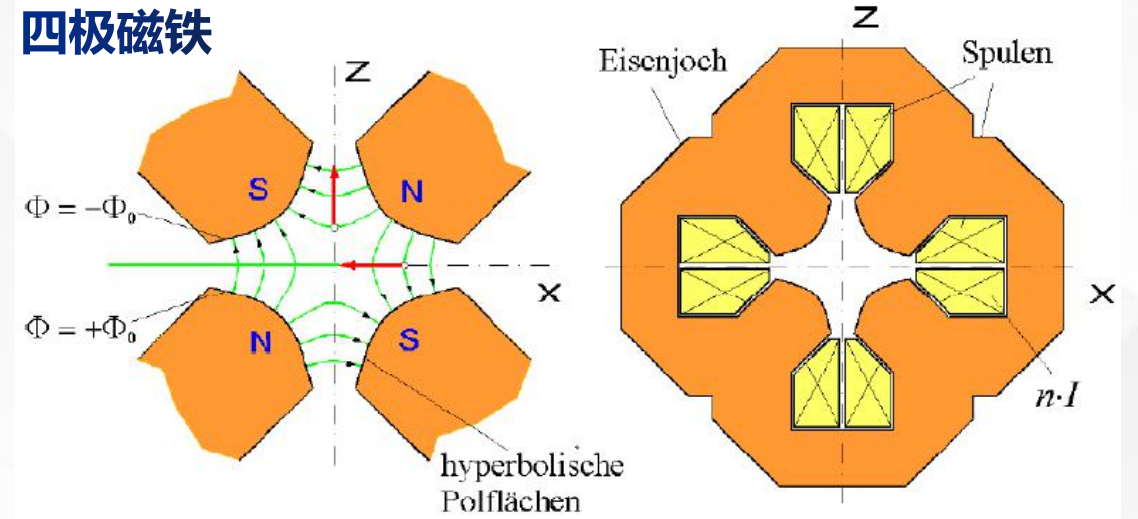
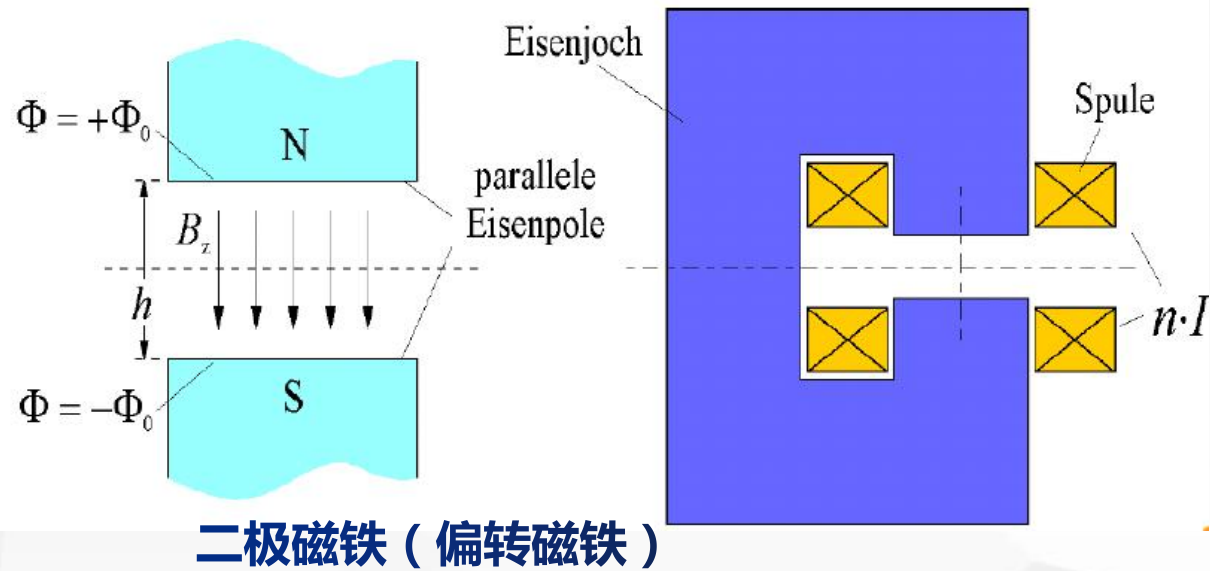
其中 $K_x(s) = \frac{1}{\rho^2} + K_1(s)$

$$K_1(s) = \mp \frac{B_1(s)}{B\rho}$$

垂直方向

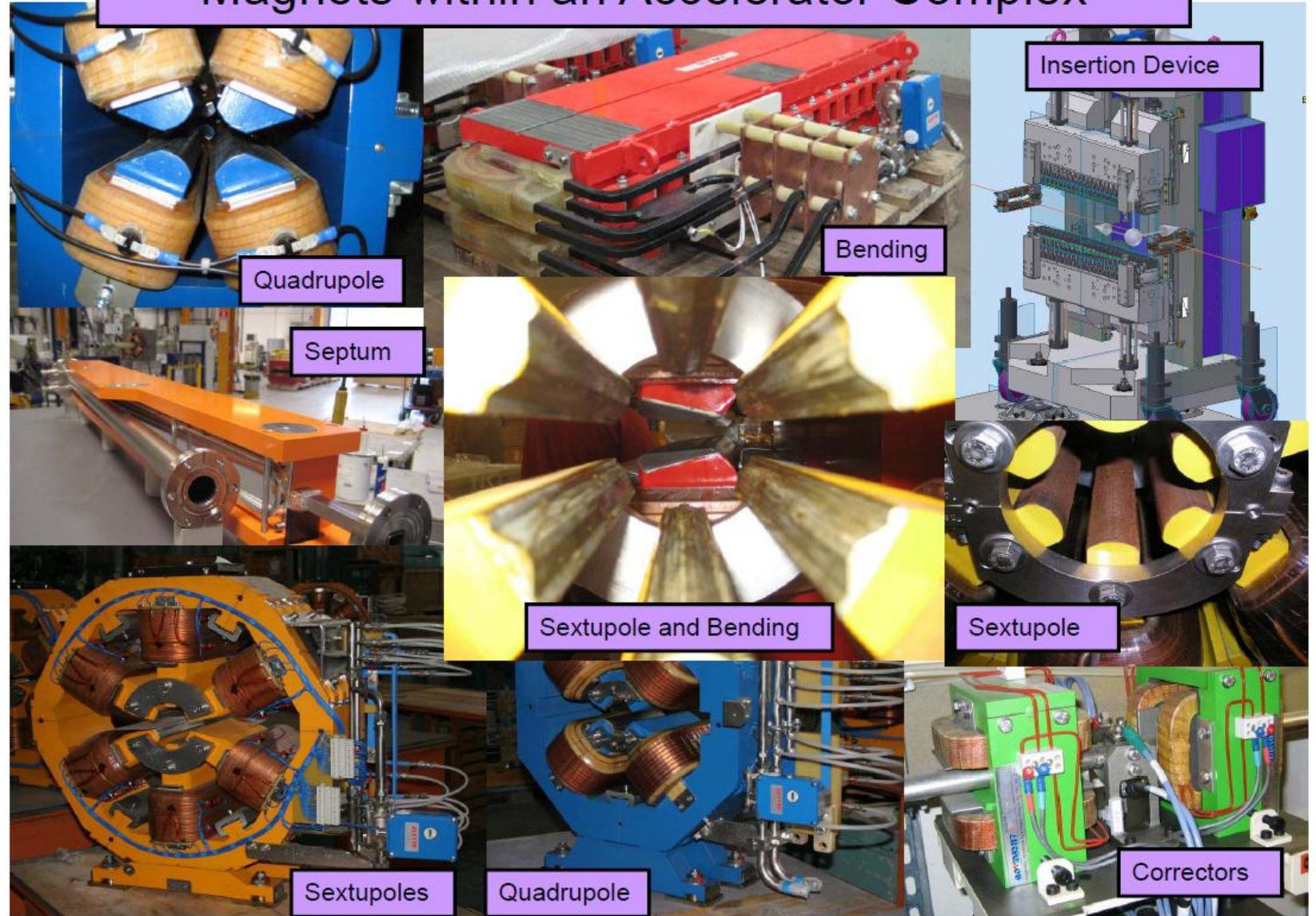
$$y'' + K_y(s)y = 0$$

$$K_y(s) = -K_1(s)$$



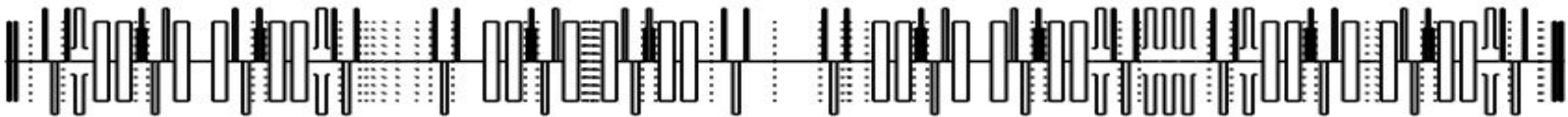
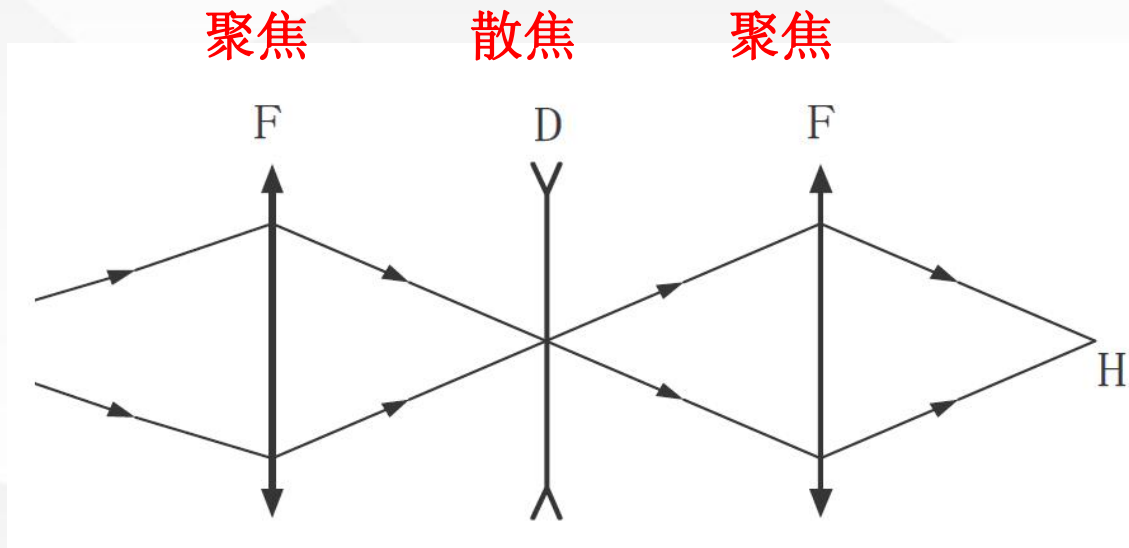
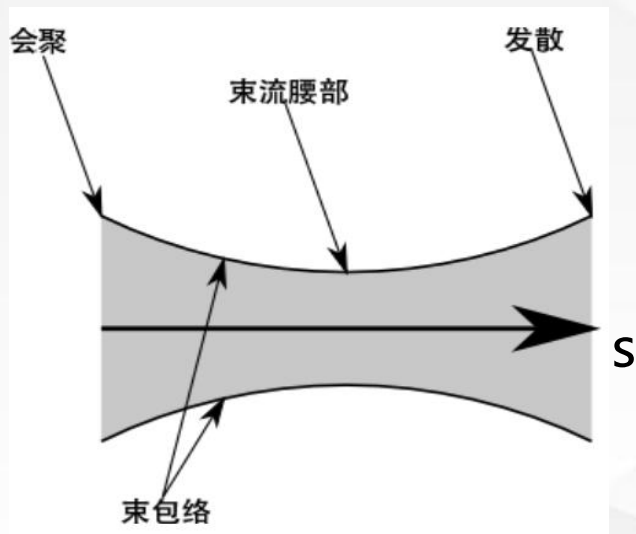
- 组成加速器的不同类型的电磁铁元件

Magnets within an Accelerator Complex



上节回顾

- 利用交变梯度排列四极磁铁来进行聚焦的加速器叫**强聚焦加速器**，是现代高能加速器的基础。



磁铁元件在加速器中的排列--lattice

本节内容

- 传输矩阵
- 传输矩阵的计算和性质（例题）
- 粒子运动在相空间中的表示

- 希尔方程中的聚焦系数 $K_{x,y}(s)$ 为分段函数，满足周期性条件

$$z'' + K_z(s)z = 0 \quad K_z(s + L) = K_z(s)$$

- 通解 $z(s) = a_1 \sin(\sqrt{K_z} s) + a_2 \cos(\sqrt{K_z} s)$

或者 $z(s) = a \cos(\sqrt{K_z} s + b) \quad (K_z > 0 \text{情形})$

- a_1 和 a_2 由初值 ($z=z_0, \quad z' = z_0'$) 决定。



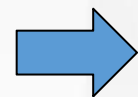
加速器中磁铁为周期性排列

- 复习：一阶线性齐次常系数微分方程组表示为矩阵形式

$$\frac{dx_1}{ds} = a_{11}x_1(s) + a_{12}x_2(s) + a_{13}x_3(s)$$

$$\frac{dx_2}{ds} = a_{21}x_1(s) + a_{22}x_2(s) + a_{23}x_3(s)$$

$$\frac{dx_3}{ds} = a_{31}x_1(s) + a_{32}x_2(s) + a_{33}x_3(s)$$



矩阵形式

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = A\vec{x}(s)$$

- 解为 $\vec{x}(s) = e^{A(s-s_0)}\vec{x}(s_0)$

- n 阶常微分方程可以化为 n 个一阶常微分方程组成的方程组

$$\vec{z}(s) = \begin{pmatrix} z(s) \\ z'(s) \end{pmatrix}$$

$$\vec{z}(s) = M(s | s_0) \vec{z}(s_0)$$

从 s_0 到 s 的传输矩阵(注意顺序)

注意： z, z' 不是一对正则共轭坐标量

- 传输矩阵由初值 $\vec{z}(s_0)$ 确定

➤ 传输矩阵的计算

➤ 希尔方程

$$z'' + K_z(s)z = 0$$

$$\text{通解为} \quad \left\{ \begin{array}{ll} z(s) = a_1 \sin(\sqrt{K_z} s) + a_2 \cos(\sqrt{K_z} s) & K_z > 0 \\ z(s) = a_1 s + a_2 & K_z = 0 \\ z(s) = a_1 \sinh(\sqrt{-K_z} s) + a_2 \cosh(\sqrt{-K_z} s) & K_z < 0 \end{array} \right.$$

在 $s=s_0$ 处的初值为 $z(s_0), z'(s_0)$

传输矩阵的计算

➤ $K_z > 0$ 情形的传输矩阵

$$z'' + K_z(s)z = 0 \qquad z(s) = a_1 \sin(\sqrt{K_z} s) + a_2 \cos(\sqrt{K_z} s)$$

$$z(s_0) = a_1 \sin(\sqrt{K_z} s_0) + a_2 \cos(\sqrt{K_z} s_0)$$

$$z'(s_0) = a_1 \sqrt{K_z} \cos(\sqrt{K_z} s_0) - a_2 \sqrt{K_z} \sin(\sqrt{K_z} s_0)$$

➤ 传输矩阵的计算

$$z(s) = z(s_0) \cos[\sqrt{K_z}(s - s_0)] + z'(s_0) \frac{1}{\sqrt{K_z}} \sin[\sqrt{K_z}(s - s_0)]$$

$$z'(s) = -z(s_0) \sqrt{K_z} \sin[\sqrt{K_z}(s - s_0)] + z'(s_0) \cos[\sqrt{K_z}(s - s_0)]$$

通过对比,可以确定矩阵各个元素

$$\vec{z}(s) = M(s | s_0) \vec{z}(s_0) \quad z(s) = m_{11}z(s_0) + m_{12}z'(s_0)$$

$$z'(s) = m_{21}z(s_0) + m_{22}z'(s_0)$$

➤ 传输矩阵为

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_z}(s - s_0) & \frac{1}{\sqrt{K_z}} \sin \sqrt{K_z}(s - s_0) \\ -\sqrt{K_z} \sin \sqrt{K_z}(s - s_0) & \cos \sqrt{K_z}(s - s_0) \end{pmatrix}$$

➤ 传输矩阵的计算

- 散焦四极磁铁 $K_z < 0$ 情形 (课后作业)

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{-K_z} (s - s_0) & \frac{1}{\sqrt{-K_z}} \sinh \sqrt{-K_z} (s - s_0) \\ \sqrt{-K_z} \sinh \sqrt{-K_z} (s - s_0) & \cosh \sqrt{-K_z} (s - s_0) \end{pmatrix}$$

- 漂移节 $K_z = 0$ 情形

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} 1 & s - s_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 提示

$$\sinh(A - B) = \sinh A \cosh B - \cosh A \sinh B$$

$$\cosh(A - B) = \cosh A \cosh B + \sinh A \sinh B$$

➤ 二极磁铁的传输矩阵

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_z} (s - s_0) & \frac{1}{\sqrt{K_z}} \sin \sqrt{K_z} (s - s_0) \\ -\sqrt{K_z} \sin \sqrt{K_z} (s - s_0) & \cos \sqrt{K_z} (s - s_0) \end{pmatrix}$$

• 提示 $K_x = \frac{1}{\rho^2} \quad \theta = \frac{s - s_0}{\rho}$

- 二极磁铁的传输矩阵的具体形式

$$M(s | s_0) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \rho \sin \theta \\ -\frac{1}{\rho} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

传输矩阵的计算

- 传输矩阵是加速器lattice（或者元件）的属性，而不是粒子束流的属性。
- 利用传输矩阵，可以计算出粒子通过该元件后粒子**运动状态（位置和角度）**的改变。

➤ 传输矩阵的计算

➤ 例1：已知漂移节的传输矩阵 $M_{drift} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $l = s - s_0$ ，和粒子的初始坐标 x_0, x_0'

求经过漂移节后粒子**位置**和**角度**的改变

➤ 传输矩阵的计算

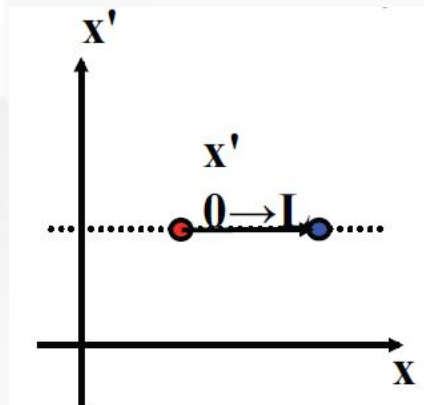
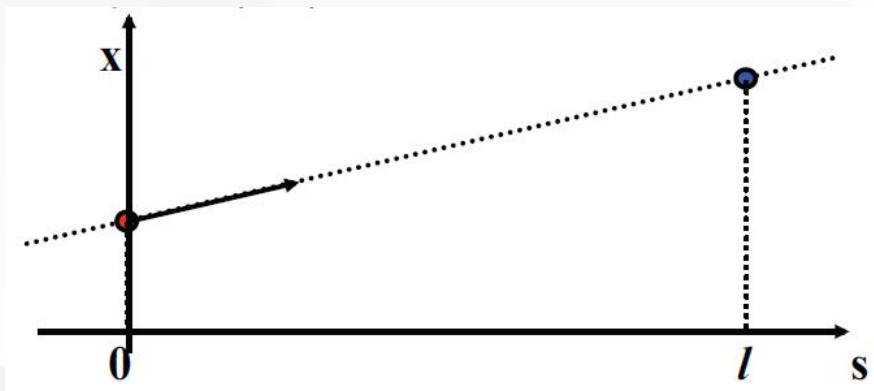
➤ 例1：已知漂移节的传输矩阵 $M_{drift} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $l = s - s_0$ ，和粒子的初始坐标 $x = x_0$, $x' = x'_0$

求经过漂移节后粒子**位置**和**角度**的改变

解：通过 $\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$ 可得

$$x = x_0 + lx'_0$$

$$x' = x'_0$$



粒子经过漂移节后，只有横向位置发生改变

➤ 传输矩阵的计算

➤ 例2：已知聚焦四极磁铁的传输矩阵和粒子的初始坐标 $x=x_0$, $x' = x_0'$

$$M_x = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0} l \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0} l & \cos \sqrt{K_0} l \end{pmatrix}$$

求经过该四极磁铁后粒子**位置**和**角度**的改变

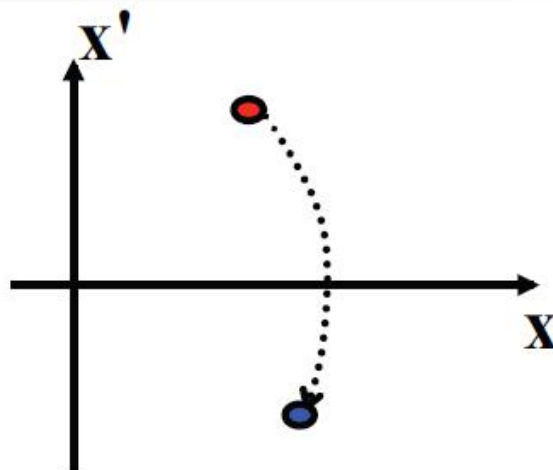
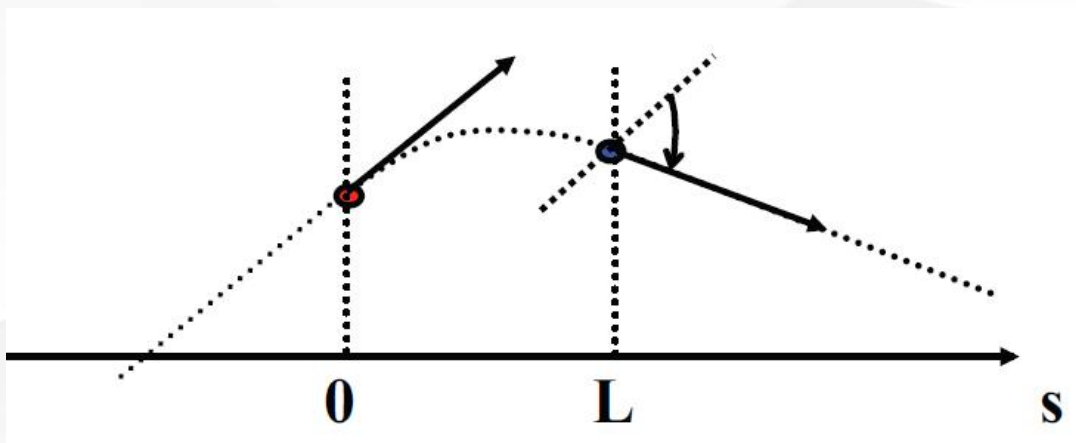
➤ 传输矩阵的计算

➤ 例2：已知聚焦四极磁铁的传输矩阵和粒子的初始坐标 $x=x_0$, $x' = x'_0$

求经过该四极磁铁后粒子**位置**和**角度**的改变

解：

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{K_0} l & \frac{1}{\sqrt{K_0}} \sin \sqrt{K_0} l \\ -\sqrt{K_0} \sin \sqrt{K_0} l & \cos \sqrt{K_0} l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}$$



粒子经过四极磁铁后，只有横向位置和角度均发生改变

➤ 粒子在相空间中的表示

- 定义：广义坐标和广义动量联合表示的多维空间

例如 (x, p_x) 构成一个水平方向的二维相空间， (y, p_y) 构成垂直方向的二维相空间

(x, y, p_x, p_y) 构成一个横向四维相空间

- 实际上，用**坐标** x 和**角度** x' 构成的相空间更为方便

$$x' \equiv \frac{dx}{ds}$$