中山大學 SUN YAT-SEN UNIVERSITY
中国科学院高能物理研究所 Institute of High Energy Physics Chinese Academy of Sciences
IASF 深圳综合粒子设施研究院 Institute of Advanced Science Facilities, Shenzhen

# 横向束流动力学

## 第五讲

苑尧硕

# 上节回顾

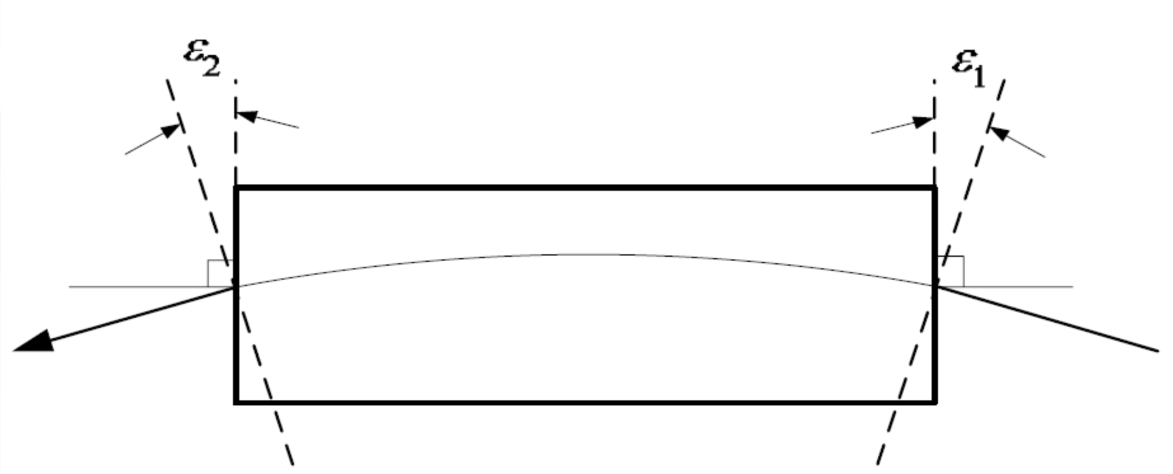
- 粒子经过传输矩阵后的计算
- 传输矩阵的薄透镜近似
- 多个元件的传输矩阵
- 二极磁铁的边缘聚焦效应

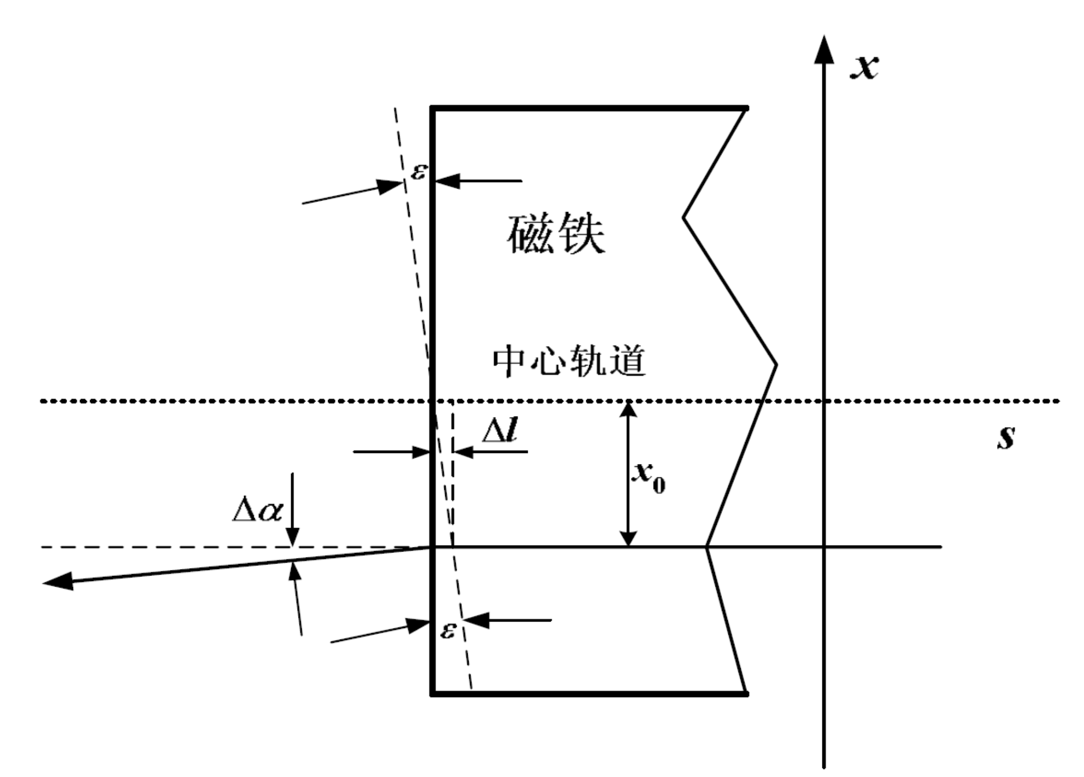
# 本节内容

- 传输矩阵的稳定性
- Floquet变换
- Twiss参数
- 发射度与接受度

# 二极磁铁的边缘聚焦效应

- 当不垂直入射（离开）二极磁铁时，会产生边缘聚焦效应




- 由薄透镜近似，可知

$$\Delta l = x_0 \tan \varepsilon \qquad x = x_0$$

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta l}{\rho} = x_0 \frac{\tan \varepsilon}{\rho} \qquad x' = x_0' + x_0 \frac{\tan \varepsilon}{\rho}$$

# 二极磁铁的边缘聚焦效应

- 微分方程组 ⟺ 传输矩阵

$$x = x_0$$

$$x' = x_0' + x_0 \frac{\tan\varepsilon}{\rho}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{x,11} & m_{x,12} \\ m_{x,21} & m_{x,22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

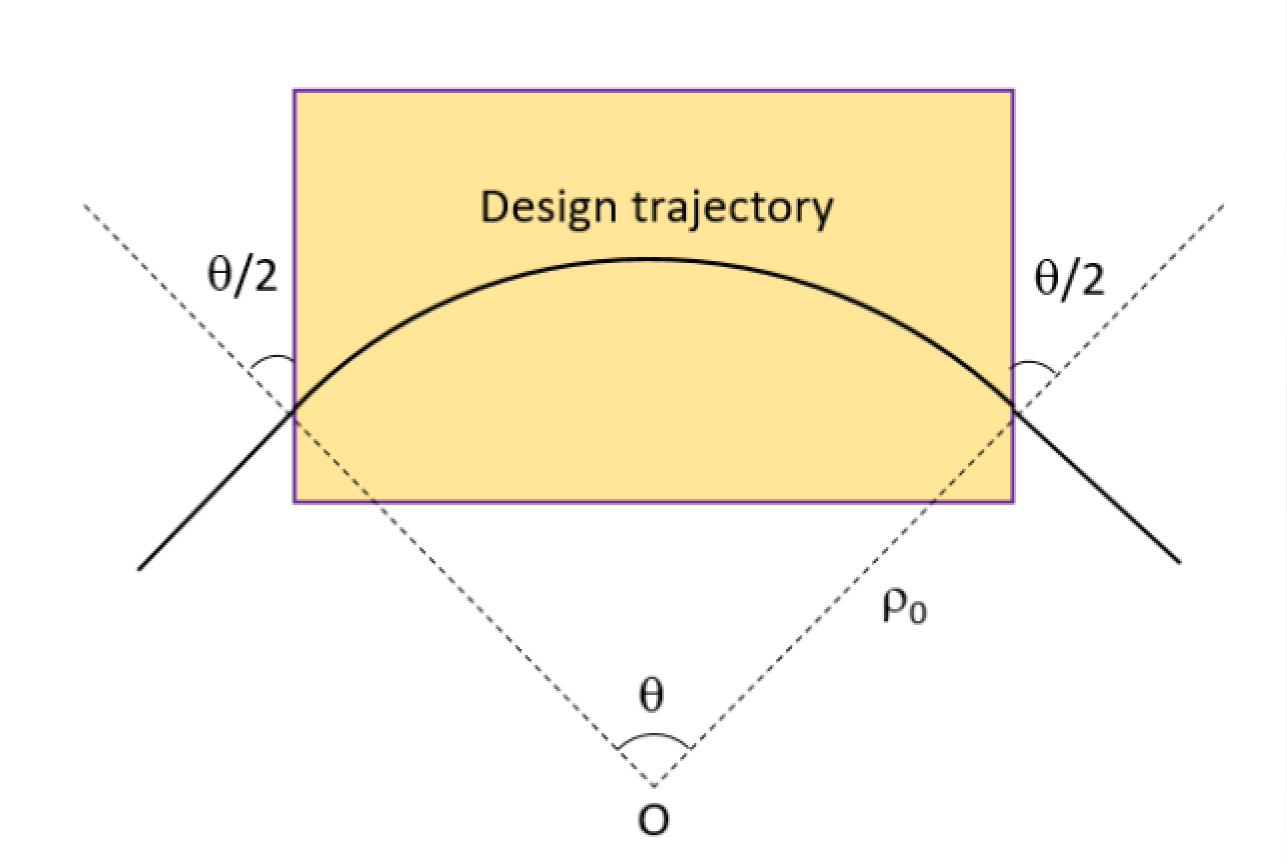
可知相应的传输矩阵为

$$M_{edge,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\tan\varepsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix}$$

# 二极磁铁的边缘聚焦效应

例1 如图所示，证明该矩形二极磁铁的水平方向的传输矩阵为

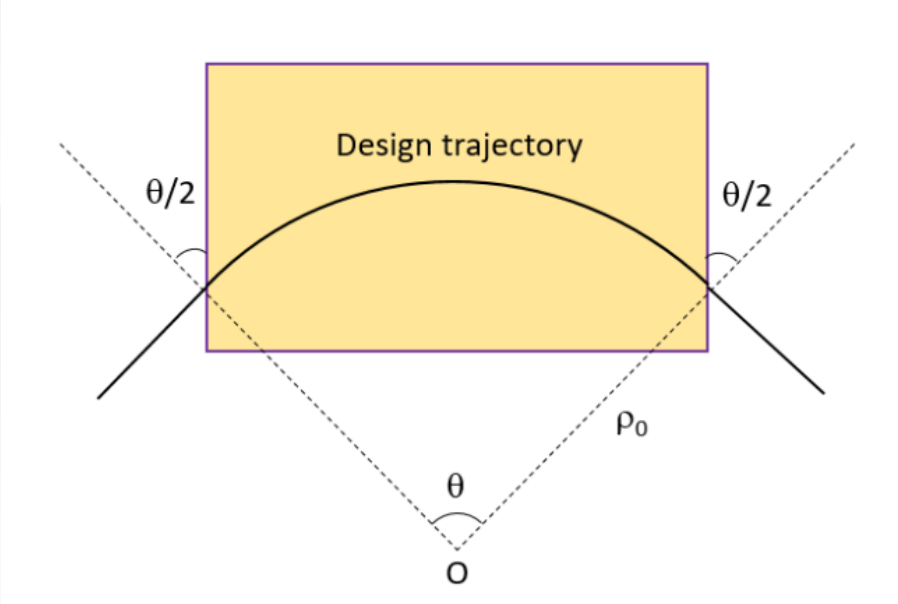
$$M_{rect,x} = \begin{pmatrix} 1 & \rho\sin\theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



# 二极磁铁的边缘聚焦效应

例1 证明矩形二极磁铁的传输矩阵为

$$M_{rect,x}=\begin{pmatrix}1 & \rho\sin\theta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$




证明： 矩形二极磁铁的水平方向的边缘聚焦传输矩阵为

$$M_{edge,x}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{\tan(\theta/2)}{\rho} & 1\end{pmatrix}$$

则矩形二极磁铁的总的传输矩阵可写为

$$M_{rect,x}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{\tan\theta/2}{\rho} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \rho\sin\theta\\ -\dfrac{1}{\rho}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \dfrac{\tan\theta/2}{\rho} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \rho\sin\theta\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

证毕。

# 粒子传输的稳定性条件

- 假设某环形加速器由P个长度为L的周期性加速结构组成，粒子在环中运行一圈的传输矩阵为

$$M(s+PL\,|\,s)=\left[M(s)\right]^{P}$$

稳定

不稳定

- 粒子经过m圈的传输矩阵为

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}=\left[M(s)\right]^{mP}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix}$$

- 稳定性条件：

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}=finite$$

对传输矩阵M（加速器的设计）有什么要求？

- 设二维矩阵M的两个特征值为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$， $\vec{v}_1$和 $\vec{v}_2$ 为对应的特征向量

$$M\vec{v}_1=\lambda_1\vec{v}_1 \qquad M\vec{v}_2=\vec{v}_2\lambda_2$$

# 粒子传输的稳定性条件

- 设二维矩阵M的两个特征值为 $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ ，则有

$$\det(M-\lambda I)=\begin{vmatrix} m_{11}-\lambda & m_{12} \\ m_{21} & m_{22}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-Trace(M)\lambda+1=0$$

$$Trace(M)=m_{11}+m_{22}$$

$\lambda$ 为实数的充要条件为 $|Trace(M)|\le 2$

- 令 $Trace(M)=\cos(\phi)$ 　　则两个特征值可表示为 $\lambda_1=e^{i\phi}$ 　$\lambda_2=e^{-i\phi}$

Φ为betatron相移，

Φ为实数 |Trace(M)|≤2

Φ为复数 |Trace(M)|≥2

# 粒子传输的稳定性条件

- 粒子的初始坐标可写为

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 \qquad \begin{pmatrix} x_m \\ x_m' \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0' \end{pmatrix} = a\boxed{\lambda_1^n} v_1 + b\boxed{\lambda_2^n} v_2 = ae^{in\phi} v_1 + be^{-in\phi} v_2$$

- $\lambda_1$ 和 $\lambda_2$ 保持单位1的充要条件 Φ为实数，或者

$$\boxed{\left|Trace(M)\right| \le 2}$$

粒子轨道稳定性条件

- 线性系统的稳定性条件与初值（x0,x0′ ）无关，与加速器的结构有关

# Twiss参数

- 回到希尔方程

$$z''+K(s)z=0 \qquad K(s+L)=K(s)$$

- 其解的形式可写为

$$z(s)=a\omega(s)e^{i\psi(s)} \qquad z^*(s)=a\omega(s)e^{-i\psi(s)}$$

包络方程 $$\omega''+K\omega-\frac{1}{\omega^3}=0 \qquad \psi'=\frac{1}{\omega^2}$$

- Floquet定理

$$K(s+L)=K(s) \Rightarrow \psi(s+L)=\psi(s) \qquad \omega(s+L)=\omega(s)$$

# Twiss参数

- 由$s_1$到$s_2$的传输矩阵可表示为

$$M(s_2\,|\,s_1)=\begin{pmatrix} \dfrac{\omega_2}{\omega_1}\cos\psi-\omega_2\omega_1'\sin\psi & \omega_1\omega_2\sin\psi \\ -\dfrac{(1+\omega_1\omega_1'\omega_2\omega_2')}{\omega_1\omega_2}\sin\psi-\left(\dfrac{\omega_1'}{\omega_2}-\dfrac{\omega_2'}{\omega_1}\right)\cos\psi & \dfrac{\omega_1}{\omega_2}\cos\psi+\omega_1\omega_2'\sin\psi \end{pmatrix}$$

其中在$s_1$处，$\omega(s_1)=\omega_1$，在$s_2$处，$\omega(s_2)=\omega_2$

$$\psi=\psi(s_2)-\psi(s_1)$$

# Twiss参数

- 对传输矩阵M($s_2|s_1$)应用周期性条件，令$s_2=s_1+L$, 则有

$$\omega_1=\omega_2=\omega \qquad \omega_1'=\omega_2'=\omega'$$

$$\psi_2-\psi_1=\psi(s_1+L)-\psi(s_1)=\phi$$

- 传输矩阵M($s_2|s_1$)变为

$$M(s_1+L\,|\,s_1)=\begin{pmatrix} \cos\phi-\omega\omega'\sin\phi & \omega^2\sin\phi \\ -\dfrac{(1+\omega^2\omega'^2)}{\omega^2}\sin\phi & \cos\phi+\omega\omega'\sin\phi \end{pmatrix}$$

# Twiss参数

- 若定义

$$\omega^2 = \beta$$

$$\alpha = -\omega\omega' = -\frac{\beta'}{2}$$

$$\gamma = \frac{1+\alpha^2}{\beta}$$

$$M(s_1+L\,|\,s_1) = \begin{pmatrix} \cos\phi - \omega\omega'\sin\phi & \omega^2\sin\phi \\ -\dfrac{(1+\omega^2\omega'^2)}{\omega^2}\sin\phi & \cos\phi + \omega\omega'\sin\phi \end{pmatrix}$$

- 传输矩阵M变为（练习）

# Twiss参数

- 经过一个加速周期后的传输矩阵M变为

$$M(s_1+L\,|\,s_1)=\begin{pmatrix}\cos\phi+\alpha\sin\phi & \beta\sin\phi\\ -\gamma\sin\phi & \cos\phi-\alpha\sin\phi\end{pmatrix}$$

$$\omega^2=\beta \qquad \psi'=\frac{1}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad \phi=\int_s^{s+L}\frac{ds}{\beta(s)}$$

- $\beta(s)$为betatron振幅函数，简称beta函数
- $\phi$为一个加速周期L内betatron振幅相移，简称相移

# Twiss参数

➢ 练习：

包络方程 $$\omega''+K\omega-\frac{1}{\omega^3}=0$$

$$\Big\Downarrow \quad \beta=\omega^2$$

$$\frac{1}{2}\beta''+K\beta-\frac{1}{\beta}\left[1+\left(\frac{\beta'}{2}\right)^2\right]=0$$

# Twiss参数

- 希尔方程

$$z''+K(s)z=0 \qquad K(s+L)=K(s)$$

- 其解的形式

$$z(s)=a\omega(s)e^{i\psi(s)} \qquad z^{*}(s)=a\omega(s)e^{-i\psi(s)}$$

$$z(s)=a\sqrt{\beta_z(s)}\cos\left[\psi_z(s)+\xi_z\right] \qquad \psi_z(s)=\int_0^s \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

- Twiss参数（Courant-Snyder 函数）

$$\boxed{\beta(s) \qquad \alpha(s)=-\frac{\beta'(s)}{2} \qquad \gamma(s)=\frac{1+\alpha(s)^2}{\beta(s)}}$$

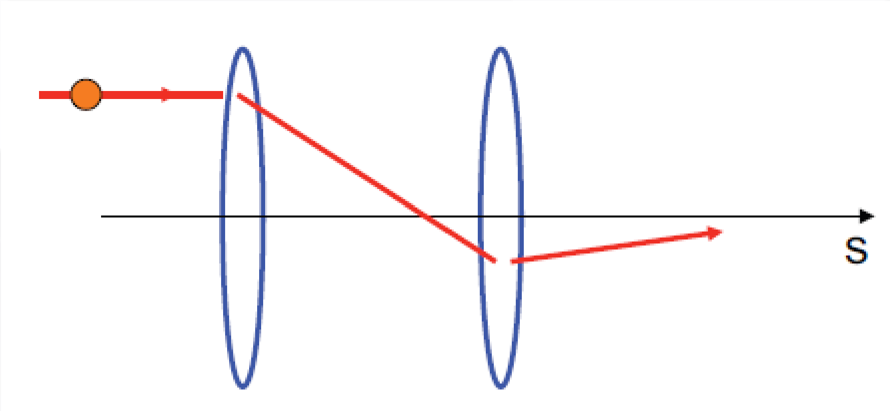
- Twiss参数是描述机器属性的一组参数，与粒子的状态无关

# Twiss参数

- 例2  一个doublet结构由强度相同的一个聚焦四极磁铁和一个散焦四极磁铁组成{QF  O DF}，求粒子经过这段doulblet的betatron相移

提示：

$$M_{doublet} = M_2 M_{drift} M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix}$$



# Twiss参数

➢ 例2 一个doublet结构由强度相同的一个聚焦四极磁铁和一个散焦四极磁铁组成{QF O DF}，求粒子经过这段doulblet的betatron相移

解： $$M_{doublet} = M_2 M_{drift} t M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\frac{l_0}{f_1} & l_0 \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{l_0}{f_2} \end{pmatrix}$$

其中 $$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{l_0}{f_1 f_2}$$

对比 $$\begin{pmatrix} 1-\frac{l_0}{f_1} & l_0 \\ -\frac{1}{f} & 1-\frac{l_0}{f_2} \end{pmatrix}$$ 和 $$\begin{pmatrix} \cos\phi + \alpha\sin\phi & \beta\sin\phi \\ -\gamma\sin\phi & \cos\phi - \alpha\sin\phi \end{pmatrix}$$

可知

$$cos\phi = \frac{1}{2}Trace(M) = \frac{1}{2}(2 - \frac{l_0}{f_1} - \frac{l_0}{f_2})$$

# Twiss参数

➢ 例3　一般地，s1到s2的传输矩阵可用Twiss参数表示为

$$M(s_2 \mid s_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{\omega_2}{\omega_1}\cos\psi - \omega_2\omega_1'\sin\psi & \omega_1\omega_2\sin\psi \\ -\dfrac{(1+\omega_1\omega_1'\omega_2\omega_2')}{\omega_1\omega_2}\sin\psi - \left(\dfrac{\omega_1'}{\omega_2} - \dfrac{\omega_2'}{\omega_1}\right)\cos\psi & \dfrac{\omega_1}{\omega_2}\cos\psi + \omega_1\omega_2'\sin\psi \end{pmatrix}$$

提示:　$\beta = \omega^2$　　$\alpha = -\dfrac{\beta'}{2}$

# Twiss参数

➢ 例3 一般地，s1到s2的传输矩阵可用Twiss参数表示为

$$M(s_2|s_1)=\begin{pmatrix} \frac{\omega_2}{\omega_1}\cos\psi-\omega_2\omega_1'\sin\psi & \omega_1\omega_2\sin\psi \\ -\frac{(1+\omega_1\omega_1'\omega_2\omega_2')}{\omega_1\omega_2}\sin\psi-\left(\frac{\omega_1'}{\omega_2}-\frac{\omega_2'}{\omega_1}\right)\cos\psi & \frac{\omega_1}{\omega_2}\cos\psi+\omega_1\omega_2'\sin\psi \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}\left(\cos\psi+\alpha_1\sin\psi\right) & \sqrt{\beta_1\beta_2}\sin\psi \\ -\frac{(1+\alpha_1\alpha_2)}{\sqrt{\beta_1\beta_2}}\sin\psi-\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\sqrt{\beta_1\beta_2}}\right)\cos\psi & \sqrt{\frac{\beta_2}{\beta_1}}\left(\cos\psi-\alpha_2\sin\psi\right) \end{pmatrix}$$

# Twiss参数

- 例4  求FODO结构 {QF/2  O  QD  O  QF/2} 的Twiss参数