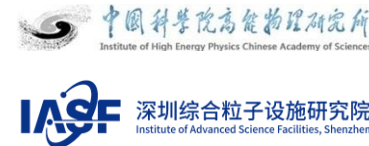




中山大學
SUN YAT-SEN UNIVERSITY



横向束流动力学

第六讲

- 粒子经过传输矩阵后的计算
- 传输矩阵的薄透镜近似
- 多个元件的传输矩阵
- 二极磁铁的边缘聚焦效应

本节内容

- 发射度与接受度
- 色散效应

- 例4 求FODO结构 $\{QF/2 \quad O \quad QD \quad O \quad QF/2\}$ 的Twiss参数

- 例4 求FODO结构 {QF/2 O QD O QF/2} 的Twiss参数

$$M_{FODO} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} & 2l_0 \left(1 + \frac{l_0}{2f} \right) \\ -\frac{l_0}{2f^2} \left(1 - \frac{l_0}{2f} \right) & 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} \end{pmatrix}$$

➤ 对比

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} & 2l_0 \left(1 + \frac{l_0^2}{2f}\right) \\ -\frac{l_0}{2f^2} \left(1 - \frac{l_0}{2f}\right) & 1 - \frac{l_0^2}{2f^2} \end{pmatrix}$$

和

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi + \alpha \sin \varphi & \beta \sin \varphi \\ -\gamma \sin \varphi & \cos \varphi - \alpha \sin \varphi \end{pmatrix}$$

可知

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \text{Trace}(M) = 1 - \frac{l_0^2}{2f^2}$$

$$\beta_F = \frac{2l_0^2 \left[1 + \sin \frac{\varphi}{2}\right]}{\sin \varphi}$$

$$\alpha_F = 0$$

➤ 计算结果为该FODO结构入口处和出口处的Twiss参数

- 作业 已知一个FODO结构 {QF/2 O QD O QF/2}的传输矩阵为

$$M_{FODO} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2f} & 1 \end{pmatrix}$$

求在QD出口处的Twiss参数 (β , α , γ)

提示: {QF/2 O QD O QF/2}  {QD/2 O QF O QD/2}

- 经过长度为L的周期性加速结构的betatron的相移为

$$\varphi_z = \psi_z(s + L) - \psi_z(s) = \int_s^{s+L} \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

- 若环形加速器的周长为L，包含P个周期性加速器结构，则经过全环的相移为

$$P\varphi_z = \psi_z(s + PL) - \psi_z(s) = \int_s^{s+PL} \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

- 工作点Q可定义为

$$Q_z = \frac{P\varphi_z}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_s^{s+C} \frac{ds}{\beta_z(s)}$$

➤ 再回到希尔方程

$$z'' + K(s)z = 0$$

$$K(s + L) = K(s)$$

其解为

$$z(s) = A_z \sqrt{\beta_z(s)} \cos[\psi_z(s) + \xi_z]$$

↑
Twiss参数

↑
Betatron相位

则

$$\alpha(s)z(s) + \beta(s)z'(s) = -A_z \sqrt{\beta_z(s)} \sin[\psi_z(s) + \xi_z]$$

$$z^2 + (\alpha z + \beta z')^2 = A_z^2 \beta$$

$$\alpha(s) = -\frac{\beta'(s)}{2} \quad \gamma(s) = \frac{1 + \alpha(s)^2}{\beta(s)}$$

可得

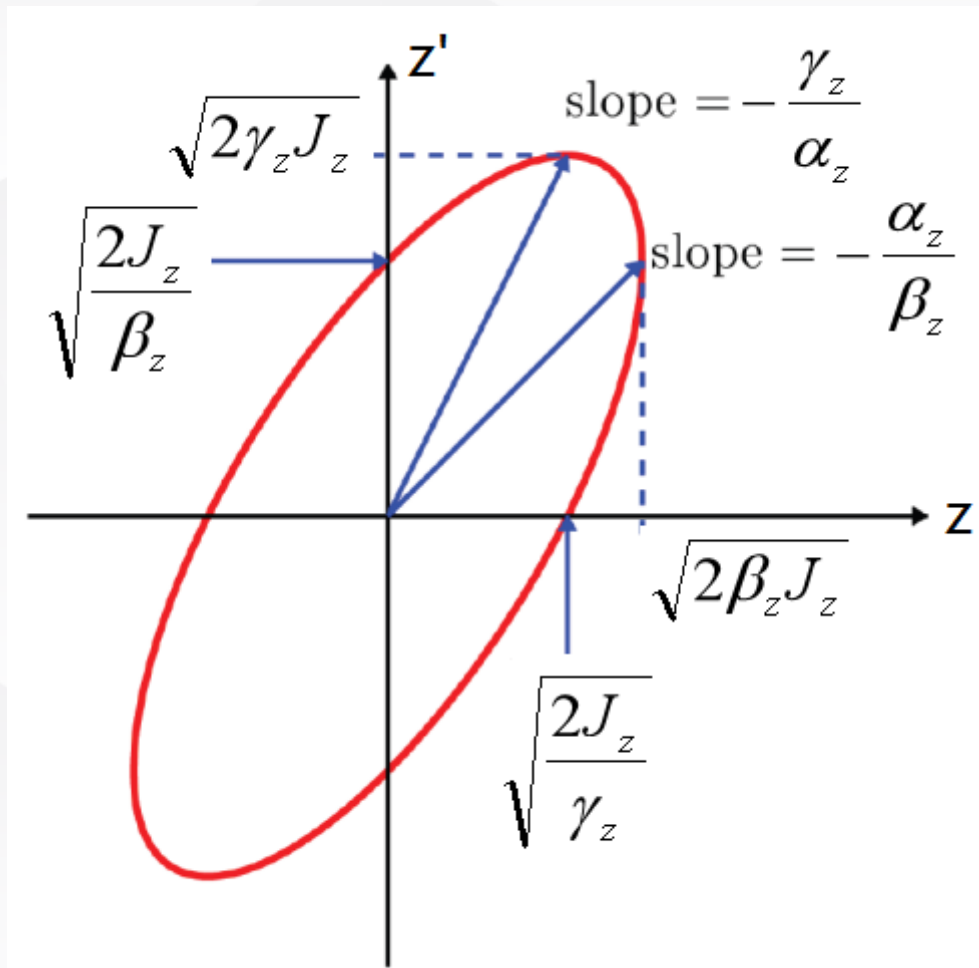
$$A_z^2 = \gamma(s)z^2(s) + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'^2(s)$$

相椭圆

$$A^2 = \gamma(s)z^2(s) + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'^2(s)$$

$$J_z = \frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}[\gamma(s)z^2(s) + 2\alpha(s)z(s)z'(s) + \beta(s)z'^2(s)]$$

➤ 相椭圆面积 $S = \frac{\pi A^2}{\sqrt{\beta\gamma - \alpha^2}} = \pi A^2 = 2\pi J$



束流的发射度

➤ 描述束流参数的物理量

➤ 一阶矩（平均值）

$$\langle x_i \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} \quad \langle y_i \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{y_i}{N} \quad \langle x_i' \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{x_i'}{N} \quad \langle y_i' \rangle = \sum_{i=1}^N \frac{y_i'}{N}$$

$\langle x_i \rangle$ 和 $\langle y_i \rangle$ 的物理意义：束流（横截面）的中心

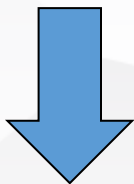
➤ 二阶矩

$$\sigma_x^2 = \langle x_i^2 \rangle - \langle x_i \rangle^2 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i^2}{N} - \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N} \right)^2$$

物理意义：束流rms横向尺寸

相椭圆

- 每一个粒子对应一个相椭圆，相椭圆的面积保持不变
- 在某位置处，一个粒子在相空间中是一个点，在经过 2π ，为其运动轨迹为一闭合的相椭圆
- 不同的粒子对应的相椭圆的面积不同

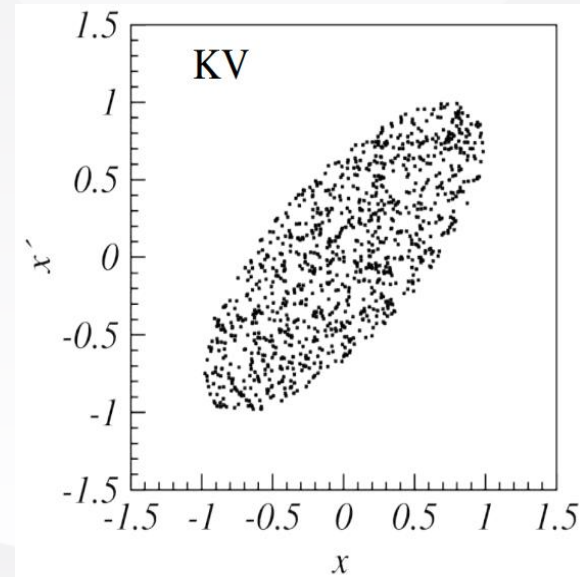


很多粒子情形

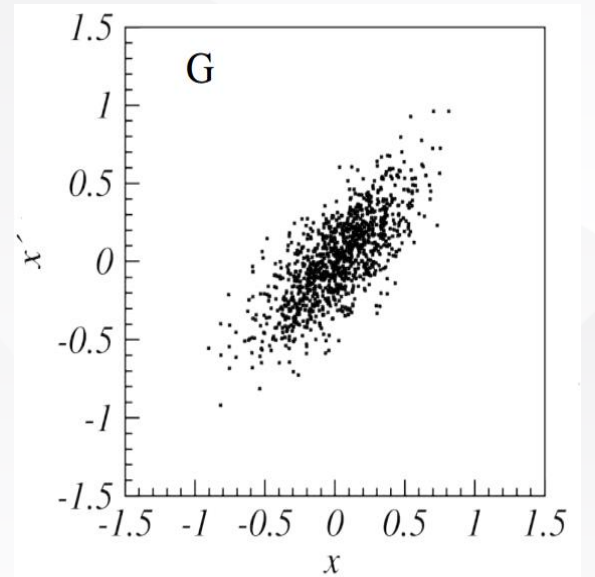
- 在某位置处，一群粒子构成的束流在相空间中占据一个椭圆，这个椭圆的面积称为束流的发射度
- 在线性元件构成的环形加速器中，束流的（面积）发射度不变--刘维定理（Liouville's theorem）

束流的发射度

- 束流的发射度的面积是由离子源决定的
- 在限行传输系统中其保持不变

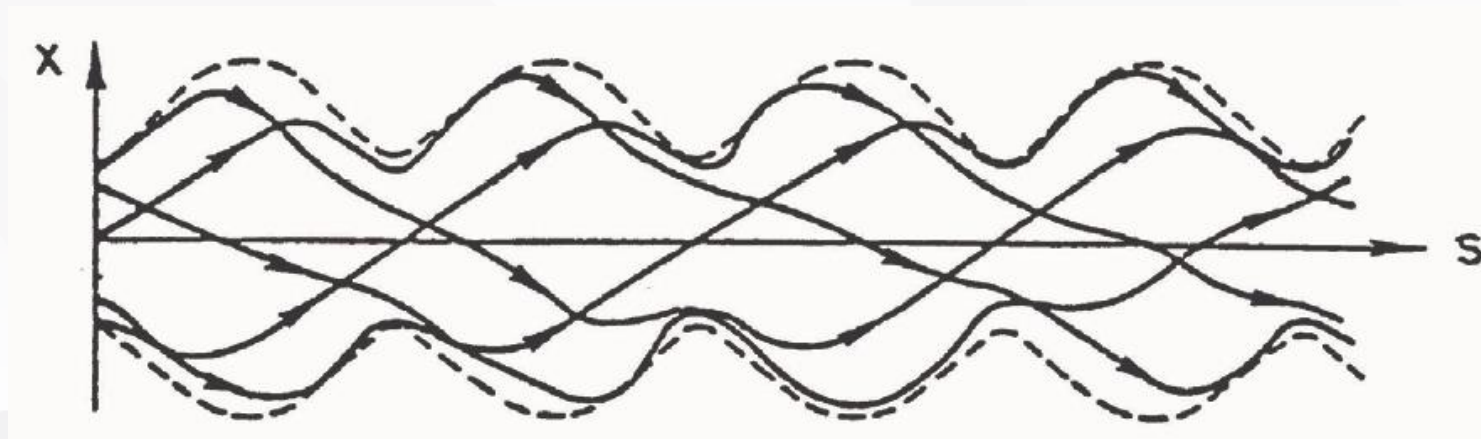
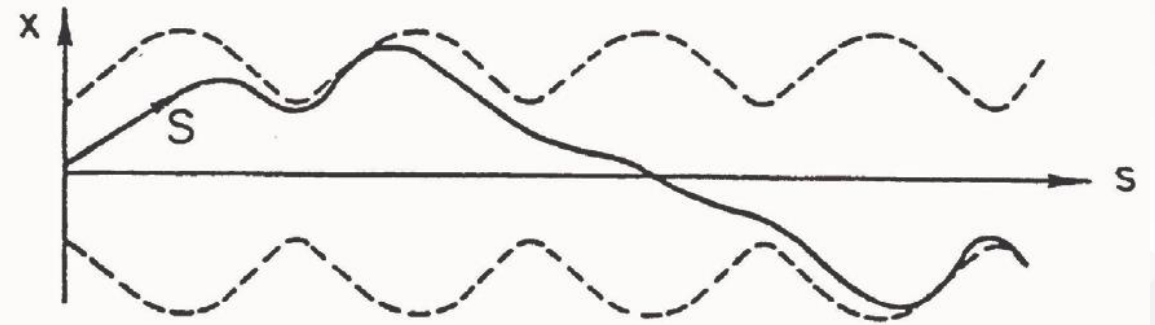
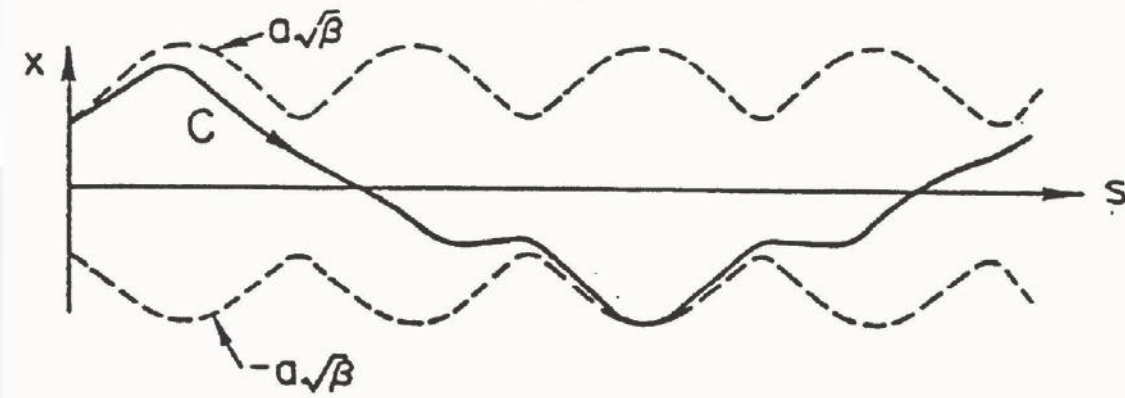


K-V分布



高斯分布

束流的发射度



束流的包络与单粒子的运动

束流的发射度

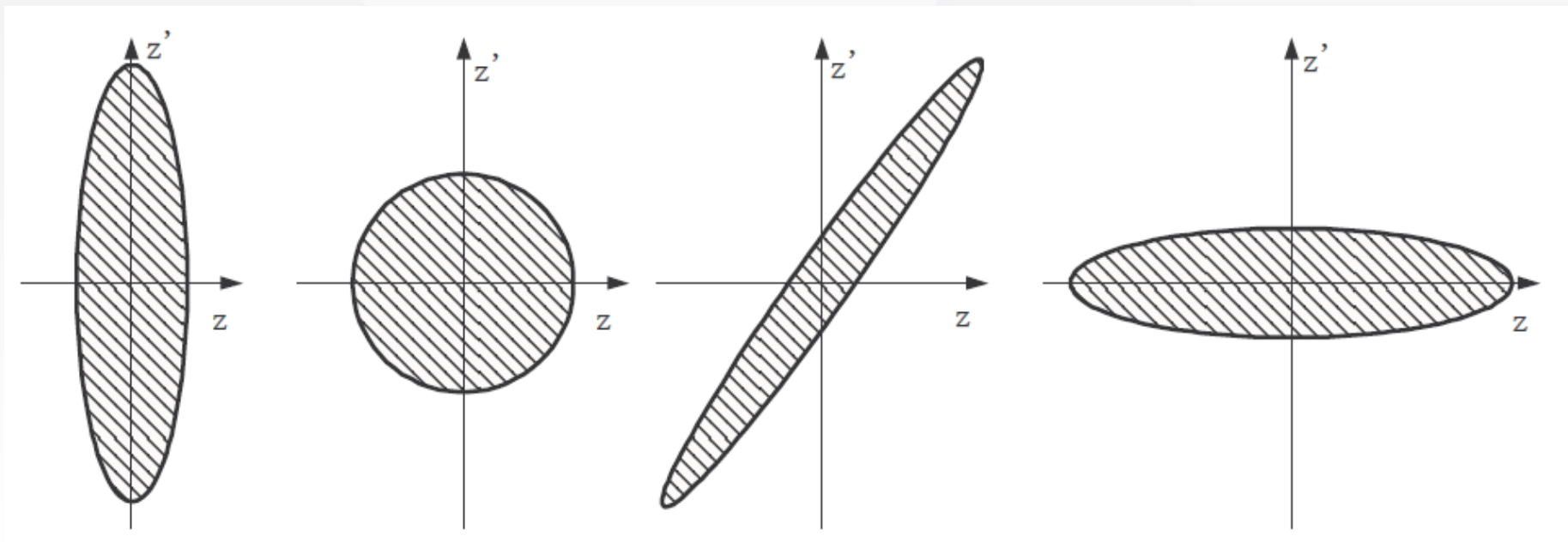
- 单粒子由 (x, x', y, y') 描述
- 两个粒子由 (x_1, x_1', y_1, y_1') 和 (x_2, x_2', y_2, y_2') 描述
- n 个粒子?
- n^{10} 个粒子??

➤ 束流的发射度

- 利用二阶矩，可以定义方均根（rms）发射度

$$\epsilon_{rms,x} = \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_{x'}^2 - \sigma_{xx'}^2}$$

- 在线性元件传输过程中，发射度的面积是不变的



束流在经历环形加速器中的不同元件时束流相空间椭圆形状（发射度）的变化

➤ 传输矩阵与Twiss参数 (Courant-Snyder Parameters)

- 传输矩阵M是保辛的 (Symplectic) , 满足:

$$M^T J M = J$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

反对称矩阵

- 辛矩阵的行列式值为1,即 $\det(S) = 1$ 。
- 辛矩阵与其转置矩阵的逆相等,即 $S^T = S^{-1}$ 。
- 两个辛矩阵的乘积仍为辛矩阵。

- Twiss 参数可写作矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} \gamma & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

- 其行列式为: $\beta\gamma - \alpha^2 = 1$
- 传输矩阵可写为:

$$M = I \cos \mu + J A \sin \mu = \begin{pmatrix} \cos \mu + \alpha \sin \mu & \beta \sin \mu \\ -\gamma \sin \mu & \cos \mu - \alpha \sin \mu \end{pmatrix}$$

➤ Betatron运动方程 (束流动力学第二节)

$$\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{\rho + x}{\rho^2} = \pm \frac{B_y}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \mp \frac{B_x}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$



简化条件: 1. 只有二极磁铁和四极磁铁
2. 动量 $p=p_0$ (无能散)

➤ Hill (希尔) 方程

$$x'' + K_x(s)x = 0$$

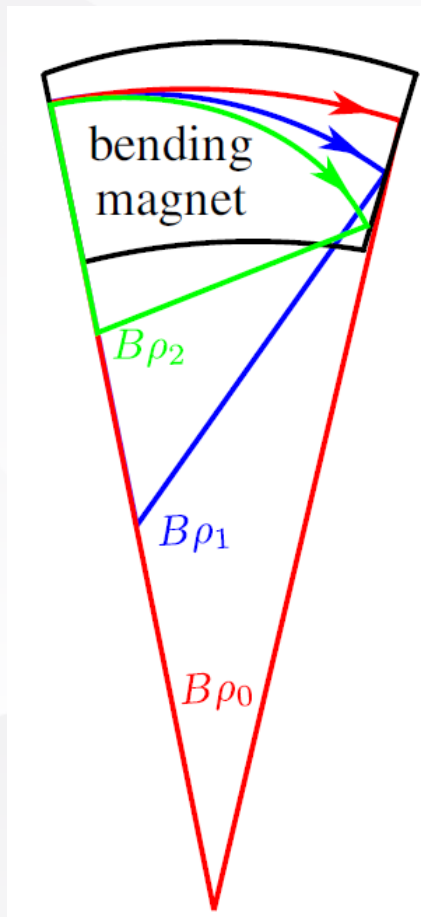
$$y'' + K_y(s)y = 0$$

$$K_x(s) = \frac{1}{\rho^2} + K_1(s)$$

$$K_y(s) = -K_1(s)$$

$$K_1(s) = \mp \frac{B_1(s)}{B\rho}$$

一般性希尔方程: $x'' + kx = 0$



色散效应

➤ 实际束流中的粒子的动量是不同的，即束流具有能散或动量分散

➤ 通常束流的动量散度 $\delta \equiv \frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p}$

➤ 当考虑动量分散时，

$$\frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{\rho + x}{\rho^2} = \pm \frac{B_y}{B\rho} \frac{p_0}{p} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2 = \pm \frac{B_y}{B\rho} \frac{p_0}{p_0(1+\delta)} \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)^2$$

提示：泰勒展开 $\frac{1}{1-\delta} = 1 - \delta + \delta^2 - \delta^3 + \delta^4 + O[\delta]5^d$

$$B_y = B_0 + \frac{\partial B}{\partial x} x$$

➤ 练习：推到含动量分散的运动方程在x方向下具有如下形式

$$x'' + \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{2p_0 - p}{p} + \frac{B'}{B\rho} \frac{p_0}{p} \right) x = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p}$$

包含特殊解的希尔方程。

➤ 包含色散效应的传输矩阵

➤ 记其特殊解具有如下形式: $x = D(s)\delta$, 则其通解为

$$x = x_\beta + D(s)\delta$$

➤ 考虑色散效应的传输矩阵为:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix}_{s2} = \begin{pmatrix} - & - & d \\ - & - & d' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix}_{s1}$$

$D(s)$ 和 $D'(s)$ 同普通粒子坐标一样通过矩阵传输
利用周期性条件求解色散函数 $D(s)$

$$\begin{pmatrix} D \\ D' \\ 1 \end{pmatrix}_{s2} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ D' \\ 1 \end{pmatrix}_{s1}$$

➤ 对于扇形二极磁铁 (**sector magnet**) 来说, 以偏转角表示的矩阵为:

$$\theta = \frac{l}{\rho_0} \text{ 为偏转角度}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix}_{s2} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \rho_0 \sin\theta & \rho_0(1 - \cos\theta) \\ -\frac{1}{\rho_0} \sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \delta \end{pmatrix}_{s1}$$

注: 在非偏转方向粒子运动相当于经过长度 l 的漂移段。